О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ "ГЛАЗА" ТАЙФУНА*

В. К. Андреев, А. А. Родионов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: andr@icm.krasn.ru, aarod@icm.krasn.ru

A nonstationary model for the eye of a hurricane proposed in papers of E. M. Dobryshman is considered. Group analysis of equations in Euler coordinates is made, the most general Lie algebra of generators is obtained, and the analysis for equations in Lagrange coordinates is presented. Some examples of exact solutions are provided.

Введение

Из интенсивных вихрей различного масштаба (пыльный вихрь, смерч, торнадо, тайфун) только в тайфуне формируется "глаз", представляющий собой почти безоблачную круговую область в центре с нисходящим потоком почти сухого теплого воздуха. Качественное объяснение факту возникновения "глаза" простое: конвекция столь интенсивна, что циклонического подтока насыщенного влагой воздуха с периферии в приводном слое не хватает и остается единственная возможность сохранить непрерывную структуру — "притянуть" воздух сверху. Каждый тайфун обладает индивидуальными чертами, которые отражаются и в деталях структуры, и во взаимодействии с подстилающей поверхностью и с окружающим крупномасштабным звеном общециркулярного механизма. Индивидуальные особенности проявляются главным образом в траектории тайфуна.

Рассматривается нестационарная модель "глаза" тайфуна, предложенная в работах Е. М. Добрышмана [1, 2]. Предполагается, что "глаз" тайфуна занимает область вертикального кругового цилиндра, в котором у поверхности океана давление минимально по всему радиусу "глаза" r_0, т. е. в "глазе" радиальный компонент градиента давления равен нулю. Справедливость такого допущения была установлена еще в XIX веке [3, с. 213]. Поскольку "глаз" тайфуна занимает большую часть тропосферы, стратификация атмосферы — изменение плотности с высотой — должна играть существенную роль. В уравнении сохранения массы необходимо учесть соответствующее слагаемое. В простейшем случае это приближение глубокой конвекции, при котором вводится параметр σ, определяющий среднее значение логарифмической производной плотности по высоте. Учитывается сла-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № НШ 902.2003.1).

гаемое σw, где w — вертикальная компонента скорости, $\sigma = 1/h$, h — глубина "глаза" ($\sim 10\ldots 12$ км), $\sigma \sim (0.5\ldots 0.7)\cdot 10^{-4}$ м$^{-1}$.

1. Уравнения модели и основная алгебра операторов

Исходная система уравнений в цилиндрических координатах (r,φ,z) модели описывается уравнениями

$$\begin{gathered} u_t + uu_r + \frac{v}{r}\,u_\varphi + wu_z - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho_0}\,p_r = 0,\\ v_t + uv_r + \frac{v}{r}\,v_\varphi + wv_z + \frac{uv}{r} + \frac{1}{r\rho_0}\,p_\varphi = 0,\\ \frac{1}{r}\,v_\varphi + \frac{1}{r}\,(ru)_r + w_z - \sigma w = 0,\\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}\,w_\varphi + ww_z + \frac{1}{\rho_0}\,p_z = -g, \end{gathered} \tag{1}$$

где t — время; u,v,w — радиальная, азимутальная и вертикальная компоненты вектора скорости; ρ_0 — плотность среды; p — давление; g — ускорение силы тяжести.

Предполагается [2], что давление p в "глазе" не зависит от радиуса r и угла φ, $p_r = p_\varphi = 0$. Тогда в (1) первые три уравнения представляют замкнутую систему относительно функций u,v,w. Четвертое уравнение в (1) "отщепляется" и служит для определения давления $p(z)$, если u,v,w уже найдены. Поэтому при анализе системы (1) четвертое уравнение рассматривать не будем. Заметим, что решения аналогичной структуры в газовой динамике, когда термодинамические параметры зависят только от одной пространственной переменной, рассматривались в работе [5], в которой фактор-системы проинтегрированы в конечном виде, с точностью до решения инвариантной системы.

