Вычислительные технологии **Том 10, Специальный выпуск, 2005**

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ ХААРА ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ*

К. А. Кириллов
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: KKirillov@rambler.ru

Cubature formulae with Haar d-property are considered in the two-dimensional case. For all $d \geqslant 5$ the minimal cubature formulae satisfied d-property are constructed.

Введение

Существенный интерес в теории приближенного интегрирования вызывает задача построения минимальных кубатурных (квадратурных) формул, точных для некоторого заданного набора функций, т. е. таких формул, которые точно интегрируют указанные функции, используя наименьшее возможное число узлов. Многие работы известных авторов посвящены проблеме построения минимальных формул приближенного вычисления интегралов, точных для алгебраических и тригонометрических многочленов. Квадратурные и кубатурные формулы, точные на алгебраических полиномах, восходят еще к Гауссу. Минимальные формулы приближенного вычисления интегралов, точные на тригонометрических многочленах, рассматривались в работах И.И. Кеда, М.В. Носкова, И.П. Мысовских и др. Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в монографии И.М. Соболя [1] и работах K. Entacher [2–4]. В их трудах точность формул приближенного интегрирования на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешностей этих формул. Вопрос минимизации числа узлов не рассматривался.

Минимальные квадратурные формулы с произвольной суммируемой функцией, точные для функций Хаара, были описаны М.В. Носковым и автором настоящей статьи в [5]. В двумерном случае вопрос построения минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара степени d — специальных линейных комбинаций произведений функций Хаара, исследовался автором в [6, 7]. В этих работах рассмотрено свойство кубатурных формул быть точными на константах и полиномах Хаара первых d степеней (так называемое d-свойство), получены нижние оценки числа узлов кубатурных формул, обладающих d-свойством, а также приведены примеры минимальных формул для $d = 1, 2, 3, 5$.

В настоящей работе рассмотрены примеры минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством для $d = 5,\ 6,\ 7$; на основании этих формул для любого целого $d \geqslant 8$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00823, № 03-01-00703).

построены точные на полиномах Хаара кубатурные формулы, минимальность которых следует из оценки числа узлов, полученной в [6].

В [1] сформулировано понятие функций Хаара и даны сопутствующие ему определения. Приведем их с незначительными изменениями, вызванными тем, что в настоящей работе используется оригинальное определение функций $\{\chi_{m,j}(x)\}$, введенное А. Хааром [8], отличное от определения этих функций из [1].

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $\dfrac{j-1}{2^{m-1}}$, $\dfrac{j}{2^{m-1}}$ $(m=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots,2^{m-1})$. Если левый конец промежутка совпадает с 0, то будем считать промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1, — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми.

Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где m — некоторое натуральное число, $j=1,\ldots,2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x)=\begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x\in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x\in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x\in[0,1]\setminus\overline{l_{m,j}}, \\ \dfrac{1}{2}\left[\chi_{m,j}(x-0)+\chi_{m,j}(x+0)\right], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва.} \end{cases}$$

Здесь $\overline{l_{m,j}}=\left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}},\dfrac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m=1,2,\ldots,\ j=1,\ldots,2^{m-1}$.

В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_0(x)\equiv 1$.

В двумерном случае полиномами Хаара степени d будем называть линейные комбинации функций $\chi_0(x)\equiv 1$, $\chi_{p,i}(x)$, $\chi_{q,j}(y)$, $\chi_{m,k}(x)\chi_{n,l}(y)$ с действительными коэффициентами, где $p,q=1,\ldots,d$, $m+n=2,\ldots,d$, $i=1,\ldots,2^{p-1}$, $j=1,\ldots,2^{q-1}$, $k=1,\ldots,2^{m-1}$, $l=1,\ldots,2^{n-1}$ и хотя бы один из коэффициентов при $\chi_{d,i}(x)$, $\chi_{d,j}(y)$, $\chi_{m,k}(x)\chi_{n,l}(y)$ $(m+n=d)$ отличен от нуля.

Заметим, что в записи полинома Хаара 1-й степени отсутствуют произведения $\chi_{k,m}(x)\chi_{l,n}(y)$, а под полиномом Хаара нулевой степени будем понимать константы.

Рассмотрим кубатурные формулы

$$I\,[f]=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx\,dy\approx\sum_{i=1}^{N}C^{(i)}f(x^{(i)},y^{(i)})=Q\,[f]\,, \tag{1}$$

где $(x^{(i)},y^{(i)})\in[0,1]\times[0,1]$ — узлы формулы; $C^{(i)}\in\mathbb{R}$ — ее коэффициенты, $i=1,\ldots,N$; $f(x,y)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0,1]\times[0,1]$.

Будем говорить, что формула (1) обладает d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x,y)$ степени, не превосходящей d, т. е. $Q\,[P]=I\,[P]$.

Мономами Хаара степени d назовем функции $\chi_{d,k}(x)$, $\chi_{d,k}(y)$, $\chi_{l,i}(x)\chi_{m,j}(y)$, где $k=1,\ldots,2^{d-1}$, $l+m=d$, $i=1,\ldots,2^{l-1}$, $j=1,\ldots,2^{m-1}$.

Приведем определение κ-функции, введенное в [5]. Пусть n и j — некоторые натуральные числа, причем $1\leqslant j\leqslant 2^n$.

Функцию

$$\kappa_{n,j}(x) = \chi_1(x) + \sum_{m=1}^{n} 2^{\frac{m-1}{2}} \sigma_m \chi_{m,j_m}(x)$$

назовем κ-функцией группы номер n, где $j_1 = 1$, а индексы $j_2, .., j_n$ таковы, что $l_{n+1,j} \subset l_{n,j_n} \subset \ldots \subset l_{2,j_2} \subset l_{1,1} = [0,1]$,

$$\sigma_m = \begin{cases} \ \ 1, & \text{если } l_{m+1,j_{m+1}} = l^-_{m,j_m}, \\ -1, & \text{если } l_{m+1,j_{m+1}} = l^+_{m,j_m}, \end{cases}$$

$m = 1, \ldots, n,\ j_{n+1} = j$.

Функции $\kappa_{d,k}(x),\ \kappa_{d,k}(y),\ \kappa_{l,i}(x)\kappa_{m,j}(y)$ будем называть κ-мономами степени d, где $k = 1, \ldots, 2^d,\ l + m = d,\ i = 1, \ldots, 2^l,\ j = 1, \ldots, 2^m$.

Лемма 1. [5] *Каждая функция Хаара из первых n групп и функция $\chi_0(x)$ представимы в виде линейной комбинации κ-функций n-й группы, и притом единственным образом.*

Следствие 1. *Формула вида (1) обладает d-свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех κ-мономов степени d.*

Лемма 2. [5] *Для κ-функций n-й группы имеет место равенство*

$$\kappa_{n,j}(x) = \begin{cases} 2^n & \textit{при } x \in l_{n+1,j}, \\ 2^{n-1} & \textit{при } x \in \overline{l_{n+1,j}} \setminus l_{n+1,j}, \\ 0 & \textit{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{n+1,j}}, \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, 2^n$.

Следствие 2. *Для κ-мономов степени d справедливо соотношение*

$$\kappa_{m,i}(x)\kappa_{n,j}(y) = \begin{cases} 2^d, & \textit{если } (x,y) \in l_{m+1,i} \times l_{n+1,j}, \\ 2^{d-1}, & \textit{если } (x,y) \in ((\overline{l_{m+1,i}} \setminus l_{m+1,i}) \times l_{n+1,j}) \bigcup \\ & \bigcup (l_{m+1,i} \times (\overline{l_{n+1,j}} \setminus l_{n+1,j})), \\ 2^{d-2}, & \textit{если } (x,y) \in (\overline{l_{m+1,i}} \setminus l_{m+1,i}) \times (\overline{l_{n+1,j}} \setminus l_{n+1,j}), \\ 0, & \textit{если } (x,y) \in ([0,1] \times [0,1]) \setminus (\overline{l_{m+1,i}} \times \overline{l_{n+1,j}}), \end{cases}$$

$m + n = d,\ i = 1, \ldots, 2^m,\ j = 1, \ldots, 2^n$.

