Вычислительные технологии **Том 11, Специальный выпуск, 2006**

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ВЕСОВЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ, ТОЧНЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ХААРА*

К.А. Кириллов
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: KKirillov@rambler.ru

In this paper an estimate of the norm of error functional of minimal quadrature formulae with weights (which is exact for Haar polynomials) is investigated for the class of spaces S_p^*. Essentially bounded weight function is considered.

Введение

Существенный интерес в теории приближенного интегрирования вызывает задача построения и исследования минимальных квадратурных и кубатурных формул, точных для некоторого заданного набора функций, т. е. таких формул, которые точно интегрируют указанные функции, используя наименьшее возможное число узлов. Многие работы известных авторов посвящены проблеме построения минимальных формул приближенного вычисления интегралов, точных для алгебраических и тригонометрических многочленов. Квадратурные и кубатурные формулы, точные на алгебраических полиномах, восходят еще к Гауссу. Минимальные формулы приближенного вычисления интегралов, точные на тригонометрических многочленах, рассматривались в работах И.И. Кеда, М.В. Носкова, И.П. Мысовских и других авторов. Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в монографии И.М. Соболя [1] и работах К. Энтахера [2–4]. В их трудах точность формул приближенного интегрирования на конечных суммах Хаара использовалась при выводе оценок погрешности этих формул. Вопрос минимизации числа узлов не рассматривался.

Минимальные квадратурные формулы с произвольной суммируемой на отрезке $[0, 1]$ весовой функцией, точные для функций Хаара, были описаны в [5] М.В. Носковым и автором настоящей статьи. В представленной работе найдена верхняя оценка нормы функционала погрешности некоторых формул, построенных в [5], при условии, что функция $f(x)$ принадлежит введенному И.М. Соболем пространству S_p, а весовая функция существенно ограничена. Эта оценка имеет тот же порядок, что и аналогичная оценка, полученная И.М. Соболем в [6]. Для некоторых весовых функций фигурирующая в оценке константа, найденная в представленной работе, меньше константы в оценке из [6].

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00823).

1. Основные определения

В [1] сформулировано понятие функций Хаара и даны сопутствующие ему определения. Приведем их с незначительными изменениями, вызванными тем, что в настоящей работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [7], отличное от определения этих функций из [1].

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, ..., 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \dfrac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,} \end{cases} \tag{1}$$

$\overline{l_{m,j}} = \left[\dfrac{j-1}{2^{m-1}}, \dfrac{j}{2^{m-1}}\right]$, $m = 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_0(x) \equiv 1$.

В [1, 6] двоичные промежутки считаются замкнутыми слева, а если правый конец двоичного промежутка совпадает с 1, то промежуток считается также замкнутым справа; функции Хаара определяются следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x \notin l_{m,j}. \end{cases} \tag{2}$$

В [1] введены пространства S_p. Считается, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0,1]$, принадлежит пространству S_p, если она представима равномерно сходящимся рядом Фурье — Хаара

$$f(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j}\chi_{m,j}(x) \tag{3}$$

и конечна норма

$$||f||_{S_p} = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Здесь параметр p — любое число, удовлетворяющее неравенству $1 < p < \infty$. Сопряженный параметр q определяется соотношением

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

В [8] вводится понятие пространства L^∞, состоящего из всех измеримых почти всюду конечных функций $g(x)$, для каждой из которых найдется число C_g, такое, что $|g(x)| \leqslant C_g$ почти всюду. Такие функции называют существенно ограниченными. Мы будем рассматривать функции, существенно ограниченные на $[0;1]$. Для функции $g \in L^\infty$ определен истинный (существенный) супремум ее модуля

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} |g(x)|$$

как инфимум множества чисел $\alpha \in \mathbb{R}$, таких, что мера множества

$$\{x \in [0,1] : |g(x)| > \alpha\}$$

равна нулю. L^∞ является линейным подмножеством в множестве измеримых почти всюду конечных функций. Норма на L^∞ вводится по формуле

$$\|g\|_{L^\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in[0,1]} |g(x)|. \tag{5}$$

В [5] рассматриваются квадратурные формулы вида

$$I[f] = \int_0^1 g(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_i) = Q[f], \tag{6}$$

где $x_i \in [0,1]$ — узлы формулы; $C_i \in \mathbb{R}$ — ее коэффициенты при узлах $(i = 1, 2, \ldots, N)$, а функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы на отрезке $[0,1]$. Полиномы Хаара степени $d = 1, 2, \ldots$ определяются как линейные комбинации функций $\chi_0(x)$, $\chi_{m,j}(x)$ с действительными коэффициентами, где $m = 1, 2, \ldots, d$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, и хотя бы один из коэффициентов при $\chi_{d,j}(x)$, $j = 1, \ldots, 2^{d-1}$, отличен от нуля. Под полиномами Хаара нулевой степени понимаются константы. Вводится также понятие формулы вида (6), обладающей d-свойством Хаара, — формулы, точной для любого полинома Хаара степени, не превосходящей заданного числа d.

