ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

В. И. Вайнштейн, Е. А. Вейсов, О. О. Шмидт
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: `{weinshtein,vea}@fivt.krasn.ru, ol_ka1981@mail.ru`

Quadrature formulas for calculation of the n-fold convolutions of the error-free running time distribution functions are derived. A model of the renewal process is proposed. It leads to the Volter's integral equation for the renewal function. This equation has been solved numerically using the finite sums method. The optimization problem of the renewal function minimization is considered.

В теории надежности простым процессом восстановления называется последовательность неотрицательных взаимно независимых случайных величин X_n, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(t)$. Если функция распределения первой случайной величины X_1 имеет распределение, отличное от $F(t)$, имеем общий (запаздывающий) процесс восстановления [1].

Случайные величины X_n — наработки элемента от $(n-1)$-го до n-го отказа. После каждого отказа проводится восстановление отказавшего элемента. Предполагается, что восстановление элемента происходит мгновенно.

Предположение о равенстве функций распределения обедняет сферу приложений теории восстановления. Обобщением процессов восстановления является процесс восстановления порядка (k_1, k_2) [2].

При процессе восстановления порядка (k_1, k_2) функции распределения времени наработки на отказ удовлетворяют условию

$$F_i(t) = F_j(t) \ \text{ при } \ i \equiv j \pmod{k_2}, \ i, j \geq k_1.$$

При $k_1 = k_2 = 1$ имеем простой процесс восстановления, при $k_1 = 2, \ k_2 = 1$ — запаздывающий процесс восстановления, при $k_2 = 1$ — общий процесс восстановления порядка k_1, при $k_1 = 1$ — периодический процесс восстановления порядка k_2 [2, 3].

Важную роль в приложениях теории надежности, особенно в вопросах, связанных с оптимизацией стратегий эксплуатации по моментам времени проведения профилактических восстановлений, играет функция восстановления $H(t)$ — математическое ожидание числа отказов за время от 0 до t:

$$H(t) = M(N(t)),$$

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

где $N(t)$ — количество отказов за время t.

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t),$$

где $F^{(n)}(t)$ — n-кратная свертка функций распределения

$$F^{(1)}(t) = F_1(t),\ F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} * F_n)(t) = \int\limits_0^t F^{(n-1)}(t-x)dF_n(x).$$

Функция восстановления $H(t)$ для процесса восстановления порядка (k_1, k_2) удовлетворяет интегральному уравнению [3]

$$H(t) = G(t) + \int\limits_0^t H(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x), \tag{1}$$

при $k_1 > 2$

$$G(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-2} F^{(n)}(t) - \left(\left(\sum_{n=1}^{k_1-2} F^{(n)}\right) * \Phi^{(k_2)}\right)(t),$$

при $k_1 \leq 2$

$$G(t) = \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t),$$

где $\Phi^{(k_2)}(t)$ — свертка функций распределения $F_{k_1}(t), F_{k_1+1}(t), ..., F_{k_1+k_2-1}(t)$.

Явный вид функции восстановления для простого процесса восстановления имеется лишь для некоторых функций распределения — экспоненциального, Эрланга, равномерного [1]. В виде рядов для нормального, гамма-распределения [1] и распределения Вейбулла — Гнеденко [4] в [5] приведены таблицы функции $H(t)$.

В общем случае функцию восстановления можно находить различными численными методами, решая интегральное уравнение (1). Во всех случаях требуется вычислять свертки функций распределения различных порядков.

Следуя [2], рассмотрим один из методов приближенного вычисления сверток $F^{(n)}(t)$.

Пусть $0 \leq t \leq T$. Разделим отрезок [0,T] точками t_i на n промежутков длины $h = T/n$, $t_i = ih,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Для приближенного вычисления интегралов берем квадратурную формулу с равноотстоящими узлами, например, прямоугольников:

$$\int\limits_0^{t_i} f(t)dt = \int\limits_0^{T} f_1(t)dt \approx h\sum_{j=1}^{n} f_1(t_j), \tag{2}$$

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \leq t_i, \\ 0, & t > t_i. \end{cases}$$

Тогда

$$F^{(2)}(t_i) = \int\limits_0^{t_i} F_1(t_i - x)F_2^{'}(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{i-1} F_1(h(i-j))F_2^{'}(hj). \tag{3}$$

Суммирование производится до $i-1$, так как $F_1(0)=0$ ($F_i(t)$ — функция распределения). Применяя (3), получаем приближенные формулы для последовательного вычисления сверток n-го порядка:

$$F^{(n)}(t_i)=\int\limits_0^{t_i} F^{(n-1)}(t_i-x)F_n^{'}(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{i-1} F^{(n-1)}(h(i-j))F_n^{'}(h_j). \tag{4}$$