Из этого следствия вытекает

Лемма 3. *Если $K_d(x,y)$ — произвольный κ-моном степени d, то*

$$I\,[K_d] = \int_0^1 \int_0^1 K_d(x,y)\,dx\,dy = 1.$$

В [6] установлена оценка числа узлов кубатурной формулы (1), обладающей d-свойством:

$$N \geqslant 2^d - \lambda(d), \tag{2}$$

где

$$\lambda(d) = \begin{cases} 2^{\frac{d}{2}+1} - 2 & \text{при } d = 2k, \\ 3 \cdot 2^{\frac{d-1}{2}} - 2 & \text{при } d = 2k+1, \end{cases} \tag{3}$$

$k = 1, 2, \ldots$

Лемма 4. *Пусть кубатурная формула (1) удовлетворяет следующим условиям:*

1) число узлов этой формулы $N(d) = 2^d - \lambda(d)$*;*

2) числа $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(2)}, \ldots,$ $x^{(\lambda(d))}$, $y^{(\lambda(d))}$ *кратны* 2^{-d} *и отличны от 0 и 1, а* $x^{(\lambda(d)+1)}$, $y^{(\lambda(d)+1)}$, $x^{(\lambda(d)+2)}$, $y^{(\lambda(d)+2)}, \ldots,$ $x^{(2^d-\lambda(d))}$, $y^{(2^d-\lambda(d))}$ *кратны* 2^{-d-1}*, но не кратны* 2^{-d}*, коэффициенты формулы* $C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(\lambda(d))} = 2^{-d+1}$, $C^{(\lambda(d)+1)} = C^{(\lambda(d)+2)} = \ldots = C^{(2^d-\lambda(d))} = 2^{-d}$*;*

3) носитель каждого к-монома степени d содержит ровно один узел формулы;

4) для любого к-монома K_d *степени d, такого, что* $(x^{(i)}, y^{(i)}) \in \operatorname{supp}(K_d)$*,*

$$K_d(x^{(i)}, y^{(i)}) = \begin{cases} 2^d & \text{при } i = 1, \ldots, \lambda(d), \\ 2^{d-1} & \text{при } i = \lambda(d)+1, \ldots, 2^d - \lambda(d); \end{cases}$$

5) $x^{(2^d-\lambda(d))} = y^{(2^d-\lambda(d)-1)} = 1 - 2^{-d-1}$*,*
где $\operatorname{supp}(K_d)$ *— носитель функции* K_d*, а параметр* $\lambda(d)$ *определяется формулой (3).*

Указанная формула является минимальной кубатурной формулой, обладающей d-свойством.

Доказательство. В силу леммы 3 и следствия 2 формула (1), удовлетворяющая условиям 1–5, точна для всех κ-мономов степени d. Согласно следствию 1, она обладает d-свойством. Тогда в соответствии с неравенством (2) эта кубатурная формула является минимальной формулой, обладающей d-свойством.

Лемма доказана. □

Рассмотрим примеры кубатурных формул, которые удовлетворяют условиям леммы 4 для $d = 5,\ d = 6,\ d = 7$ и, следовательно, являются минимальными формулами, обладающими d-свойством для соответствующих значений d. Узлы каждой из этих формул удобно представить в виде

$$(x^{(i)}, y^{(i)}) = (a^{(i)} \cdot 2^{-d-1}, b^{(i)} \cdot 2^{-d-1}).$$

Ниже приведены значения коэффициентов при узлах и таблицы значений параметров $a^{(i)}, b^{(i)}$ для указанных кубатурных формул.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $(x^{(i)}, y^{(i)})$ *— узлы кубатурной формулы (1), удовлетворяющей условиям 1–5 леммы 4* $(i = 1, 2, \ldots, 2^d - \lambda(d))$*, то кубатурная формула*

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)} \Big(C_1^{(i)} f(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) + C_3^{(i)} f(x_3^{(i)}, y_3^{(i)}) \Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\lambda(d)} \Big(C_{-2}^{(i)} f(x_{-2}^{(i)}, y_{-2}^{(i)}) + C_{-4}^{(i)} f(x_{-4}^{(i)}, y_{-4}^{(i)}) \Big) + \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)-2} \Big(C_2^{(i)} f(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) + C_4^{(i)} f(x_4^{(i)}, y_4^{(i)}) \Big) +$$

$$+ C_2^{(2^d-\lambda(d)-1)} f(x_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}) + C_4^{(2^d-\lambda(d))} f(x_4^{(2^d-\lambda(d))}, y_4^{(2^d-\lambda(d))}) \tag{4}$$

Пример 1

$d = 5 : C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(10)} = 2^{-4},\ C^{(11)} = C^{(12)} = \ldots = C^{(22)} = 2^{-5}.$

i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$
1	2	32	2	8	8	3	16	44	4	20	16	5	24	56
6	32	64	7	40	40	8	48	12	9	52	48	10	56	24
11	5	63	12	63	5	13	11	51	14	13	21	15	27	27
16	29	37	17	35	53	18	37	29	19	43	19	20	45	61
21	59	35	22	61	59									

Пример 2

$d = 6 : C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(14)} = 2^{-5},\ C^{(15)} = C^{(16)} = \ldots = C^{(50)} = 2^{-6}.$

i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$
1	6	64	2	12	32	3	16	88	4	32	116	5	40	16
6	48	56	7	56	80	8	64	6	9	72	48	10	80	72
11	88	112	12	96	12	13	112	40	14	116	96	15	9	109
16	19	9	17	21	43	18	23	99	19	25	51	20	27	75
21	29	23	22	35	37	23	37	93	24	43	107	25	45	69
26	51	103	27	53	27	28	59	45	29	61	123	30	67	121
31	69	83	32	75	101	33	77	25	34	83	59	35	85	21
36	91	35	37	93	91	38	99	105	39	101	53	40	103	77
41	105	29	42	107	85	43	109	119	44	119	19	45	121	61
46	123	67	47	1	3	48	125	1	49	3	127	50	127	125

Пример 3

$d = 7 : C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(22)} = 2^{-6},\ C^{(23)} = C^{(24)} = \ldots = C^{(106)} = 2^{-7}.$

i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	i	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$
1	4	64	2	10	128	3	16	16	4	32	88	5	40	32
6	48	112	7	64	4	8	80	80	9	96	24	10	104	96
11	112	48	12	128	10	13	144	208	14	152	160	15	160	232
16	176	176	17	192	252	18	208	144	19	216	224	20	224	168
21	240	240	22	252	192	23	7	195	24	13	237	25	19	243
26	21	153	27	23	103	28	25	213	29	27	43	30	29	165
31	35	171	32	37	221	33	43	227	34	45	141	35	51	147
36	53	201	37	55	55	38	57	181	39	59	75	40	61	249
41	69	149	42	71	107	43	73	107	44	75	59	45	77	173
46	83	179	47	85	217	48	87	39	49	89	133	50	91	123
51	93	229	52	99	235	53	101	157	54	107	163	55	109	205
56	115	211	57	117	185	58	119	71	59	121	137	60	123	119
61	125	245	62	131	247	63	133	117	64	135	139	65	137	69
66	139	187	67	141	45	68	147	51	69	149	93	70	155	99
71	157	21	72	163	27	73	165	121	74	167	135	75	169	37
76	171	219	77	173	77	78	179	83	79	181	57	80	183	199
81	185	105	82	187	151	83	195	7	84	197	73	85	199	183
86	201	53	87	203	203	88	205	109	89	211	115	90	213	29
91	219	35	92	221	85	93	227	91	94	229	41	95	231	215
96	233	101	97	235	155	98	237	13	99	243	19	100	245	125
101	247	131	102	249	61	103	1	189	104	189	1	105	67	255
106	255	67												

с узлами

$$(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(i)}, \frac{1}{2}y^{(i)}\right),\ i = 1, \ldots, \lambda(d),$$

$$(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(i)} + \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}y^{(i)} + \frac{1}{2^{d+3}}\right),\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2, \quad (5)$$

$$(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d)-1)}, \frac{1}{2}\right),\ (x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d))}\right);$$

$$(x_{\pm 2}^{(i)}, y_{\pm 2}^{(i)}) = \left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)} \pm \frac{3}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}y^{(i)} \pm \frac{3}{2^{d+3}}\right),\ i = 1, \ldots, \lambda(d),$$

$$(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) = \left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)} - \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}y^{(i)} - \frac{1}{2^{d+3}}\right),\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 1; \quad (6)$$

$$(x_3^{(i)}, y_3^{(i)}) = \left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)}, 1 - \frac{1}{2}y^{(i)}\right),\ i = 1, \ldots, \lambda(d),$$

$$(x_3^{(i)}, y_3^{(i)}) = \left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)} + \frac{1}{2^{d+3}}, 1 - \frac{1}{2}y^{(i)} + \frac{1}{2^{d+3}}\right),\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d); \quad (7)$$

$$(x_{\pm 4}^{(i)}, y_{\pm 4}^{(i)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(i)} \pm \frac{3}{2^{d+3}}, 1 - \frac{1}{2}y^{(i)} \pm \frac{3}{2^{d+3}}\right),\ i = 1, \ldots, \lambda(d),$$

$$(x_4^{(i)}, y_4^{(i)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(i)} - \frac{1}{2^{d+3}}, 1 - \frac{1}{2}y^{(i)} - \frac{1}{2^{d+3}}\right),\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2,$$

$$i = 2^d - \lambda(d) \quad (8)$$

и коэффициентами

$$\begin{aligned}
&C_1^{(2^d-\lambda(d)-1)} = C_1^{(2^d-\lambda(d))} = C_1^{(i)} = C_3^{(i)} = 2^{-d-1},\ i = 1, \ldots, \lambda(d),\\
&C_1^{(i)} = 2^{-d-2},\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2,\\
&C_{-2}^{(i)} = C_{-4}^{(i)} = 2^{-d-2},\ i = 1, 2, \ldots, \lambda(d),\\
&C_2^{(i)} = 2^{-d-2},\ i = 1, 2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 1,\\
&C_3^{(i)} = 2^{-d-2},\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d),\\
&C_4^{(i)} = 2^{-d-2},\ i = 1, 2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2,\ i = 2^d - \lambda(d)
\end{aligned}$$