2. Некоторые результаты, полученные И.М. Соболем

В [6] И.М. Соболем исследованы формулы вида (6) с произвольной суммируемой весовой функцией $g(x)$ и функцией $f(x)$, принадлежащей пространству S_p в предположении, что все узлы формулы различны, все коэффициенты при узлах отличны от нуля и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=1}^{N} C_i = \int_0^1 g(x)\,dx = G. \tag{7}$$

Доказано, что при условии $C_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, норма функционала погрешности

$$\delta_N(f) = \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_i) - \int_0^1 g(x)f(x)\,dx \tag{8}$$

таких квадратурных формул удовлетворяет неравенству

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \geqslant GN^{-1/p}. \tag{9}$$

В случае $g(x) \geqslant 0$ построена формула, для которой

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant 2GN^{-1/p}. \tag{10}$$

Приведем схему вывода промежуточных результатов в [6], с помощью которых затем установим верхнюю оценку нормы функционала погрешности минимальных квадратурных формул.

В результате подстановки (3) в (8) получается выражение

$$\delta_N(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j} \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{N} C_i \, \delta(x - x_i) - g(x) \right] \chi_{m,j}(x) \, dx.$$

Для любого промежутка $l \subseteq [0, 1]$ определяется функция

$$\theta(l) = \sum_{i \,:\, x_i \in l} C_i - \int_l g(x) \, dx,$$

благодаря чему выражение для $\delta_N(f)$ приводится к виду

$$\delta_N(f) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{m,j} \left[\theta(l_{m,j}^-) - \theta(l_{m,j}^+) \right]. \tag{11}$$

Сумма по j в (11) оценивается с помощью неравенства Гёльдера:

$$|\delta_N(f)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{m,j}|^p \right]^{\frac{1}{p}} \psi_q(m) \leqslant \|f\|_{S_p} \sup_{1 \leqslant m < \infty} \psi_q(m),$$

где

$$\psi_q(m) = \left[\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| \theta(l_{m,j}^-) - \theta(l_{m,j}^+) \right|^q \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{12}$$

Затем доказываются ограниченность величины $\psi_q(m)$ и существование при любом фиксированном m функции $f_m(x) \in S_p$, такой, что

$$|\delta_N(f_m)| = \|f\|_{S_p} \psi_q(m),$$

на основании чего выводится формула для $\|\delta_N\|_{S_p^*}$:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \psi_q(m). \tag{13}$$

3. Оценка погрешности квадратурных формул с существенно ограниченной весовой функцией

В [5] установлено, что в случае почти всюду отличной от нуля весовой функции $g(x) \geqslant 0$, такой, что для любых целых $1 \leqslant k < l \leqslant 2^m$

$$\sum_{i=k}^{l}(-1)^i \int\limits_{(i-1)/2^d}^{i/2^d} g(x)\,dx \neq 0 \tag{14}$$

число N узлов любой минимальной квадратурной формулы, обладающей d-свойством, равно 2^d, каждый двоичный промежуток $l_{d+1,i}$ длины 2^{-d} содержит ровно по одному узлу, который может располагаться в любой точке этого промежутка, а коэффициент C_i при узле $x_i \in l_{d+1,i}$ вычисляется по формуле

$$C_i = \int\limits_{(i-1)/2^d}^{i/2^d} g(x)\,dx, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{15}$$

В настоящем разделе будем рассматривать минимальные квадратурные формулы указанного вида с функцией $f(x)$ пространства S_p и неотрицательной почти всюду отличной от нуля существенно ограниченной на отрезке $[0;1]$ весовой функцией $g(x)$, удовлетворяющей (14). Будем также считать, что узлы рассматриваемых формул не являются двоично-рациональными точками, т. е. не могут быть представлены в виде

$$x_{i_j} = \frac{j}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad j = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Очевидно, ограничения на узлы формулы и коэффициенты при узлах, указанные в предыдущем разделе, в данном случае выполняются: все узлы различны, все коэффициенты положительны и удовлетворяют соотношению (7). Так как используемое нами определение (1) функций Хаара отличается от используемого в [6] определения (2) только в точках, являющихся концами двоичных промежутков, а узлы рассматриваемых квадратурных формул не совпадают ни с одной из таких точек, соотношения (9), (11)–(13) имеют место и в нашем случае.