Далее

$$\begin{gathered}
F^{(n)}(t_1)=0, \quad n>1,\\
F^{(3)}(t_2)=hF^{(2)}(t_1)F_3^{'}(t_1)=0,\\
F^{(4)}(t_2)=hF^{(3)}(t_1)F_4^{'}(t_1)=0,\\
F^{(4)}(t_3)=h(F^{(3)}(t_2)F_4^{'}(t_1)+F^{(3)}(t_1)F_4^{'}(t_2))=0,\\
\dots\\
F^{(r)}(t_i)=h\sum_{j=1}^{i-1} F^{(r-1)}(h(i-j))F_r^{'}(h_j)=0 \text{ при } i<r.
\end{gathered}$$

Таким образом,

$$F^{(r)}(t_i)=\begin{cases} 0, & i<r,\\ h\sum\limits_{j=1}^{i-1} F^{(r-1)}(h(i-j))F_2^{'}(h_j), & i\geq r. \end{cases} \tag{5}$$

Учитывая (5), для $F^{(r-1)}(h(i-j))$ можно в сумме в формуле для $F^{(r)}(t_i)$ уменьшить количество слагаемых.

При $i-j<r-1$ ($j>i-r+1$) имеем $F^{(r-1)}(t_{i-j})=0$.

$$F^{(r)}(t_i)=\begin{cases} 0, & i<r\\ h\sum\limits_{j=1}^{i-r+1} F^{(r-1)}(h(i-j))F_r^{'}(h_j), & i\geq r. \end{cases} \tag{6}$$

Получим формулы для приближенного вычисления производной от сверток

$$F^{(n)'}(t)=\int\limits_0^{t} F^{(n-1)'}(t-x)dF_n(x).$$

Предполагается, что $F_n(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t\in[0,+\infty)$. Применяем опять формулу прямоугольников (3)

$$F^{(2)'}(t_i)=\int\limits_0^{t_i} F_1^{'}(t_i-x)F_2^{'}(x)dx \approx h\sum_{j=1}^{i} F_1^{'}(h(i-j))F_2^{'}(hj).$$

Здесь суммирование проводится уже до i, так как $F^{(1)'}(0)$ не обязательно равняется нулю.

С учетом $F^{(n)}(0)=0$, $F^{(n)'}(0)=0$ при $n>1$ последовательно получаем

$$F^{(2)'}(t_1)\approx h\sum_{j=1}^{1} F_1^{'}(h(1-j))F_2^{'}(jh)=hF_1^{'}(0)F_2^{'}(t_1).$$

Если $F^{(n)}(t_1) = 0$ при приближенном вычислении сверток, то $F^{(2)'}(t_1)$ этим свойством не обладает:

$$F^{(3)'}(t_1) \approx h \sum_{j=1}^{1} F^{(2)'}(h(1-j))F_3'(jh) = hF^{(2)'}(0)F_3'(t_1) = 0,$$

$$F^{(3)'}(t_2) \approx h \sum_{j=1}^{2} F^{(2)'}(h(2-j))F_3'(jh) = h(F^{(2)'}(t_1)F_3'(t_1) + F^{(2)'}(0)F_3'(t_2)) = 0,$$

$$F^{(4)'}(t_1) \approx h \sum_{j=1}^{1} F^{(3)'}(h(1-j))F_4'(jh) = hF^{(3)'}(0)F_4'(t_1) = 0,$$

$$F^{(4)'}(t_2) \approx h \sum_{j=1}^{2} F^{(3)'}(h(2-j))F_4'(jh) = h(F^{(3)'}(t_1)F_4'(t_1) + F^{(3)'}(0)F_4'(t_2)) = 0,$$

$$\dots$$

$$F^{(r)'}(t_i) \approx h \sum_{j=1}^{i} F^{(r-1)'}(t_{i-j})F_r'(t_j) = 0, \quad \text{при} \quad i < r-1.$$

Таким образом,

$$F^{(r)'}(t_i) = \begin{cases} 0, & i < r-1, \\ h\sum\limits_{j=1}^{i} F^{(r-1)'}(h(i-j))F_r'(h_j), & i \geq r-1. \end{cases} \tag{7}$$

Так же, как и при вычислении сверток, в сумме в (7) можно уменьшить число слагаемых. При $i - j < r - 2$ $(j > i - r + 2)$ $F^{(r-1)}(t_{i-j}) = 0$.

Окончательно получаем приближенную формулу для вычисления производной от сверток

$$F^{(r)'}(t_i) = \begin{cases} 0, & i < r-1, \\ h\sum\limits_{j=1}^{i-r+2} F^{(r-1)'}(h(i-j))F_r'(h_j), & i \geq r-1. \end{cases} \tag{8}$$

Формулы (6), (8) для приближенного вычисления сверток и их производной дают возможность находить приближенное значение функции восстановления, решая интегральное уравнение (1).

Применяя квадратурную формулу (2), с учетом $H(0) = 0$ интегральное уравнение запишется в виде

$$H(t_i) = G(t_i) + h\sum_{j=1}^{i-1} H(t_i - t_j)\Phi^{(k_2)'}(t_j). \tag{9}$$

Учитывая, что $\Phi^{(k_2)'}(t_j) = 0$ при $j < k_2 - 1$, соотношение (9) перепишется в виде

$$H(t_i) = G(t_i) + h\sum_{j=k2-1}^{i-1} H(t_i - t_j)\Phi^{(k_2)'}(t_j) \quad \text{при} \quad i \geq k_2 - 1, \tag{10}$$

$$H(t_i) = G(t_i) \quad \text{при} \quad i < k_2 - 1. \tag{11}$$

Зафиксируем число T. Чтобы учесть слагаемые, входящие в сумму формул (10), (11), количество интервалов n, на которые разбивается отрезок $[0, T]$, должно удовлетворять условию $n > k_1 + k_2 - 1$.