является минимальной формулой, обладающей $(d+2)$*-свойством.*

Доказательство. Согласно лемме 4 для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что кубатурная формула (4) удовлетворяет следующим условиям:

$1'$) для числа узлов формулы имеет место равенство

$$N(d+2) = 2^{d+2} - \lambda(d+2); \quad (9)$$

$2'$) абсциссы и ординаты $\lambda(d+2)$ узлов формулы кратны 2^{-d-2} и отличны от 0 и 1, коэффициенты формулы при указанных узлах равны 2^{-d-1}, обе координаты каждого из остальных $2^{d+2}-2\lambda(d+2)$ узлов кратны 2^{-d-3}, но не кратны 2^{-d-2}, коэффициенты при этих узлах равны 2^{-d-2};

$3'$) носитель каждого κ-монома степени $d+2$ содержит ровно один узел формулы;

$4'$) все κ-мономы степени $d+2$, носители которых содержат произвольный узел формулы, принимают в этом узле значения, равные 2^{d+2}, если абсцисса и ордината узла кратны 2^{-d-2}, и 2^{d+1}, если обе координаты кратны 2^{-d-3}, но не кратны 2^{-d-2};

$5'$) найдутся два узла формулы такие, что абсцисса одного из них и ордината другого равны $1-2^{-d-3}$.

Докажем, что кубатурная формула (4) удовлетворяет условию $1'$. Для числа узлов формулы (4) справедливо равенство

$$N(d+2)=2^{d+2}-2\lambda(d)-2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\lambda(d+2)=2\lambda(d)+2. \tag{10}$$

Отсюда следует равенство (9).

Установим, что формула (4) удовлетворяет условию $2'$. Из соотношений (5), (7) и условия 2 леммы 4 следует, что абсциссы и ординаты узлов $(x_1^{(1)},y_1^{(1)})$, $(x_1^{(2)},y_1^{(2)}),\dots$, $(x_1^{(\lambda(d))},y_1^{(\lambda(d))})$, $(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)},y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)})$, $(x_1^{(2^d-\lambda(d))},y_1^{(2^d-\lambda(d))})$, $(x_3^{(1)},y_3^{(1)})$, $(x_3^{(2)},y_3^{(2)}),\dots$, $(x_3^{(\lambda(d))},y_3^{(\lambda(d))})$ кратны 2^{-d-2} и отличны от 0 и 1. Согласно условию теоремы, коэффициенты формулы (4) при указанных узлах равны 2^{-d-1}. В силу равенства (10) общее число таких узлов $\lambda(d+2)$. Кроме того, из соотношений (5)–(8) следует, что обе координаты каждого из остальных $2^{d+2}-2\lambda(d+2)$ узлов формулы (4) кратны 2^{-d-3}, но не кратны 2^{-d-2}. По условию теоремы коэффициенты формулы при этих узлах равны 2^{-d-2}.

Докажем теперь, что кубатурная формула (4) удовлетворяет условиям $3'$ и $4'$.

Рассмотрим множество носителей всех κ-мономов степени d

$$E_d=\left\{\left[\frac{i-1}{2^m},\frac{i}{2^m}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right]:m+n=d,\ m,n=0,1,\dots,\ i=1,2,\dots,2^m,\ j=1,2,\dots,2^n\right\}.$$

Определим множества $E_{d+2}^{(k)}$, $k=1,2,\dots,6$, следующим образом:

$$E_{d+2}^{(1)}=\left\{\left[\frac{i-1}{2^{m+1}},\frac{i}{2^{m+1}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{j-1}{2^{n+1}},\frac{j}{2^{n+1}}\right]:m+n=d,\ m,n=0,1,2,\dots,\ i=1,2,\dots,2^m,\ j=1,2,\dots,2^n\right\},$$

$$E_{d+2}^{(2)}=\left\{\left[1-\frac{i}{2^{m+1}},1-\frac{i-1}{2^{m+1}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{j-1}{2^{n+1}},\frac{j}{2^{n+1}}\right]:m+n=d,\ m,n=0,1,2,\dots,\ i=1,2,\dots,2^m,\ j=1,2,\dots,2^n\right\},$$

$$E_{d+2}^{(3)}=\left\{\left[1-\frac{i}{2^{m+1}},1-\frac{i-1}{2^{m+1}}\right]\times\right.$$

$$\times \left[1-\frac{j}{2^{n+1}}, 1-\frac{j-1}{2^{n+1}}\right] : m+n=d,\ m,n=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,2^m,\ j=1,2,\ldots,2^n\Big\},$$

$$E_{d+2}^{(4)} = \left\{\left[\frac{i-1}{2^{m+1}}, \frac{i}{2^{m+1}}\right]\times\right.$$

$$\times \left[1-\frac{j}{2^{n+1}}, 1-\frac{j-1}{2^{n+1}}\right] : m+n=d,\ m,n=0,1,2,\ldots,\ i=1,2,\ldots,2^m,\ j=1,2,\ldots,2^n\Big\},$$

$$E_{d+2}^{(5)} = \left\{[0,1]\times\left[\frac{i-1}{2^{d+2}}, \frac{i}{2^{d+2}}\right] : i=1,2,\ldots,2^{d+2}\right\},$$

$$E_{d+2}^{(6)} = \left\{\left[\frac{i-1}{2^{d+2}}, \frac{i}{2^{d+2}}\right]\times[0,1] : i=1,2,\ldots,2^{d+2}\right\}.$$

Имеет место равенство

$$E_{d+2} = \bigcup_{k=1}^{6} E_{d+2}^{(k)}.$$

Следовательно, для доказательства $3'$ и $4'$ достаточно установить, что условие $3'$ выполняется для прямоугольников каждого из множеств $E_{d+2}^{(1)}, E_{d+2}^{(2)}, \ldots, E_{d+2}^{(6)}$, а условие $4'$ — для κ-мономов, носителями которых являются эти прямоугольники.

Покажем, что условиям $3'$ и $4'$ удовлетворяют элементы множества $E_{d+2}^{(1)}$ и κ-мономы с носителями из $E_{d+2}^{(1)}$. Очевидно, что прямоугольникам этого множества принадлежат только узлы $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}), (x_1^{(2)}, y_1^{(2)}), \ldots, (x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))})$ формулы (4).

Уменьшив вдвое обе координаты каждого узла формулы (1), удовлетворяющей условиям 1–5 леммы 4, получим множество

$$Z_1 = \left\{\left(\frac{1}{2}x^{(i)}, \frac{1}{2}y^{(i)}\right) : i=1,\ldots,2^d-\lambda(d)\right\}.$$

Прямоугольники множества $E_{d+2}^{(1)}$ можно получить из прямоугольников множества E_d также уменьшением обеих координат их точек в два раза. Тогда из условия 3 леммы 4 следует, что каждый прямоугольник из $E_{d+2}^{(1)}$ содержит ровно одну точку множества Z_1. В соответствии с условием 4 леммы 4 каждый из узлов $(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \ldots, (x^{(\lambda(d))}, y^{(\lambda(d))})$ формулы (1) есть граничная точка всех содержащих его прямоугольников множества E_d, отличная от их вершин. Следовательно, каждая точка множества Z_1 также лежит на границе всех содержащих ее прямоугольников из E_{d+2} и отлична от их вершин, поэтому при условии

$$(x,y) \in Z_1 \bigcap \operatorname{supp}(K_{d+2})$$

имеет место равенство

$$K_{d+2}(x,y) = 2^{d+1},\ i=1,2,\ldots,\lambda(d),$$

где K_{d+2} — κ-моном степени $d+2$. В силу (5) узлы $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)}), (x_1^{(2)}, y_1^{(2)}), \ldots, (x_1^{(\lambda(d))}, y_1^{(\lambda(d))})$ формулы (4) принадлежат множеству Z_1. Значит, указанные узлы и κ-мономы, носители которых являются элементами множества $E_{d+2}^{(1)}$, действительно удовлетворяют условиям $3'$ и $4'$.