Оказывается, что система уравнений (1) эквивалентна системе с $\sigma = 0$. Чтобы убедиться в этом, достаточно ввести новые переменные по формулам

$$z' = -\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}, \quad w' = \mathrm{e}^{-\sigma z} w, \tag{2}$$

остальные переменные не преобразуются. Тогда из (1) получим систему с $\sigma = 0$

$$\begin{gathered} u'_t + u'u'_r + \frac{v'}{r}\,u'_\varphi + w'u'_{z'} - \frac{v'^2}{r} = 0,\\ v'_t + u'v'_r + \frac{v'}{r}\,v'_\varphi + w'v'_{z'} + \frac{u'v'}{r} = 0,\\ u'_r + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r}\,v'_\varphi + w'_{z'} = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Если найдено решение $u'(t,r,\varphi,z')$, $v'(t,r,\varphi,z')$, $w'(t,r,\varphi,z')$ системы (3), то решение исходной системы с помощью (2) запишется так:

$$\begin{gathered} u(t,r,\varphi,z) = u'\Big(t,r,\varphi,-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\Big), \quad v(t,r,\varphi,z) = v'\Big(t,r,\varphi,-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\Big),\\ w(t,r,\varphi,z) = \mathrm{e}^{\sigma z} w'\Big(t,r,\varphi,-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\Big). \end{gathered} \tag{4}$$

Далее штрихи над переменными в (3) опускаем.

При исследовании групповых свойств системы уравнений (3) используем классическую методику группового анализа [4]. Вычисления показывают, что наиболее широкая алгебра Ли состоит из операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial \varphi},\ X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial r} - w\frac{\partial}{\partial w},\ X_4 = r\frac{\partial}{\partial r} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v},\ X_5 = z\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_6 = tr\frac{\partial}{\partial r} - 2tz\frac{\partial}{\partial z} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + (-tu + r)\frac{\partial}{\partial u} - tv\frac{\partial}{\partial v} - (4tw + 2z)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$X_7 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{v}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial u} - \frac{u}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_8 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial u} + \frac{u}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial v}, \tag{5}$$

$$X_9 = t\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{t}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{vt}{r}\cos\varphi + \sin\varphi\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(-\frac{ut}{r}\cos\varphi + \cos\varphi\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_{10} = t\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{t}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(-\frac{vt}{r}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{ut}{r}\sin\varphi - \sin\varphi\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_{11} = r\sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \cos 2\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + (u\sin 2\varphi + 2v\cos 2\varphi)\frac{\partial}{\partial u} - v\sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_{12} = r\cos 2\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \sin 2\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + (u\cos 2\varphi - 2v\sin 2\varphi)\frac{\partial}{\partial u} - v\cos 2\varphi\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_{13}(g) = g(t, r, \varphi)\frac{\partial}{\partial z} + \left(u\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

где $g(t, r, \varphi)$ — произвольная функция.

Система операторов (5) образует бесконечномерную алгебру Ли, так как оператор $X_{13}(g)$ содержит произвольную функцию $g(t, r, \varphi)$. Операторы $X_1, ..., X_{12}$ образуют конечномерную подалгебру алгебры Ли.

Отметим, что в [2] были указаны только семь операторов: $X_1, X_2, X_{13}(1)$ — операторы сдвига по t, φ и по z, X_3, X_4, X_5 — операторы растяжения по (t, r, w), (r, u, v) и по (z, w) соответственно; $X_{13}(t)$ — оператор преобразования Галилея (в преобразованных координатах (2)).

Операторы $X_6, X_7, ..., X_{12}, X_{13}(g)$ имеют сложную структуру, и без группового анализа уравнений определить их трудно. Например, оператор X_6 определяет группу проективных преобразований по переменным t, r

$$G_6:\ t' = \frac{t}{1 - at},\ r' = \frac{r}{1 - at},\ z' = z(1 - at)^2,\ u' = u(1 - at) + ar,\ v' = v(1 - at),$$

$$w' = \left(w + a\frac{2zt}{1 - at}\right)(1 - at)^4.$$

Заметим также, что координата z для уравнений (1) не является инерциальной — не допускается преобразование Галилея, учет стратификации атмосферы нарушает инерционность вертикальной координаты. В то же время система (3) в новых переменных допускает преобразование Галилея. Это объясняется тем, что координата z масштабируется заменой (2).

