

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ТЕЧЕНИЙ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НЕПРЯМЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

В.А. ЯКУТЕНОК, М.Н. ШТОКОЛОВА
Томский государственный университет, Россия
e-mail: m_shtokolova@ftf.tsu.ru

A numerical algorithm for modeling of nonlinear viscous liquid flows is presented. It is based on application of the boundary elements method. The algorithm was tested on the problem of flow in the plane channel, the computation accuracy has been verified by comparing the present numerical results with the analytical solution.

Введение

Задача о вращающемся течении внутри полого горизонтального цилиндра интересует исследователей на протяжении многих лет вследствие широкого спектра ее приложений для нужд промышленности. Математическое моделирование процесса перемешивания полимерных композиций в объемном смесителе сопряжено со значительными трудностями. Эти трудности связаны, прежде всего, с пространственным характером процесса перемешивания, неньютоновским характером поведения перемешиваемой среды и наличием свободной поверхности. Для понимания механизма перемешивания, качественного представления о степени влияния определяющих факторов используют различные упрощения математической формулировки задачи. Основным упрощением является предположение о том, что смеситель представляет собой бесконечно длинный горизонтальный цилиндр, частично заполненный высоковязкой жидкостью и вращающийся вокруг собственной оси. Для такого случая в предположении ньютоновского характера течения известны работы как зарубежных [1, 2], так и отечественных авторов [3]. В то же время, указанные исследования не затрагивают вопросов о влиянии отклонения реологии среды от закона Ньютона. Известны несколько попыток аналитического исследования пленочных течений неньютоновской жидкости внутри горизонтального цилиндра, где за основу взяты степенная реологическая модель [4, 5], модель Бингама [6], а также обобщенная модель ньютоновской жидкости [7]. Однако в упомянутых работах рассматривается лишь пленочный режим течения, а также не представляется возможным количественное определение кинематических и динамических характеристик внутри перемешиваемой жидкости. В связи с этим

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и CRDF в рамках программы BRNE (грант № 016-02) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-08-00107-а).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

актуальность приобретают поиски численных методов моделирования рассматриваемого класса задач. Один из возможных подходов представлен в настоящей работе.

Сделанное предположение о том, что течение в смесителе качественно совпадает с течением неньютоновской жидкости в горизонтальном вращающемся частично заполненном бесконечном цилиндре, приводит к необходимости решения задачи из класса нелинейных плоских задач гидродинамики ползущих течений со свободной поверхностью. Допущение о применимости ползущего приближения основано на малости характерных чисел Рейнольдса течений, реализующихся в смесителе. Для течений, реализуемых в объемных смесителях, максимальное значение $Re = 0.71$. С другой стороны, хорошо известно, что условие применимости ползущего приближения $Re < 2$. Для решения нелинейных плоских задач гидродинамики течений со свободной поверхностью можно использовать различные конечно-разностные методы [8]. При рассмотрении течений в областях сложной геометрии, с большими деформациями свободной границы, при наличии нескольких, значительно различающихся характерных размеров возникают вычислительные трудности, связанные с построением конечно-разностных сеток, которые, кроме того, должны адаптироваться к изменениям свободной поверхности. В связи с этим актуальность приобретают поиски подходов, позволяющих упростить и унифицировать алгоритмическую процедуру численного решения. Как известно, одним из путей преодоления этих трудностей является переход к системе граничных интегральных уравнений, эквивалентной исходной системе дифференциальных уравнений [9, 10]. Учет реологического поведения, отличного от модели Ньютона, приводит к дополнительным сложностям, способам преодоления которых посвящена данная статья.