Каждый из узлов $(x^{(\lambda(d)+1)}, y^{(\lambda(d)+1)}), (x^{(\lambda(d)+2)}, y^{(\lambda(d)+2)}), \ldots, (x^{(2^d-\lambda(d))}, y^{(2^d-\lambda(d))})$ формулы (1) отстоит от границ прямоугольников множества E_d, внутри которых он находится, на расстоянии не меньше 2^{-d-1}. Следовательно, каждая из тех точек множества Z_1, которые могут быть получены из указанных узлов уменьшением их абсцисс и ординат в два раза, отстоит от границ содержащих ее прямоугольников множества $E_{d+2}^{(1)}$ на расстоянии не меньше 2^{-d-2}. Узлы $(x_1^{(\lambda(d)+1)}, y_1^{(\lambda(d)+1)}), (x_1^{(\lambda(d)+2)}, y_1^{(\lambda(d)+2)}), \dots, (x_1^{(2^d-\lambda(d)-2)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-2)})$ формулы (4) получаются из указанных выше точек множества Z_1 сдвигом на $+2^{-d-3}$ по обеим координатам, узел $(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)})$ может быть получен сдвигом точки $\left(\frac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d)-1)}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{d+2}}\right)$ множества Z_1 на $+2^{-d-2}$ по второй координате, а узел $(x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))})$ — сдвигом точки $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{d+2}}, \frac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d)-1)}\right)$ множества Z_1 на $+2^{-d-2}$ по первой координате. Следовательно, каждый из узлов $(x_1^{(\lambda(d)+1)}, y_1^{(\lambda(d)+1)})$, $(x_1^{(\lambda(d)+2)}, y_1^{(\lambda(d)+2)})$, $\dots, (x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))})$ формулы (4) содержится в тех же прямоугольниках из $E_{d+2}^{(1)}$, что и точка множества Z_1, из которой узел получен с помощью указанных преобразований. Таким образом, носители κ-мономов степени $d+2$, являющиеся элементами множества $E_{d+2}^{(1)}$, действительно удовлетворяют условию $3'$.

В соответствии с условием 2 леммы 4 узлы $(x^{(\lambda(d)+1)}, y^{(\lambda(d)+1)}), (x^{(\lambda(d)+2)}, y^{(\lambda(d)+2)}), \dots,$ $(x^{(2^d-\lambda(d))}, y^{(2^d-\lambda(d))})$ формулы (1) являются внутренними точками всех содержащих их прямоугольников множества E_d. Поэтому узлы $(x_1^{(\lambda(d)+1)}, y_1^{(\lambda(d)+1)}), (x_1^{(\lambda(d)+2)}, y_1^{(\lambda(d)+2)}), \dots,$ $(x_1^{(2^d-\lambda(d)-2)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-2)})$ формулы (4) есть внутренние точки всех прямоугольников множества $E_{d+2}^{(1)}$, которым они принадлежат. Следовательно, для каждого κ-монома $K_{d+2}(x,y)$ степени $d+2$ с носителем, содержащим любой из этих узлов $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)})$, справедливо равенство

$$K_{d+2}(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) = 2^{d+2},\ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \dots, 2^d - \lambda(d) - 2.$$

В любой точке множества

$$\left\{\left(\frac{i}{2^{d+2}}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2^{d+2}}\right) : i = 1, \dots, 2^{d+2}-1\right\}$$

все κ-мономы степени $d+2$ с носителями, содержащими эту точку, принимают значения, равные 2^{d+1}, так что

$$K_{d+2}(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}) = K_{d+2}(x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))}) = 2^{d+1}.$$

Таким образом, κ-мономы степени $d+2$, носители которых являются прямоугольниками множества $E_{d+2}^{(1)}$, действительно удовлетворяют условию $4'$.

Докажем теперь, что условиям $3'$ и $4'$ удовлетворяют элементы множества $E_{d+2}^{(2)}$ и κ-мономы с носителями из $E_{d+2}^{(2)}$. Заметим, что прямоугольникам этого множества принадлежат только узлы $(x_{\pm 2}^{(1)}, y_{\pm 2}^{(1)}), (x_{\pm 2}^{(2)}, y_{\pm 2}^{(2)}), \dots, (x_{\pm 2}^{(\lambda(d))}, y_{\pm 2}^{(\lambda(d))}), (x_2^{(\lambda(d)+1)}, y_2^{(\lambda(d)+1)}), \dots,$ $(x_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_2^{(2^d-\lambda(d)-1)})$, $(x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))})$ формулы (4).

Рассмотрим множество

$$Z_2 = \left\{\left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)}, \frac{1}{2}y^{(i)}\right) : i = 1, \dots, 2^d - \lambda(d)\right\}.$$

Каждая точка $\left(1 - \frac{1}{2}x^{(i)}, \frac{1}{2}y^{(i)}\right)$ этого множества симметрична относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ точке $\left(\frac{1}{2}x^{(i)}, \frac{1}{2}y^{(i)}\right)$ множества Z_1 $(i = 1, 2, \dots, 2^d - \lambda(d))$, а каждый прямоугольник

$\left[1-\frac{i}{2^{m+1}}, 1-\frac{i-1}{2^{m+1}}\right] \times \left[\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}\right]$ множества $E^{(2)}_{d+2}$ — симметричен прямоугольнику $\left[\frac{i-1}{2^{m+1}}, \frac{i}{2^{m+1}}\right] \times \left[\frac{j-1}{2^{n+1}}, \frac{j}{2^{n+1}}\right]$ множества $E^{(1)}_{d+2}$ относительно той же прямой. Тогда в соответствии с результатами, установленными для множеств $E^{(1)}_{d+2}$ и Z_1, каждый прямоугольник из $E^{(2)}_{d+2}$ содержит ровно одну точку множества Z_2, каждая из точек

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d)+1)}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d)+1)}\right), \left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d)+2)}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d)+2)}\right), \ldots, \left(1-\frac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d))}\right)$$

отстоит от границ содержащих ее прямоугольников множества $E^{(2)}_{d+2}$ на расстоянии, не меньшем 2^{-d-2}, а точки

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(1)}, \frac{1}{2}y^{(1)}\right), \left(1-\frac{1}{2}x^{(2)}, \frac{1}{2}y^{(2)}\right), \ldots, \left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d))}\right)$$

лежат на границах прямоугольников множества $E^{(2)}_{d+2}$ и отличны от их вершин.

Заметим, что узлы $(x_2^{(\lambda(d)+1)}, y_2^{(\lambda(d)+1)}), (x_2^{(\lambda(d)+2)}, y_2^{(\lambda(d)+2)}), \ldots, (x_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_2^{(2^d-\lambda(d)-1)})$ формулы (4) могут быть получены сдвигом точек

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d)+1)}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d)+1)}\right), \left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d)+2)}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d)+2)}\right), \ldots, \left(1-\frac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d))}\right)$$

на -2^{-d-3} по обеим координатам, узлы $(x_{-2}^{(1)}, y_{-2}^{(1)}), (x_{-2}^{(2)}, y_{-2}^{(2)}), \ldots, (x_2^{(\lambda(d))}, y_2^{(\lambda(d))})$ — сдвигом точек

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(1)}, \frac{1}{2}y^{(1)}\right), \left(1-\frac{1}{2}x^{(2)}, \frac{1}{2}y^{(2)}\right), \ldots, \left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d))}\right)$$

на $-3\cdot 2^{-d-3}$ по обеим координатам, а узлы $(x_2^{(1)}, y_2^{(1)}), (x_2^{(2)}, y_2^{(2)}), \ldots, (x_2^{(\lambda(d))}, y_2^{(\lambda(d))})$ — сдвигом точек

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(1)}, \frac{1}{2}y^{(1)}\right), \left(1-\frac{1}{2}x^{(2)}, \frac{1}{2}y^{(2)}\right), \ldots, \left(1-\frac{1}{2}x^{(\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(\lambda(d))}\right)$$

на $+3\cdot 2^{-d-3}$ по обеим координатам. Так как расстояние между граничными точками каждого из прямоугольников множества $E^{(2)}_{d+2}$ не меньше, чем 2^{-d-1}, то каждый из указанных узлов является внутренней точкой всех содержащих его прямоугольников этого множества. Тогда при условии $(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) \in \mathrm{supp}(K_{d+2})$ имеет место равенство

$$K_{d+2}(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) = 2^{d+2},\ i = 1, 2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 1.$$

Мы установили, что каждый прямоугольник из $E^{(2)}_{d+2}$ содержит ровно одну точку множества Z_2, а следовательно, ровно один узел множества

$$\left\{(x_2^{(1)}, y_2^{(1)}), (x_2^{(2)}, y_2^{(2)}), \ldots, (x_2^{(2^d-\lambda(d))}, y_2^{(2^d-\lambda(d))})\right\}.$$

Заметим также, что узел $(x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))})$ можно получить в результате сдвига точки

$$\left(1-\frac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d))}, \frac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d))}\right)$$

множества Z_2 на -2^{-d-2} по первой координате, так что и он принадлежит тем же прямоугольникам множества $E^{(2)}_{d+2}$, что и точка $\left(1-\dfrac{1}{2}x^{(2^d-\lambda(d))}, \dfrac{1}{2}y^{(2^d-\lambda(d))}\right)$. Значит, он является единственным узлом в содержащих его прямоугольниках этого множества.