В силу точности рассматриваемых квадратурных формул на полиномах Хаара степеней, не превосходящих d, для $m = 1, 2, \ldots, d$ величина $\psi_q(m) = 0$ и, следовательно, соотношение (13) запишется в виде

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} = \sup_{d+1 \leqslant m < \infty} \psi_q(m). \tag{16}$$

Обозначим символом $\eta_{m,j}^{(k)}$ интеграл от весовой функции по двоичному промежутку длины 2^{-m}, являющемуся подмножеством множества $l_{d+1,j}$ ($m = d+1, d+2, \ldots, j = 1, 2, \ldots, 2^d$). Под k здесь будем понимать номер данного промежутка в двоичном промежутке $l_{d+1,j}$ ($k = 1, 2, \ldots, 2^{m-d}$), причем нумерацию проведем следующим образом. Промежутку длины 2^{-m}, содержащему входящий в множество $l_{d+1,j}$ узел формулы, присвоим номер 1, соседнему промежутку той же длины, лежащему вместе с промежутком номер 1 в одном двоичном промежутке длины 2^{-m+1}, присвоим номер 2, остальные двоичные промежутки множества $l_{d+1,j}$ занумеруем слева направо, начиная с первого непронумерованного промежутка. Учитывая, что узлы рассматриваемых формул не являются двоично-рациональными точками, а также принимая во внимание формулу (15), соотношение (12) перепишем в равносильном виде:

$$\psi_q^q(m) = \sum_{j=1}^{2^d} \left[\left| 2\eta_{m,j}^{(2)} + \sum_{k=3}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} \right|^q + \sum_{k=2}^{2^{m-d-1}} \left| \eta_{m,j}^{(2k-1)} - \eta_{m,j}^{(2k)} \right|^q \right]. \tag{17}$$

Очевидно, что

$$\psi_q^q(m) \leq \sum_{j=1}^{2^d} \left[\left| 2\eta_{m,j}^{(2)} + \sum_{k=3}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} \right|^{q-1} \left| 2\eta_{m,j}^{(2)} + \sum_{k=3}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{2^{m-d-1}} \left[\left| \eta_{m,j}^{(2k-1)} \right| + \left| \eta_{m,j}^{(2k)} \right| \right]^{q-1} \left[\left| \eta_{m,j}^{(2k-1)} \right| + \left| \eta_{m,j}^{(2k)} \right| \right] \right]. \tag{18}$$

Если в какой-либо сумме, входящей в уравнения (17), (18), значение нижнего индекса превышает значение верхнего индекса, то соответствующую сумму считаем равной нулю. В соответствии с (5)

$$\left| \eta_{m,j}^{(k)} \right| \leqslant \frac{1}{2^m} \|g\|_{L^\infty}$$

и, следовательно,

$$\left| 2\eta_{m,j}^{(2)} + \sum_{k=3}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} \right|^{q-1} \leqslant \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^d} \right)^{q-1}, \quad m = d+1, d+2, \ldots; \tag{19}$$

$$\left[\left| \eta_{m,j}^{(2k-1)} \right| + \left| \eta_{m,j}^{(2k)} \right| \right]^{q-1} \leqslant \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^{m-1}} \right)^{q-1} < \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^d} \right)^{q-1}, \tag{20}$$

$m = d+2, d+3, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^d$. Принимая во внимание (19), (20), из неравенства (18) получаем

$$\psi_q^q(m) \leqslant \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^d} \right)^{q-1} \sum_{j=1}^{2^d} \left[2\eta_{m,j}^{(2)} + \sum_{k=3}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} + \sum_{k=2}^{2^{m-d-1}} \left[\eta_{m,j}^{(2k-1)} + \eta_{m,j}^{(2k)} \right] \right] <$$

$$< \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^d} \right)^{q-1} \sum_{j=1}^{2^d} 2 \sum_{k=1}^{2^{m-d}} \eta_{m,j}^{(k)} = 2G \left(\frac{\|g\|_{L^\infty}}{2^d} \right)^{q-1}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу неотрицательности весовой функции $g(x)$ все величины $\eta_{m,j}^{(k)} \geqslant 0$. Учитывая (16), равенство $N = 2^d$ и соотношение (4), связывающее параметры p и q, приходим к следующей оценке:

$$\|\delta_N\|_{S_p^*} \leqslant (2G)^{\frac{1}{q}} \left(\|g\|_{L^\infty} \right)^{\frac{1}{p}} N^{-\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

Кроме того, для нормы функционала погрешности рассматриваемых квадратурных формул справедливо неравенство (9). Следовательно, $\|\delta_N\|_{S_p^*}$ есть величина порядка $N^{-\frac{1}{p}}$. Таким образом, оценка (21) имеет тот же порядок, что и оценка (10), полученная И.М. Соболем в [6]. Очевидно, что для весовых функций, удовлетворяющих неравенству $G \leqslant \|g\|_{L^\infty} < 2G$, фигурирующая в оценке (21) константа меньше константы из оценки (10).

Список литературы

[1] Соболь И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969.

[2] Entacher K. Generalized Haar function system, digital nets and quasi-Monte Carlo integration // H.H. Szu (Ed.). Wavelet Appl. III, Proc. SPE 2762. 1996.

[3] Entacher K. Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series // BIT (Dan). 1997. Vol. 37, N 4. P. 846–861.

[4] Entacher K. Quasi-Monte Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series II // BIT (Dan). 1998. Vol. 38, N 2. P. 283–292.

[5] Кириллов К.А., Носков М.В. Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 6. С. 791–799.

[6] Haar A. Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331–371.

[7] Соболь И.М. О весовых квадратурных формулах // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 5. С. 1196–1200.

[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.