Численную реализацию решения интегрального уравнения проводим по следующей схеме.

1. Задаем требуемую точность ε и число точек разбиения n, удовлетворяющее условию $n > k_1 + k_2 - 1$.

2. По формулам (10), (11) вычисляем функцию восстановления в точках t_i^n.

3. Удваиваем число точек разбиения.

4. В новых точках разбиения t_i^{2n} вычисляем функцию восстановления. При этом $H_n(t_i^n)$ и $H_{2n}(t_{2i}^{2n})$ — значения функции восстановления в соответствующих точках при различных числах узлов разбиения.

5. Процесс вычисления продолжаем, пока будет верно неравенство $\varepsilon_n > \varepsilon$, где

$$\varepsilon_n = \max |H_n(t_i^n) - H_{2n}(t_{2i}^{2n})|, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

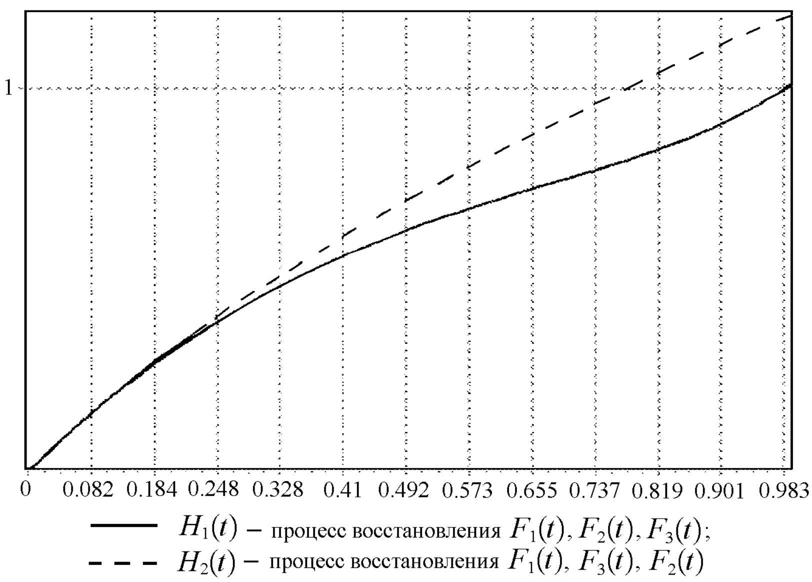
Пусть заданы функции распределения в непериодической и периодической частях рассматриваемого процесса восстановления. Меняя порядок их следования, получаем различные функции восстановления, их количество $(k_1 - 1)!k_2!$.

Таким образом, приходим к следующей задаче оптимизации. Пусть зафиксировано число t, требуется определить порядок следования функций распределения в каждой части процесса восстановления, чтобы на промежутке $[0, t]$ среднее число отказов было минимальным.

Для экспоненциального распределения эта задача рассмотрена в [2, 3]. В этом случае минимум достигается, если заменять элементы в порядке убывания их средних наработок.

Составлена программа, которая позволяет с заданной точностью находить функцию восстановления и решать поставленную задачу для распределений Эрланга, Вейбулла — Гнеденко, а также экспоненциального.

На рисунке приведен пример решения задачи для процесса порядка $(2, 2)$ на интервале от 0 до 1 со следующими функциями распределения: $F_1(t) = 1 - e^{-2t}$, $F_2(t) = 1 - e^{-t^8}$,



Определение оптимальной стратегии замен.

$F_3(t) = 1 - e^{-2t} \sum\limits_{k=0}^{1} (2t)^k$ (соответственно экспоненциальное распределение, распределения Вейбулла — Гнеденко и Эрланга). Из рисунка видно, что во втором случае количество отказов на промежутке от 0 до 1 на 18 % больше, чем в первом. Следовательно, оптимальная последовательность замен $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$.

Список литературы

[1] Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. М.: Радио и связь, 1988.

[2] Вайнштейн И.И. Прикладная математика: Сборник индивидуальных заданий. Красноярск: КрПИ, 1993. 139 с.

[3] Вайнштейн И.И., Вайнштейн В.И., Вейсов Е.А. О моделях процессов восстановления в теории надежности // Вопросы математического анализа: Сб. науч. тр. / Красноярский гос. техн. ун-т. 2004. Вып. 7. С. 78–84.

[4] Lomenski Z.A. A note on the Weibull reneval process // Biometrics. 1997. N 53. P. 375–381.

[5] Smith W.L., Ledbetter M.R. On the reneval function for the Weibull distribution // Technometrics. 1963. N 5. P. 393–396.

Поступила в редакцию 2 ноября 2005 г.