2. Некоторые точные решения

В работе [2] приведены четыре примера точных решений: спиральное движение, перенос возмущений по вертикали, модель вторичных течений и автомодельное решение.

Из анализа операторов (5) следует, что оператор $X_1 = \partial/\partial t$ отвечает за стационарные решения; на операторе $mX_{13}(1) - X_2 = m\partial/\partial z - \partial/\varphi$ ($m = \mathrm{const}$) получаются спиральные движения; оператор $X_4 = r\partial/\partial r + u\partial/\partial u + v\partial/\partial v$ дает квазидисковую модель движения, когда $u = rU(t,\varphi,z)$, $v = rV(t,\varphi,z)$; на операторе $X_{13}(t)$ реализуется перенос возмущений по вертикали; автомодельные решения получаются на линейных комбинациях операторов растяжения X_3, X_4 и X_5; модель вторичных течений осуществляется на операторах X_7, X_8.

Посмотрим, как можно получить указанные и другие решения при использовании метода группового анализа.

Стационарная квазидисковая модель спиральных движений. Модель реализуется на подалгебре трех операторов $\langle X_1, X_4, mX_{13}(1) - X_2\rangle$. Общими базисными инвариантами этих трех операторов являются функции $J = \{u/r, v/r, w, z + m\varphi\}$. Обозначим $\lambda = z + m\varphi$. Тогда решение системы (3) должно иметь вид

$$(u,v,w) = (rU(\lambda), rV(\lambda), W(\lambda)).$$

После подстановки в (3) получаем фактор-систему

$$\begin{aligned} &U^2 - V^2 + (mV + W)U_\lambda = 0,\\ &2UV + (mV + W)V_\lambda = 0,\\ &2U + (mV + W)_\lambda = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из второго и третьего уравнений следует пропорциональность $mV + W = C_1 V$, где $C_1 = \mathrm{const}$. Значит,

$$W = (C_1 - m)V, \quad U = -\frac{C_1}{2}\,V_\lambda.$$

Из первого уравнения системы (6) получается нелинейное уравнение

$$2VV_{\lambda\lambda} - V_\lambda^2 + \frac{4}{C_1^2}\,V^2 = 0,$$

которое заменой $V = C\Phi^2$ (C — постоянная) приводится к уравнению $\Phi_{\lambda\lambda} + C_1^{-2}\Phi = 0$. Оно легко решается, и окончательно имеем

$$V(\lambda) = 2C_2\sin^2\left(\frac{\lambda}{C_1} + C_3\right), \quad W(\lambda) = (C_1 - m)V(\lambda), \quad U(\lambda) = -C_2\sin 2\left(\frac{\lambda}{C_1} + C_3\right),$$
$$\lambda = z + m\varphi,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные; параметр m играет роль волнового числа. Тем самым найдено решение системы (3), а по формулам (4) можно получить стационарное решение уравнений (1):

$$\begin{aligned} &u(r,\varphi,z) = -C_2 r\sin 2\left(\frac{1}{C_1}\left(m\varphi - \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right) + C_3\right),\\ &v(r,\varphi,z) = C_2 r\left[1 - \cos 2\left(\frac{1}{C_1}\left(m\varphi - \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right) + C_3\right)\right],\\ &w(\varphi,z) = \mathrm{e}^{\sigma z}(C_1 - m)C_2\left[1 - \cos 2\left(\frac{1}{C_1}\left(m\varphi - \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right) + C_3\right)\right]. \end{aligned}$$

В частном случае при $C_1 = m$ выделяется решение

$$u = -C_2 r \sin 2(\varphi+\alpha), \quad v = C_2 r[1-\cos 2(\varphi+\alpha)], \quad w = 0, \quad \alpha = C_3 - \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}.$$

Прямые $\varphi = -\alpha + \pi k/2$, $k = 0, 1, 2, 3$, разбивают плоскость $z = \mathrm{const}$ на четыре части, в двух противоположных частях $u > 0$, а в других двух $u < 0$. На прямых $\varphi = -\alpha + \pi k/2$ радиальная скорость $u = 0$. Тангенциальная скорость имеет постоянное направление: при $C_2 > 0$ — против часовой стрелки, при $C_2 < 0$ — по часовой стрелке. Из четвертого уравнения системы (1) находим давление $p = -\rho_0 g z + p_0(t)$, $p_0(t)$ — произвольная функция.