1. Математическая постановка задачи о течении степенной жидкости

Реологические свойства жидкости для многомерного течения описываются уравнением, связывающим компоненты тензора напряжений и тензора скоростей деформаций. Для нелинейно-вязкой (степенной) жидкости это уравнение имеет вид

$$\tau_{ij} = 2kA^{n-1}\dot{e}_{ij}, \quad (1)$$

где τ_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений; k — показатель консистенции; n — индекс течения (показатель нелинейности); $\dot{e}_{ij} = (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) / 2$ — компоненты тензора скоростей деформаций; v_i — компоненты вектора скорости; x_i — декартовы координаты; A — второй инвариант тензора скоростей деформаций (интенсивность скоростей деформаций) [11]. Уравнение (1) (так называемая модель Оствальда де-Вилля) описывает поведение псевдопластичных ($n < 1$) и дилатантных ($n > 1$) жидкостей. При $n = 1$ имеем ньютоновскую жидкость, при этом коэффициент консистенции k совпадает с коэффициентом динамической вязкости. При наличии предела текучести модель Оствальда де-Вилля обобщается реологическим уравнением Шульмана [11]. С методологической точки зрения такое обобщение не вносит принципиальных изменений в построение математической модели и метода решения.

В приближении ползущего течения в присутствии силы тяжести течение жидкости описывается уравнениями Стокса, которые можно записать в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ — компоненты тензора напряжений; p — давление; ρ — плотность; g_i — компоненты вектора ускорения силы тяжести.

К уравнению (2) следует присоединить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

Будем считать, что на границе области S , занятой нелинейно-вязкой жидкостью, могут быть заданы граничные условия двух типов: либо скорости (на твердых стенках — условия прилипания, на входной границе — соответствующий профиль скорости), либо в случае свободной границы равенство нулю силы, действующей со стороны газа на жидкость (постоянное давление в газе можно не учитывать, так как оно дает постоянную добавку в величину давления). Таким образом, граничные условия имеют вид

$$v_i = V_i(x), \quad x \in S_1, \quad t_i(x) = \sigma_{ij}n_j = 0, \quad x \in S_2, \quad (4)$$

где S_2 — свободная поверхность; $S_1 = S \cap S_2$; n_j — компоненты внешней нормали к S_2 .

Следует отметить, что может рассматриваться ситуация, когда на всей границе S заданы условия первого рода (свободная граница отсутствует) или второго (вся граница области течения свободная). Также возможно рассмотрение течения в многосвязной области. Такого рода варианты задания граничных условий практически не изменяют алгоритма построения метода решения. Дополнительно свободная граница подчиняется кинематическому условию, которое можно записать в эйлеровой форме следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} f = 0, \quad (5)$$

где $f(x, t)$ — функция, задающая S_2 . В лагранжевой форме кинематическое условие имеет вид

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (6)$$

Условия (5), (6) используются для нахождения формы свободной границы. Выбор варианта определяется характером поведения свободной поверхности для наиболее точного вычисления ее формы. Реологическое уравнение (1) представим в виде

$$\tau_{ij} = 2B\dot{e}_{ij}, \quad (7)$$

где $B = kA^{n-1}$ — коэффициент эффективной вязкости. Для перехода к безразмерным переменным введем следующие масштабы: для координат — R (характерный размер области, занятой жидкостью), для скорости — V , для напряжений — $k(V/R)^n$. Тогда (сохраняя прежние обозначения для безразмерных переменных) уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W_i = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (8)$$

Здесь $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$ — безразмерные компоненты тензора напряжений; $\tau_{ij} = 2Be_{ij}$ — безразмерные компоненты девиатора тензора напряжений; $B = A^{n-1}$ — безразмерный коэффициент эффективной вязкости; $W_i = W(\vec{g}\vec{e}_i)/|\vec{g}|$, $W = (\rho|\vec{g}|R/k)(R/V)^n$, \vec{e}_i — орты декартовой системы координат.

Следовательно, кроме геометрических, имеется всего один определяющий параметр — число W , которое, являясь отношением чисел Рейнольдса и Фруда, модифицированных для нелинейно-вязкой жидкости, характеризует соотношение гравитационных и вязких сил в потоке жидкости. Для последующей линейризации преобразуем уравнение (8) следующим тождественным образом:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + W_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-B)e_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \quad (9)$$

где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2e_{ij}$ — линейная часть тензора напряжений. В случае $B = 1$ будем иметь линейное уравнение, описывающее течение ньютоновской жидкости. Следовательно, в таком представлении правая часть уравнения (9) описывает нелинейное поведение жидкости, обусловленное зависимостью вязкости от скорости сдвига.