Итак, κ-мономы степени $d+2$, носители которых являются элементами множества $E^{(2)}_{d+2}$, действительно удовлетворяют условию $4'$, а сами носители из этого множества — условию $3'$.

Аналогично доказывается, что указанные условия выполняются для κ-мономов с носителями, принадлежащими множествам $E^{(3)}_{d+2}$, $E^{(4)}_{d+2}$, и для самих носителей из этих множеств.

Очевидно, что κ-мономы, носителями которых являются прямоугольники множеств $E^{(5)}_{d+2}$ и $E^{(6)}_{d+2}$, удовлетворяют условию $4'$. Докажем, что для самих прямоугольников из этих множеств выполняется условие $3'$.

Пусть

$$E^{(5)}_{d+2,1} = \left\{[0,1]\times\left[\frac{i-1}{2^{d+2}}, \frac{i}{2^{d+2}}\right] : i=1,\ldots,2^{d+1}\right\}$$

и

$$E^{(5)}_{d+2,2} = \left\{[0,1]\times\left[\frac{i-1}{2^{d+2}}, \frac{i}{2^{d+2}}\right] : i=2^{d+1}+1,\ldots,2^{d+2}\right\}.$$

Очевидно, что

$$E^{(5)}_{d+2} = E^{(5)}_{d+2,1}\bigcup E^{(5)}_{d+2,2}.$$

Докажем, что для прямоугольников множества $E^{(5)}_{d+2,1}$ имеет место условие $3'$. Рассмотрим прямоугольники

$$D_1 = [0,1]\times\left[\frac{k-1}{2^{d+1}}, \frac{2k-1}{2^{d+2}}\right],\ D_2 = [0,1]\times\left[\frac{2k-1}{2^{d+2}}, \frac{k}{2^{d+1}}\right]\ (k=1,2,\ldots,2^d),$$

являющиеся элементами множества $E^{(5)}_{d+2,1}$. Заметим, что

$$D_1\bigcup D_2 = D_1'\bigcup D_2', \tag{11}$$

где

$$D_1' = \left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{k-1}{2^{d+1}}, \frac{k}{2^{d+1}}\right],\ D_2' = \left[\frac{1}{2},1\right]\times\left[\frac{k-1}{2^{d+1}}, \frac{k}{2^{d+1}}\right], D_1'\in E^{(1)}_{d+2},\ D_2'\in E^{(2)}_{d+2}.$$

По доказанному прямоугольники D_1' и D_2' содержат ровно по одному узлу. В этой связи рассмотрим следующие четыре случая.

1. Прямоугольник D_1' содержит узел

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) = \left(\frac{1}{2}x^{(M)}, \frac{1}{2}y^{(M)}\right),\ 1\leqslant M\leqslant\lambda(d),$$

формулы (4). Согласно условию 2 леммы 4,

$$(x^{(M)}, y^{(M)}) = \left(\frac{i_M}{2^d}, \frac{j_M}{2^d}\right),$$

причем $x^{(M)},\ y^{(M)}$ отличны от 0 и 1, а так как $(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) \in D_1'$, то $1 \leqslant i_M \leqslant 2^d - 1$, $j_M \in \{k-1, k\}$.

Если $j_M = k-1$, то, согласно (6), прямоугольник D_2' содержит узел

$$(x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) = \left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^{(M)} + 3\cdot 2^{-d-3}, \frac{1}{2}\cdot y^{(M)} + 3\cdot 2^{-d-3}\right).$$

Тогда имеем

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) \in D_1,\ (x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) \in D_2,\ (x_1^{(M)}, y_1^{(M)}), (x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) \notin D_1 \bigcap D_2. \qquad (12)$$

Если $j_M = k$, то в силу соотношений (6) прямоугольнику D_2' принадлежит узел

$$(x_{-2}^{(M)}, y_{-2}^{(M)}) = \left(1 - \frac{1}{2}x^{(M)} - 3\cdot 2^{-d-3}, \frac{1}{2}\cdot y^{(M)} - 3\cdot 2^{-d-3}\right).$$

В этом случае

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) \in D_2,\ (x_{-2}^{(M)}, y_{-2}^{(M)}) \in D_1,\ (x_1^{(M)}, y_1^{(M)}), (x_{-2}^{(M)}, y_{-2}^{(M)}) \notin D_1 \bigcap D_2. \qquad (13)$$

Так как прямоугольники $D_1',\ D_2'$ содержат ровно по одному узлу, то в силу (11)–(13) каждый из прямоугольников $D_1,\ D_2$ также содержит ровно один узел.

2. Прямоугольник D_1' содержит узел

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) = \left(\frac{1}{2}\cdot x^{(M)} + \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}\cdot y^{(M)} + \frac{1}{2^{d+3}}\right),\ \lambda(d) + 1 \leqslant M \leqslant 2^d - \lambda(d) - 2,$$

формулы (4). Согласно условию 2 леммы 4,

$$(x^{(M)}, y^{(M)}) = \left(\frac{2i_M - 1}{2^{d+1}}, \frac{2j_M - 1}{2^{d+1}}\right),$$

а так как $(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) \in D_1'$, то $1 \leqslant i_M \leqslant 2^d,\ j_M = k$. В соответствии с соотношениями (6)

$$(x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) = \left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^{(M)} - \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}\cdot y^{(M)} - \frac{1}{2^{d+3}}\right) \in D_2'.$$

Следовательно,

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}) \in D_2,\ (x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) \in D_1,\ (x_1^{(M)}, y_1^{(M)}), (x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) \notin D_1 \bigcap D_2. \qquad (14)$$

Так как каждый из прямоугольников $D_1',\ D_2'$ содержит ровно один узел, в силу (11), (14) прямоугольники $D_1,\ D_2$ также содержат ровно по одному узлу.

3. Прямоугольник D_1' содержит узел

$$(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}) = \left(\frac{1}{2}\cdot x^{(2^d-\lambda(d)-1)}, \frac{1}{2}\right)$$

формулы (4), вследствие чего $k = 2^d$. Тогда этот узел принадлежит и прямоугольнику D_2. В силу (6) D_2' содержит узел

$$\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^{(2^d-\lambda(d)-1)} - \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2}\cdot y^{(2^d-\lambda(d)-1)} - \frac{1}{2^{d+3}}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \cdot x^{(2^d - \lambda(d) - 1)} - \frac{1}{2^{d+3}}, \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2^{d+3}}\right),$$

который принадлежит также прямоугольнику D_1. Так как

$$(x_1^{(M)}, y_1^{(M)}), (x_2^{(M)}, y_2^{(M)}) \notin D_1 \bigcap D_2$$

и прямоугольники D_1', D_2' содержат ровно по одному узлу, в силу (11) каждый из прямоугольников D_1, D_2 также содержит ровно один узел.

4. Прямоугольник D_1' содержит узел

$$(x_1^{(2^d - \lambda(d))}, y_1^{(2^d - \lambda(d))}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot y^{(2^d - \lambda(d))}\right)$$

формулы (4). В то же время этот узел принадлежит прямоугольнику D_2'. Согласно условию 2 леммы 4,

$$y^{(2^d - \lambda(d))} = \frac{2m - 1}{2^{d+1}}.$$

Следовательно,

$$y_1^{(2^d - \lambda(d))} = \frac{2m - 1}{2^{d+2}},$$

причем $m = k$. Тогда

$$(x_1^{(2^d - \lambda(d))}, y_1^{(2^d - \lambda(d))}) \in D_1 \bigcap D_2. \tag{15}$$

Так как $(x_1^{(2^d - \lambda(d))}, y_1^{(2^d - \lambda(d))})$ — единственный узел, принадлежащий $D_1' \bigcup D_2'$, в силу (11) и (15) прямоугольники D_1, D_2 содержат ровно по одному узлу.

Аналогично доказывается, что условие $3'$ выполняется для прямоугольников множеств $E_{d+2,2}^{(5)}$ и $E_{d+2}^{(6)}$.