Перенос возмущений по вертикали. Квазидисковый случай. Для поиска точного решения воспользуемся операторами $\langle m X_{13}(1) + X_1, X_4\rangle$, $m = \mathrm{const}$. За перенос возмущений по вертикали отвечает первая комбинация операторов, а оператор X_4 реализует квазидисковое движение в тайфуне. Инвариантами указанных операторов являются функции $J = \{\varphi, z - mt, u/r, v/r, w\}$. Обозначим $\lambda = z - mt$. Решение системы (3) будем искать в виде

$$(u, v, w) = (rU(\varphi,\lambda), rV(\varphi,\lambda), W(\varphi,\lambda)).$$

После подстановки уравнения из (3) преобразуются:

$$\begin{aligned}
&(W-m)U_\lambda + VU_\varphi + U^2 - V^2 = 0,\\
&(W-m)V_\lambda + VV_\varphi + 2UV = 0,\\
&2U + V_\varphi + W_\lambda = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из второго и третьего уравнений системы (7) следует

$$U = -\frac{1}{2}\,(V_\varphi + \Phi(\varphi)V_\lambda), \quad W = \Phi(\varphi)V + m, \tag{8}$$

где $\Phi(\varphi)$ — произвольная функция. Первое уравнение перепишем в виде

$$V(U_\varphi + \Phi(\varphi)U_\lambda) + U^2 - V^2 = 0. \tag{9}$$

Предположим, что U является функцией от V, $U = Z(V)$. Тогда, интегрируя (9), получаем

$$Z(V) = \pm\sqrt{-V^2 + 2C_0 V}, \quad C_0 = \mathrm{const}.$$

Окончательно, учитывая (8) и (9), приходим к решению

$$V = C_0\left(1 \pm \sin 2\left[F(\lambda - G(\varphi)) - \varphi\right]\right), \quad U = \pm C_0 \cos 2\left[F(\lambda - G(\varphi)) - \varphi\right], \quad W = G'(\varphi)V + m,$$

где $F(\,\cdot\,)$, $G(\varphi)$ — произвольные функции своего аргумента, $G'(\varphi) = \Phi(\varphi)$, штрих означает дифференцирование по φ.

В исходных переменных получаем решение системы (1)

$$\begin{aligned}
&u = \pm C_0 r \cos 2\left[F\left(-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} - mt - G(\varphi)\right) - \varphi\right],\\
&v = C_0 r\left(1 \pm \sin 2\left[F\left(-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} - mt - G(\varphi)\right) - \varphi\right]\right),\\
&w = \mathrm{e}^{\sigma z}\cdot C_0\left(1 \pm \sin 2\left[F\left(-\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} - mt - G(\varphi)\right) - \varphi\right]\right) + m.
\end{aligned}$$

В частном случае при выборе функций $F(\mu) = -C_1\mu/2$, $G(\varphi) = C_1^{-1}(\psi(\varphi) + 2\varphi)$, $C_1 = \mathrm{const}$, $\psi(\varphi)$ — произвольная функция, получаем

$$
\begin{aligned}
&u = \pm C_0 r \cos\left[C_1\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} + mt\right) + \psi(\varphi)\right],\\
&v = C_0 r\left(1 \pm \sin\left[C_1\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} + mt\right) + \psi(\varphi)\right]\right),\\
&w = \mathrm{e}^{\sigma z}\cdot C_0\left(1 \pm \sin\left[C_1\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} + mt\right) + \psi(\varphi)\right]\right).
\end{aligned}
$$

Видим, что в последних решениях скорости зависят от угла φ. Наличие произвольных функций $G(\varphi), \psi(\varphi)$ существенно обобщает известные решения [2].