В уравнении (9) можно избавиться от постоянного слагаемого W_i , вводя потенциал для силы тяжести: $\phi = W_i x_j$. Тогда, сохраняя прежние обозначения, имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-B)e_{ij}], \quad i, j = 1, 2, \quad (10)$$

но теперь $\sigma_{ij} = -(p - \phi)\delta_{ij} + 2e_{ij}$. Далее под величиной давления будем понимать его модифицированное значение $p - \phi$, однако для удобства обозначение для модифицированного σ_{ij} оставим прежним. Соответственно видоизменится граничное условие на свободной поверхности, которое следует использовать в виде

$$t_i(x) = W_j x_j n_i, \quad x \in S_2, \quad (11)$$

где $t_i(x) = \sigma_{ij} n_j$, а под σ_{ij} понимаются безразмерные компоненты полного тензора напряжений. Таким образом, математическая формулировка задачи включает уравнения (3), (10) с граничными условиями (4)–(6) с учетом (11). В качестве начального условия необходимо задавать форму свободной границы в начальный момент времени.

2. Граничные интегральные уравнения для нелинейной задачи

Для перехода к гранично-интегральной формулировке задачи запишем уравнение (10) в виде

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \Psi_i, \quad (12)$$

где $\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1-B)e_{ij}]$ — нелинейная векторная функция, которую будем рассматривать как плотность источников, распределенных по области течения.

Как известно, линейризованная система уравнений Стокса для случая единичной сосредоточенной силы, действующей вдоль координатной оси j и приложенной в точке ξ , имеет вид

$$\Delta \vec{v}_j - \text{grad } p_j = \delta(x - \xi) \vec{e}_j, \quad \text{div } \vec{v}_j = 0, \quad (13)$$

где δ — дельта-функция Дирака. Дифференцирование проводится по переменной x , ξ рассматривается как параметр. Сингулярное решение системы (12) записывается следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= -\frac{1}{4\pi} \left[\delta_{ij} \ln \frac{1}{|x - \xi|} + \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x - \xi|^2} \right], \\ p_j &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln \frac{1}{|x - \xi|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее будем использовать обозначения: $r = |x - \xi|$, $y_i = x_i - \xi_i$, δ_{ij} — символ Кронекера. Подставляя (14) в выражение для напряжений, можно получить

$$\sigma_{ikj} = \frac{y_i y_k y_j}{\pi r^4}. \quad (15)$$

Следовательно, для усилий в точке x поверхности с нормалью $n_k(x)$ имеем

$$\tau_{ij} = \sigma_{ikj} n_k = \frac{y_i y_j y_k n_k}{\pi r^4}. \quad (16)$$

Соотношения (14), (16) позволяют перейти к интегральной формулировке поставленной задачи. Для этого реальную область течения заменим фиктивной, отличающейся тем, что она считается помещенной в неограниченную двумерную область, заполненную ньютоновской жидкостью. На границе фиктивной области будем считать распределенными сосредоточенные силы неизвестной интенсивности $\phi_j(\xi)$. Внутри области течения дополнительно распределены внутренние источники, интенсивность которых определяется функцией $\Psi_j(z)$. Здесь введено обозначение z для переменной интегрирования по области течения Ω , аналогичное обозначению ξ для переменной интегрирования по границе S . Тогда скорости v_i и усилия t_i в любой внутренней точке x можно найти сверткой фундаментальных сингулярных решений (14), (16) с функциями $\phi_j(\xi)$, $\Psi_j(z)$ по следующим формулам:

$$v_i(x) = \int_S v_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} v_{ij}(x, z) \Psi_j(z) d\Omega(z); \quad (17)$$

$$t_i(x) = \int_S t_{ij}(x, \xi) \phi_j(\xi) dS(\xi) + \int_{\Omega} t_{ij}(x, z) \Psi_j(z) d\Omega(z). \quad (18)$$