Покажем, что формула (4) удовлетворяет условию $5'$. Докажем существование узла указанной формулы, абсцисса которого равна $1 - 2^{-d-3}$.

Согласно условию $3'$, прямоугольник $\left[1 - 2^{-d-2}, 1\right] \times [0, 1]$ содержит ровно один узел. Обозначим его через (x, y). Из соотношений (5)—(8) и условия $2'$ следует, что $y \neq 0$, $y \neq 1$, а x совпадает с одним из чисел: либо $1 - 2^{-d-2}$, либо $1 - 2^{-d-3}$. Предположим, что $x = 1 - 2^{-d-2}$. Тогда узел (x, y) лежит на границе всех прямоугольников множества E_{d+2}, которым он принадлежит. Следовательно, $y = \dfrac{1}{2}$, так как в противном случае этот узел будет внутренней точкой одного из прямоугольников $\left(\left[1 - 2^{d-1}, 1\right] \times \left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right.$ или $\left.\left[1 - 2^{d-1}, 1\right] \times \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right)$, являющихся элементами множества E_{d+2}. Из условия 2 леммы 4 и соотношений (6), (7) вытекает, что ординату, равную $1/2$, имеет только один узел формулы (4) —

$$(x_1^{(2^d - \lambda(d) - 1)}, y_1^{(2^d - \lambda(d) - 1)}) = \left(\frac{1}{2} x^{(2^d - \lambda(d) - 1)}, \frac{1}{2}\right).$$

Очевидно, что его абсцисса $x_1^{(2^d - \lambda(d) - 1)} < 1/2$, а по предположению $x = 1 - 2^{-d-2}$. Полученное противоречие показывает, что $x = 1 - 2^{-d-3}$.

Существование узла формулы (4), ордината которого равна $1 - 2^{-d-3}$, доказывается аналогично. Теорема доказана. □

Теорема 1 позволяет из кубатурной формулы, приведенной в примере 2, поэтапно получить минимальные формулы, обладающие d-свойством для $d = 8,\ 10,\ 12, \ldots$, а из формулы, приведенной в примере 3, — минимальные формулы для $d = 9,\ 11,\ 13, \ldots$ Попытаемся вывести соотношения, с помощью которых можно было бы вычислить координаты узлов минимальной формулы для любого целого $d \geq 10$, минуя формулы, обладающие $d_0+2,\ d_0+4, \ldots, d-2$-свойством ($d_0 = 6,\ 7$). С этой целью формулы (5)–(8) запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}
x_k^{(i)} = \delta_{2,k} + \delta_{3,k} + \left(\delta_{1,k} + \delta_{4,k} - \frac{1}{2}\right) x^{(i)} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{d+3}}, \\
y_k^{(i)} = \delta_{3,k} + \delta_{4,k} + \left(\delta_{1,k} + \delta_{2,k} - \frac{1}{2}\right) y^{(i)} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{d+3}}, \\
i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2 \text{ при } k = 1, \\
i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 1 \text{ при } k = 2, \\
i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) \text{ при } k = 3, \\
i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, 2^d - \lambda(d) - 2,\ i = 2^d - \lambda(d) \text{ при } k = 4;
\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\left(x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)}\right) = \left(\frac{1}{2} x^{(2^d-\lambda(d)-1)}, \frac{1}{2}\right), \\
\left(x_1^{(2^d-\lambda(d))}, y_1^{(2^d-\lambda(d))}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} y^{(2^d-\lambda(d))}\right);
\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}
\left(x_k^{(i)}, y_k^{(i)}\right) = \left(\delta_{3,k} + \left(\delta_{1,k} - \frac{1}{2}\right) x^{(i)}, \delta_{3,k} + \left(\delta_{1,k} - \frac{1}{2}\right) y^{(i)}\right), \\
i = 1, 2, \ldots, \lambda(d),\ k = 1, 3;
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}
x_k^{(i)} = \delta_{-2,k} + \delta_{2,k} + \left(\delta_{-4,k} + \delta_{4,k} - \frac{1}{2}\right) x^{(i)} + \frac{3}{2^{d+3}} \mathrm{sgn} k, \\
y_k^{(i)} = \delta_{-4,k} + \delta_{4,k} + \left(\delta_{-2,k} + \delta_{2,k} - \frac{1}{2}\right) y^{(i)} + \frac{3}{2^{d+3}} \mathrm{sgn} k, \\
i = 1, 2, \ldots, \lambda(d),\ k = -2, 2, -4, 4.
\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера.

Будем рассматривать кубатурные формулы вида (1), удовлетворяющие условиям 1–5 леммы 4 и следующему условию: абсцисса узла номер $2^d - \lambda(d) - 3$ и ордината узла номер $2^d - \lambda(d) - 2$ равны 2^{-d-1}. Таковыми являются формулы, приведенные в примерах 2, 3. Координаты узлов указанных формул снабдим нижними индексами, равными 0, т. е. обозначим $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, N(d_0)$. Здесь $N(d_0)$ — число узлов рассматриваемых формул. Таким образом, $N(d_0) = 2^{d_0} - \lambda(d_0)$.

Для любого наперед заданного целого $d \geqslant 10$ несложно вывести соотношения для вычисления координат $x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)}$, $y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)}$ узлов минимальной кубатурной формулы, обладающей d-свойством ($d = d_0 + 2m,\ d_0 = 6,\ 7,\ m = 1, 2, \ldots$). Указанная кубатурная формула имеет следующий вид:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx\ dy \approx \sum_{i=1}^{N(d_0)} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m} C_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)} f(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)}, y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)}). \tag{20}$$

В соответствии с теоремой 1 число ее узлов $N(d) = 2^d - \lambda(d)$. Вопрос о варьировании нижних индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ рассмотрим позже.

С целью вывода указанных соотношений необходимо в определенных последовательностях комбинировать формулы (16)–(19), начиная с формул, в которых будут фигурировать $x_0^{(i)}$, $y_0^{(i)}$ вместо $x^{(i)}$, $y^{(i)}$.

В записи $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)},\ y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)})$ верхний индекс i означает номер узла $(x_0^{(i)}, y_0^{(i)})$ минимальной кубатурной формулы, обладающей d_0-свойством, из которого получен узел $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)},\ y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)})$, нижние индексы $k_1, k_2, \ldots, k_m$ — номера преобразований, последовательно применяемых к координатам $x_0^{(i)}$, $y_0^{(i)}$, при этом $k_l = 1$ соответствует преобразованию, заданному формулой (5), $k_l = \pm 2$ — формулой (6), $k_l = 3$ — (7), $k_l = \pm 4$ — (8).

При выводе искомых соотношений используется следующий принцип, вытекающий из теоремы 1: если при $i = 1, 2, \ldots, N(d_0) - 4,\ N(d_0) - 1, N(d_0)$ узел $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)}, y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)})$ мы получаем из некоторого узла $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)}, y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)})$ кубатурной формулы, обладающей d'-свойством ($d' = d_0 + 2l,\ l < m$), то в случае координат $x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)}$, $y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)}$, кратных $2^{-d'}$, значения $x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)}$, $y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)}$ определяются по формулам (18), (19), а в случае указанных координат, кратных $2^{-d'-1}$, но не кратных $2^{-d'}$, — по формулам (16). Из теоремы 1 также следует, что узел $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)}, y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)})$ с абсциссой $2^{-d'-1}$ получен из узла $(x_0^{(N(d_0)-3)},\ y_0^{(N(d_0)-3)})$ в результате применения преобразований с одной из последовательностей номеров: $3, 1,\ 4, 3, 1, \ldots\ 4, 4, ..., 4, 3, 1$, а узел $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)}, y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_l}^{(i)})$ с ординатой $2^{-d'-1}$ — из узла $(x_0^{(N(d_0))-2)},\ y_0^{(N(d_0)-2)})$, причем номера применяемых преобразований образуют одну из последовательностей: $3, 1,\ 2, 3, 1, \ldots\ 2, 2, ..., 2, 3, 1$. Отсюда получаем, что при $i = N(d_0) - 3, N(d_0) - 2$ отмеченный принцип комбинирования формул (16)–(19) с целью вывода соотношений для вычисления $x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)}$, $y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{l+1}}^{(i)}$ сохраняется со следующими изменениями: при $i = N(d_0) - 3$ $(i = N(d_0) - 2)$ в случае совпадения последовательности значений $k_1, \ldots, k_l$ с одной из комбинаций $3, 1,\ 4, 3, 1, \ldots\ 4, 4, ..., 4, 3, 1$ $(3, 1,\ 2, 3, 1, \ldots\ 2, 2, ..., 2, 3, 1)$ на последнем этапе используются формулы (17).