В уравнениях (7), используя оператор X_2, можно рассмотреть осесимметрический случай ($\partial_\varphi = 0$). Тогда функции зависят только от одной инвариантной переменной $\lambda = z - mt$ и уравнения полностью интегрируются. Решение описано в работе [2].

Первая модель вторичного течения. Решение ищем на операторах $\langle X_7, X_8\rangle$. Их инвариантами являются функции $J = \{t, z, w,\ u\sin\varphi + v\cos\varphi, u\cos\varphi - v\sin\varphi\}$. Поэтому инвариантное решение уравнений (3) ищем в виде

$$(u, v, w) = (F\sin\varphi + G\cos\varphi, F\cos\varphi - G\sin\varphi, W),$$

где F, G, W — функции, зависящие от t, z. При подстановке в (3), "расщепляя" уравнения по $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, получим

$$F_t + WF_z = 0 \quad G_t + WG_z = 0, \quad W_z = 0, \tag{10}$$

откуда следует, что $W = W(t)$ — произвольная функция,

$$F = F(\lambda), \quad G = G(\lambda), \quad \lambda = \int W(t)\,dt - z.$$

Вводя новую функцию $\alpha(t) = \int W(t)\,dt$ вместо $W(t)$ и учитывая (4), получим решение системы (1)

$$
\begin{aligned}
&u = F\left(\alpha(t) + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right)\sin\varphi + G\left(\alpha(t) + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right)\cos\varphi,\\
&v = F\left(\alpha(t) + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right)\cos\varphi - G\left(\alpha(t) + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z}\right)\sin\varphi,\\
&w = \mathrm{e}^{\sigma z}\alpha'(t)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

с произвольными функциями $\alpha(t)$, $F(\,\cdot)$, $G(\,\cdot)$; штрих означает дифференцирование по t.

Для данного решения u, v, w из четвертого уравнения системы (1) легко находим давление в среде:

$$p(t, z) = -\rho_0\left[gz + \frac{1}{\sigma}\,\mathrm{e}^{\sigma z}\alpha''(t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\sigma z}\alpha'^2(t)\right] + p_0(t)$$

с произвольной функцией $p_0(t)$.

В решение (11) входит произвольная функция времени $\alpha(t)$, поэтому оно является обобщением решения, представленного в [1].

Для решения (11) возможна постановка граничного условия $w = 0$ при $z = 0$, что приводит к $\alpha(t) = \alpha_0 = \mathrm{const}$. При этом вертикальное движение в “глазе” тайфуна отсутствует, но радиальная и азимутальная скорости существенно зависят от z и угла φ.

Вторая модель вторичного течения. Аналогично ищем решение на операторах $\langle X_9, X_{10}\rangle$. Инварианты операторов $J = \{t, z, w, (u-r/t)\sin\varphi+v\cos\varphi, (u-r/t)\cos\varphi-v\sin\varphi\}$ определяют вид решения уравнений (3):

$$(u, v, w) = \left(\frac{r}{t} + F\sin\varphi + G\cos\varphi, F\cos\varphi - G\sin\varphi, W\right),$$

где F, G, W — функции от t, z. Подстановка в (3) и “расщепление” уравнений по $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ приводят к системе

$$F_t + \frac{1}{t}\,F + WF_z = 0, \quad G_t + \frac{1}{t}\,G + WG_z = 0, \quad W_z + \frac{2}{t} = 0, \tag{12}$$

которая имеет решение

$$F = \frac{1}{t}\,f(\lambda), \quad G = \frac{1}{t}\,g(\lambda), \quad W = -\frac{2z}{t} + \frac{\alpha'(t)}{t^2}, \quad \lambda = -zt^2 + \alpha(t)$$

с произвольными функциями $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $\alpha(t)$.

Возвращаясь к физическим переменным системы (1), учитывая преобразования (4), получим решение

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{t} + \frac{1}{t}\left[f(\lambda)\sin\varphi + g(\lambda)\cos\varphi\right], \\ v &= \frac{1}{t}\left[f(\lambda)\cos\varphi - g(\lambda)\sin\varphi\right], \\ w &= \frac{2}{\sigma t} + \frac{\alpha'(t)}{t^2}\,\mathrm{e}^{\sigma z}, \quad \lambda = \frac{t^2}{\sigma}\,\mathrm{e}^{-\sigma z} + \alpha(t). \end{aligned} \tag{13}$$

Для решения (13) потребуем выполнения граничного условия $w = 0$ при $z = 0$. Тогда $\alpha(t) = -t^2/\sigma + \alpha_0$, $\alpha_0 = \mathrm{const}$. Если функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ считать ограниченными, то скорости u, v, w стремятся к нулю при $t \to \infty$. Движение вдоль оси z всегда направлено вниз, $w = 2(1 - \mathrm{e}^{\sigma z})/\sigma t \le 0$. Функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ — произвольные по аргументу $\lambda = t^2\sigma^{-1}(\mathrm{e}^{-\sigma z} - 1) + \alpha_0$. Выбрав $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ периодическими функциями, получим периодическое по вертикали решение.

3. Координаты Лагранжа

Первые два уравнения системы (3) эквивалентны законам сохранения

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right) = 0, \quad \frac{dM}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\,(rv) = 0, \tag{14}$$

где E — часть кинетической энергии, а M — момент импульса, $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r + w\partial/\partial z$. Значит, в (3) целесообразен переход к лагранжевой системе координат.

Введем лагранжевы координаты ξ, θ, ζ с помощью решения задачи Коши

$$\frac{dr}{dt} = u(t, r, \varphi, z), \ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\,v(t, r, \varphi, z), \ \frac{dz}{dt} = w(t, r, \varphi, z),$$

$$r\big|_{t=0} = \xi, \quad \varphi\big|_{t=0} = \theta, \quad z\big|_{t=0} = \zeta. \tag{15}$$

Тогда из (14)

$$u^2 + v^2 = 2E_0(\xi, \theta, \zeta), \quad rv = M_0(\xi, \theta, \zeta). \tag{16}$$

Отсюда выражение $r(t, \xi, \theta, \zeta)$ дается формулой

$$r = \left[\xi^2 \pm 2Ct + 2E_0 t^2\right]^{1/2}, \tag{17}$$

где $C = \pm\sqrt{2E_0\xi^2 - M_0^2}$. Видно, что $M_0^2 \le 2E_0\xi^2$, т. е. для существования решения начальный момент импульса не может быть произвольным.

Азимутальный угол $\varphi(t, \xi, \theta, \zeta)$ определяется так:

$$\varphi = \theta + \operatorname{arctg}\left(\frac{M_0 t}{\xi^2 \pm Ct}\right). \tag{18}$$

Уравнение сохранения массы (3) в лагранжевых координатах примет вид

$$(r_\theta\varphi_\zeta - \varphi_\theta r_\zeta)z_\xi + (r_\zeta\varphi_\xi - r_\xi\varphi_\zeta)z_\theta + (\varphi_\theta r_\xi - r_\theta\varphi_\xi)z_\zeta = \frac{\xi}{r}. \tag{19}$$

Это и есть линейное уравнение для нахождения $z(t, \xi, \theta, \zeta)$. Здесь r, φ — известные функции из (17) и (18). Следовательно,

$$\overset{o}{u} = \frac{2E_0 t \pm C}{[\xi^2 \pm 2Ct + 2E_0 t^2]^{1/2}}, \quad \overset{o}{v} = \frac{M_0}{[\xi^2 \pm 2Ct + 2E_0 t]^{1/2}}, \quad \overset{o}{w} = \frac{dz}{dt}, \tag{20}$$

где $M_0(\xi, \theta, \zeta)$, $E_0(\xi, \theta, \zeta)$ — функции из начальных условий, а z — решение (19), причем $z = \zeta$ при $t = 0$.