Из теоремы 1 следует, что коэффициенты при узлах минимальной кубатурной формулы (20), обладающей d-свойством ($d = d_0 + 2m$), определяются следущим образом. Если обе координаты узла $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)},\ y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)})$ кратны 2^{-d}, то коэффициент $C_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)}$ при данном узле равен 2^{-d+1}, а если каждая из этих координат кратна 2^{-d-1}, но не кратна 2^{-d}, то $C_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)} = 2^{-d}$.

Из приведенных выше рассуждений вытекает, что нижние индексы координат узлов $(x_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)},\ y_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}^{(i)})$ варьируются следующим образом. При $i = \lambda(d_0) + 1, \ldots, N(d_0) - 4$ каждый из индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ принимает значения $1, 2, 3, 4$. При $i = 1, 2, \ldots, \lambda(d_0)$ $k_1 = 1, \pm 2, 3, \pm 4$; если $k_1, k_2, \ldots, k_l = 1,\ 3$, то k_{l+1} тоже принимает значения $1, \pm 2, 3, \pm 4$, а если хотя бы один из индексов $k_1, k_2, \ldots, k_l$ — четное число, то $k_{l+1} = 1, 2, 3, 4$ $(l = 1, 2, \ldots, m - 1)$. При $i = N(d_0) - 1$ $k_1 = 1, 2, 3$, при $i = N(d_0)$ $k_1 = 1, 3, 4$; если $k_1 = 1$, то индексы $k_2, \ldots, k_m$ варьируются так же, как и $k_1, \ldots, k_m$ при $i = 1, 2, \ldots, \lambda(d_0)$, а если $k_1 \neq 1$, то как при $i = \lambda(d_0) + 1, \ldots, N(d_0) - 4$. Если при $i = N(d_0) - 3$ последовательность значений индексов $k_1, k_2, \ldots, k_l$ $(l < m)$ представляет собой один из упорядоченных наборов: $3, 1,\ 4, 3, 1, \ldots 4, 4, ..., 4, 3, 1$ (при $i = N(d_0) - 2$ $-\ 3, 1,\ 2, 3, 1, \ldots 2, 2, ..., 2, 3, 1$), то последовательность индексов $k_{l+1}, k_{l+2}, \ldots, k_m$ принимает те же комбинации, что и $k_2, \ldots, k_m$ при $i = N(d_0) - 1$ или $i = N(d_0)$ в случае $k_1 = 1$; если же в начале последовательности индексов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ отсутствуют комбинации $3, 1,\ 4, 3, 1,\ \ldots\ 4, 4, ..., 4, 3, 1$ в случае $i = N(d_0) - 3$

и $3,1,\ 2,3,1,\ \ldots\ 2,2,...,2,3,1$ в случае $i = N(d_0) - 2$, то нижние индексы вычисляемых координат узлов принимают значения $1,2,3,4$.

Таким образом, можно выделить следующие две группы соотношений для вычисления координат узлов минимальной кубатурной формулы, обладающей d-свойством ($d = d_0 + 2m$), и коэффициентов при узлах этой формулы.

I. $i = \lambda(d_0)+1, \lambda(d_0)+2, \ldots, N(d_0)-4$.

$$\begin{gathered}
x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m-1}\left[\left(\delta_{2,k_{m-l}} + \delta_{3,k_{m-l}} + \frac{(-1)^{k_{m-l}+1}}{2^{d_0+2(m-l)+1}}\right)\cdot \prod_{j=m+1-l}^{m}\left(\delta_{1,k_j} + \delta_{4,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+ x^{(i)}_0 \cdot \prod_{l=1}^{m}\left(\delta_{1,k_l} + \delta_{4,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \delta_{2,k_m} + \delta_{3,k_m} + \frac{(-1)^{k_m+1}}{2^{d_0+2m+1}}, \\
y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m-1}\left[\left(\delta_{3,k_{m-l}} + \delta_{4,k_{m-l}} + \frac{(-1)^{k_{m-l}+1}}{2^{d_0+2(m-l)+1}}\right)\cdot \prod_{j=m+1-l}^{m}\left(\delta_{1,k_j} + \delta_{2,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+ y^{(i)}_0 \cdot \prod_{l=1}^{m}\left(\delta_{1,k_l} + \delta_{2,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \delta_{3,k_m} + \delta_{4,k_m} + \frac{(-1)^{k_m+1}}{2^{d_0+2m+1}}, \\
C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} = 2^{-d_0-2m}.
\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1,2,3,4\}$.

II. $i = 1,2,\ldots,\lambda(d_0),\ i = N(d_0)-3, N(d_0)-2, N(d_0)-1, N(d_0)$.

$$\begin{gathered}
x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m-p-1}\left[\delta_{3,k_{m-l}} \cdot \prod_{j=m+1-l}^{m}\left(\delta_{1,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+ x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p} \cdot \prod_{l=p+1}^{m}\left(\delta_{1,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \delta_{3,k_m}, \\
y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_m} = \sum_{l=1}^{m-p-1}\left[\delta_{3,k_{m-l}} \cdot \prod_{j=m+1-l}^{m}\left(\delta_{1,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+ y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p} \cdot \prod_{l=p+1}^{m}\left(\delta_{1,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \delta_{3,k_m}, \\
C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} = 2^{-d_0-2m+1}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Здесь $k_{p+1}, \ldots, k_m \in \{1,3\}$.

Вопрос о варьировании нижних индексов координат узлов $(x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p}, y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p})$ и вычислении этих координат рассмотрим позже.

$$\begin{gathered}
x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_{m-1},k_m} = \\
= \delta_{-2,k_m} + \delta_{2,k_m} + \left(\delta_{-4,k_m} + \delta_{4,k_m} - \frac{1}{2}\right)\cdot x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_{m-1}} + \frac{3}{2^{d_0+2m+1}}\cdot \mathrm{sgn}k_m, \\
y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_{m-1},k_m} = \\
= \delta_{-4,k_m} + \delta_{4,k_m} + \left(\delta_{-2,k_m} + \delta_{2,k_m} - \frac{1}{2}\right)\cdot y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p,k_{p+1},\ldots,k_{m-1}} + \frac{3}{2^{d_0+2m+1}}\cdot \mathrm{sgn}k_m, \\
C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} = 2^{-d_0-2m}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $k_m = \pm 2, \pm 4$.

Можно выделить две ситуации, описывающие индексы, предшествующие k_m:

а) $m > p+1,\ k_{p+1}, \ldots, k_{m-1} \in \{1,3\}$;

б) $m = p + 1$.

Координаты узлов $(x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{m-1}}, y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{m-1}})$ находятся по формулам (22):

$$\begin{gathered}
x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n,k_{n+1},\dots,k_m} = x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n} \cdot \prod_{l=n+1}^{m} \left(\delta_{1,k_l} + \delta_{4,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \\
+ \sum_{l=1}^{m-n-1} \left[\left(\delta_{2,k_{m-l}} + \delta_{3,k_{m-l}} + \frac{(-1)^{k_{m-l}+1}}{2^{d_0+2(m-l)+1}}\right) \cdot \prod_{j=m+1-l}^{m} \left(\delta_{1,k_j} + \delta_{4,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+\delta_{2,k_m} + \delta_{3,k_m} + \frac{(-1)^{k_m+1}}{2^{d_0+2m+1}}, \\
y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n,k_{n+1},\dots,k_m} = y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n} \cdot \prod_{l=n+1}^{m} \left(\delta_{1,k_l} + \delta_{2,k_l} - \frac{1}{2}\right) + \\
+ \sum_{l=1}^{m-n-1} \left[\left(\delta_{3,k_{m-l}} + \delta_{4,k_{m-l}} + \frac{(-1)^{k_{m-l}+1}}{2^{d_0+2(m-l)+1}}\right) \cdot \prod_{j=m+1-l}^{m} \left(\delta_{1,k_j} + \delta_{2,k_j} - \frac{1}{2}\right)\right] + \\
+\delta_{3,k_m} + \delta_{4,k_m} + \frac{(-1)^{k_m+1}}{2^{d_0+2m+1}}, \\
C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\dots,k_m} = 2^{-d_0-2m}, \quad k_{n+1},\dots,k_m \in \{1,2,3,4\}\,, \;\; k_n = \pm 2, \pm 4.
\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь имеет смысл выделить следующие две ситуации, описывающие индексы, предшествующие k_n:

а) $n > p+1$, $k_{p+1},\dots,k_{n-1} \in \{1,3\}$;

б) $n = p + 1$.

Координаты узлов $(x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n}, y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p,k_{p+1},\dots,k_{n-1},k_n})$ находятся по формулам (23).

Поясним, как варьируются нижние индексы координат узлов $(x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p}, y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p})$ и как вычисляются эти координаты.