1. Найдем решение для постоянных M_0 и E_0. Из (16) получим для $u(t, r, \varphi, z)$, $v(t, r, \varphi, z)$ формулы

$$u(t, r) = \overset{\circ}{u}(t, \xi(t, r)) = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2E_0 r^2 - M_0^2} \quad v = \frac{M_0}{r}. \tag{21}$$

Кроме того, $r_\theta = r_\zeta = \varphi_\zeta = 0$, $rr_\xi = C^{-1}(C \pm 2E_0 t)\xi$, и уравнение (19) интегрируется в виде

$$z = \frac{C}{(C \pm 2E_0 t)}\zeta + f(t, \xi, \theta) \tag{22}$$

с произвольной гладкой функцией f, $f(0, \xi, \theta) = 0$. Так как

$$\xi^2 = \frac{M_0^2 + \left(\sqrt{2E_0 r^2 - M_0^2} \mp 2E_0 t\right)^2}{2E_0},$$

из (17) и (18) имеем $\xi = h_1(t, r)$, $\theta = h_2(t, r, \varphi)$ с известными функциями h_1 и h_2, а из (22) определяется лагранжева переменная ζ:

$$\zeta = [z - F(t, r, \varphi)](C \pm 2E_0 t)/C,$$

где $F(t, r, \varphi) \equiv f(t, h_1(t, r), h_2(t, r, \varphi))$. Теперь легкий подсчет дает выражения для осевой скорости в лагранжевых и эйлеровых координатах:

$$\overset{o}{w} = \mp\frac{2E_0 C}{(C \pm 2E_0 t)^2}\zeta + f_t, \quad w = \mp\frac{2E_0(z - F)}{\sqrt{2E_0 r^2 - M_0^2}} + F_t + uF_r + \frac{v}{r}F_\varphi.$$

При $F = 0$ получим стационарное течение, а при $F = k\varphi + m(t)$ — винтовое ($k = \mathrm{const}$, $m(t)$ — произвольная гладкая функция).

2. Можно привести решения и при других значениях M_0, E_0. Например, при $E_0 = \mathrm{const}$, $M_0 = \sqrt{2E_0}\,\xi$ находим

$$u = \frac{2E_0 t}{r}, \quad v = \frac{\sqrt{2E_0}(r^2 - 2E_0 t^2)^{1/2}}{r}, \quad w = F_t + uF_r + \frac{v}{r}\,F_\varphi$$

с произвольной $F(t, r, \varphi)$.

3. Пусть $M_0 = 0$, $2E_0(\xi, \zeta) = \xi^2 U_0^2(\zeta)$. Тогда

$$r = \xi[1 \pm U_0(\zeta)t], \quad z = \int\limits_0^\zeta \frac{d\zeta}{[1 \pm U_0(\zeta)t]^2} + f(t, r).$$

Согласно (20),

$$\mathring{u} = \pm\xi U_0(\zeta), \quad \mathring{w} = \mp 2\int\limits_0^\zeta \frac{U_0(\zeta)d\zeta}{[1 \pm U_0(\zeta)t]^3} + f_t[t, \xi(1 \pm U_0(\zeta)t)] + \mathring{u}\ f_r.$$

Получили параметрическое представление решения для любых $U_0(\zeta)$, f.

В заключение заметим, что истинное решение системы (1) восстанавливается по формулам (4).

Список литературы

[1] Добрышман Е.М. О нестационарной модели “глаза” тайфуна // Метеорология и гидрология. 1995. № 12. С. 5–19.

[2] Добрышман Е.М. Гидродинамическая модель нестационарных процессов в “глазе” тайфуна // Метеорология и гидрология. 1996. № 12. С. 5–18.

[3] Метеорология или учение о погоде: Пер. Изд-ва “Общественная польза”. СПб, 1876. 283 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., 1978.

[5] Чупахин А.П. Небарохронные подмодели типов (1,2) и (1,1) уравнений газовой динамики // Новосибирск, 1999 (Препр. / СО РАН. Ин-т гидродинамики, № 1-99).

Поступила в редакцию 28 декабря 2004 г.,
в переработанном виде — 16 июня 2005 г.