При $i = 1,2,\dots,\lambda(d_0)$ параметр $p = 0$, т. е. в качестве узла $(x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p}, y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_p})$ рассматривается узел $(x^{(i)}_0, y^{(i)}_0)$ (индекс k_0 везде считается равным 0).

При $i = N(d_0)-1, N(d_0)$ параметр $p = 1$, индекс $k_1 = 1$, а координаты рассматриваемых узлов вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}
x^{(N(d_0)-1)}_{0,1} = \frac{1}{2}x^{(N(d_0)-1)}_0, \;\; y^{(N(d_0)-1)}_{0,1} = \frac{1}{2}, \;\; C^{(N(d_0)-1)}_{0,1} = 2^{-d_0-1}, \\
x^{(N(d_0))}_{0,1} = \frac{1}{2}, \;\; y^{(N(d_0))}_{0,1} = \frac{1}{2}y^{(N(d_0))}_0, \;\; C^{(N(d_0))}_{0,1} = 2^{-d_0-1}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Если $k_1 = 2,3$ ($k_1 = 3,4$), то $x^{(N(d_0)-1)}_{0,k_1,\dots,k_m}, y^{(N(d_0)-1)}_{0,k_1,\dots,k_m}, C^{(N(d_0)-1)}_{0,k_1,k_2,\dots,k_m}$ $\left(x^{(N(d_0))}_{0,k_1,\dots,k_m},\; y^{(N(d_0))}_{0,k_1,\dots,k_m}, C^{(N(d_0))}_{0,k_1,k_2,\dots,k_m}\right)$ находятся по формулам (21).

При $i = N(d_0) - 3$ имеют место два случая:

1) $p = 2$, индексы $k_1 = 3$, $k_2 = 1$,

$$x^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1} = \frac{1}{2}, \quad y^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}y^{(N(d_0)-3)}_0 + \frac{1}{2^{d_0+4}}, \quad C^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1} = 2^{-d_0-3}; \tag{26}$$

2) $p > 2$, при этом индексы $k_1 = \ldots = k_{p-2} = 4$, $k_{p-1} = 3$, $k_p = 1$,

$$\begin{aligned}
x^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\dots,4,3,1} &= \frac{1}{2}, \\
y^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\dots,4,3,1} &= \frac{2^{d_0+2p} + (-1)^p \cdot 2^{p-1} \cdot (2^{d_0+2} - 1) + 5}{3 \cdot 2^{d_0+2p}} + \frac{(-1)^{p+1}}{2^p} \cdot y^{(N(d_0)-3)}_0, \\
C^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\dots,4,3,1} &= 2^{-d_0-2p+1},
\end{aligned} \tag{27}$$

$p+1$ — число нижних индексов (вместе с $k_0 = 0$).

Если отсутствуют комбинации $3,1,\ 4,3,1,\ \ldots,4,4,...,4,3,1$ в начале последовательности нижних индексов $k_1,\ldots,k_m$, то $x^{(N(d_0)-3)}_{0,k_1,\ldots,k_m}$, $y^{(N(d_0)-3)}_{0,k_1,\ldots,k_m}$, $C^{(N(d_0)-3)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}$ находятся по формулам (21).

При $i = N(d_0)-2$ имеют место следующие два случая:

1) $p = 2$, индексы $k_1 = 3,\ k_2 = 1$,

$$x^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_0^{(N(d_0)-2)} + \frac{1}{2^{d_0+4}},\quad y^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1} = \frac{1}{2},\quad C^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1} = 2^{-d_0-3}; \tag{28}$$

2) $p > 2$, при этом $k_1 = \ldots = k_{p-2} = 2,\ k_{p-1} = 3,\ k_p = 1$,

$$\begin{aligned} &x^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2,3,1} = \frac{2^{d_0+2p} + (-1)^p\cdot 2^{p-1}\cdot(2^{d_0+2}-1)+5}{3\cdot 2^{d_0+2p}} + \frac{(-1)^{p+1}}{2^p}\cdot x_0^{(N(d_0)-2)},\\ &y^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2,3,1} = \frac{1}{2},\\ &C^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2,3,1} = 2^{-d_0-2p+1}, \end{aligned} \tag{29}$$

$p+1$ — число нижних индексов (вместе с $k_0 = 0$).

Если отсутствуют комбинации $3,1,\ 2,3,1,\ \ldots,2,2,...,2,3,1$ в начале последовательности нижних индексов $k_1,\ldots,k_m$, то $x^{(N(d_0)-2)}_{0,k_1,\ldots,k_m}$, $y^{(N(d_0)-2)}_{0,k_1,\ldots,k_m}$, $C^{(N(d_0)-2)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}$ находятся по формулам (21).

Соотношения (25)–(29) применяются не только для вычисления промежуточных величин, используемых в формулах (21)–(24), но и для нахождения координат узлов минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством при некоторых значениях d, именно: соотношения (25) — при $d = d_0+2$, (26), (28) — при $d = d_0+4$, (27), (29) — при $d = d_0+2p$.

Чтобы получить соотношения (21), достаточно скомбинировать m формул вида (16), начиная с формул, в которых $x^{(i)} = x_0^{(i)},\ y^{(i)} = y_0^{(i)}$, соотношения (22) — $m-p$ формул вида (18), начиная с формул с $(x^{(i)},y^{(i)}) = (x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p}, y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_p})$, соотношения (24) — $m-n$ формул вида (16), начиная с формул, в которых $x^{(i)} = x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_n}, y^{(i)} = y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_n}$.

Для вывода соотношений (26) требуется скомбинировать вышеупомянутые формулы в такой последовательности: формулы (16) при $k=3$ с $x^{(i)} = x_0^{(N(d_0)-3)},\ y^{(i)} = y_0^{(N(d_0)-3)}$ и (17) с $(x^{(i)},y^{(i)}) = (x_{0,3}^{(N(d_0)-3)}, y_{0,3}^{(N(d_0)-3)})$, для вывода соотношений (28) — формулы (16) при $k=3$ с $x^{(i)} = x_0^{(N(d_0)-2)},\ y^{(i)} = y_0^{(N(d_0)-2)}$ и (17) с $(x^{(i)},y^{(i)}) = (x_{0,3}^{(N(d_0)-2)}, y_{0,3}^{(N(d_0)-2)})$, (27) — $p-2$ формул (16) при $k=4$, начиная с формул, в которых $x^{(i)} = x_0^{(N(d_0)-3)}, y^{(i)} = y_0^{(N(d_0)-3)}$, формулы (16) при $k=3$ с $x^{(i)} = x^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\ldots,4},\ y^{(i)} = y^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\ldots,4}$ и (17) с $(x^{(i)},y^{(i)}) = (x^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\ldots,4,3}, y^{(N(d_0)-3)}_{0,4,4,\ldots,4,3})$, для вывода соотношений (29) — $p-2$ формул (16) при $k=2$, начиная с формул, в которых $x^{(i)} = x_0^{(N(d_0)-2)}, y^{(i)} = y_0^{(N(d_0)-2)}$, формулы (16) при $k=3$ с $x^{(i)} = x^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2},\ y^{(i)} = y^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2}$ и формулы (17) с $(x^{(i)},y^{(i)}) = (x^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2,3}, y^{(N(d_0)-2)}_{0,2,2,\ldots,2,3})$.

Соотношения (23) представляют собой формулы (19) с $x^{(i)} = x^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_{m-1}},\ y^{(i)} = y^{(i)}_{0,k_1,\ldots,k_{m-1}}$. Соотношения (25) совпадают с формулами (17).

Учитывая, каково множество упорядоченных групп индексов $k_1,k_2,\ldots,k_m$, можно сделать вывод о том, что соотношения (21)–(29) предусматривают всевозможные допустимые комбинации этих индексов, т. е. с помощью указанных соотношений можно вычислить координаты всех $2^d-\lambda(d)$ узлов и коэффициенты при узлах минимальной кубатурной формулы, обладающей d-свойством.

Список литературы

[1] Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

[2] Entacher K. Generalized Haar function system, digital nets and quasi-Monte Carlo integration // H.H. Szu (Ed.). Wavelet Application III, Proc. SPE 2762. 1996.

[3] Entacher K. Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series // BIT (Dan). 1997. Vol. 37, N 4. P. 846–861.

[4] Entacher K. Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series II // BIT (Dan). 1998. Vol. 38, N 2. P. 283–292.

[5] Кириллов К.А., Носков М.В. Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 6. С. 791–799.

[6] Кириллов К.А. Нижние оценки числа узлов кубатурных формул, точных для полиномов Хаара в двумерном случае // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, Спец. выпуск. С. 62–71.

[7] Кириллов К.А. Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в $\mathbb{R}^2$ // Вопр. мат. анализа. Красноярск. Изд-во Краснояр. гос. техн. ун-та. 2002. Вып. 6. С. 108–117.

[8] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331–371.

Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.