Уравнения (17), (18) удовлетворяют дифференциальному уравнению (12) в любой внутренней точке и определяют решение при выполнении граничных условий. Функция плотности распределения внутренних источников $\Psi_j(z)$ заранее неизвестна и может быть вычислена только для известного поля скорости. Это приводит к необходимости аппроксимации $\Psi_j(z)$ (например, с использованием поля скорости для вязкой жидкости) с целью дальнейшего уточнения решения при помощи того или иного итерационного процесса. Особенности во вторых интегралах уравнений (17), (18) при $z = x$ являются интегрируемыми по области решения.

Последний шаг в получении интегральных граничных уравнений состоит в помещении точек наблюдения на границу S ($x \rightarrow x_0, x_0 \in S$). В этом случае интегральные уравнения (17), (18) становятся сингулярными, так как фундаментальные решения не ограничены в точках $x = \xi$. Первый интеграл, имея в ядре логарифмическую особенность, может быть вычислен в обычном смысле. Второй интеграл в подынтегральном выражении имеет особенность $1/r$, поэтому его следует понимать в смысле главного значения по Коши. Свободный член вычисляется стандартным методом теории потенциала, и в точке x_0 , в которой существует единственная касательная к границе, можно записать

$$t_i(x) = \frac{1}{2}\phi_i(x_0) + \int_S t_{ij}(x, \xi)\phi_j(\xi)dS(\xi) + \int_{\Omega} t_{ij}(x, z)\Psi_j(z)d\Omega(z). \quad (19)$$

Граничные интегральные уравнения (17) и (19) при $x \rightarrow x_0$ и заданных в соответствии с (4), (11) $v_i(x_0)$ и $t_i(x_0)$ позволяют получить значения неизвестных граничных сил $\phi(\xi)$. Это возможно сделать, только если известна функция $\Psi_j(z)$. По этой причине возникает необходимость линеаризации уравнений (17), (19) и организации итерационного процесса.

3. Численный метод решения

Найти аналитическое решение нелинейной системы интегральных уравнений (17), (19) не представляется возможным даже для областей простой формы, поэтому она решается численно. Разобьем границу области, занятой жидкостью, на N прямолинейных отрезков (элементов) и будем считать функцию $\phi_j(\xi)$ постоянной в пределах элемента. Область Ω , занятую жидкостью, разделим на M выпуклых четырехугольников, внутри каждого из которых функцию $\Psi_j(z_l)$ примем постоянной. Тогда уравнения (17), (19) в дискретизированной форме приобретут вид

$$v_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \phi_j(\xi^q) \int_{\Delta S^q} v_{ij}(x_0^p, \xi^q)dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \Psi_j(z^l) \int_{\Delta \Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z^l)d\Omega(z^l); \quad (20)$$

$$t_i(x_0^p) = \sum_{q=1}^N \phi_j(\xi^q) \int_{\Delta S^q} t_{ij}(x_0^p, \xi^q)dS(\xi^q) + \sum_{l=1}^M \Psi_j(z^l) \int_{\Delta \Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z^l)d\Omega(z^l). \quad (21)$$

Здесь x_0^p — некоторая точка элемента с номером p , которую будем называть узлом. В качестве узлов будем выбирать середины граничных элементов. Из системы линейных алгебраических уравнений (20), (21) берутся N уравнений, причем уравнения (21) соответствуют элементам на свободной поверхности; на всех других элементах заданы скорости, поэтому для них используются уравнения (20).

Интегралы $\int_{\Delta S^q} v_{ij}(x_0^p, \xi^q)dS(\xi^q)$ и $\int_{\Delta S^q} t_{ij}(x_0^p, \xi^q)dS(\xi^q)$ в уравнениях (20), (21), являющиеся коэффициентами системы линейных уравнений, можно вычислить аналитически. Для этого вводится декартова система координат y_i ($i = 1, 2$), нормально связанная с элементом q (не путать с ранее введенным обозначением $y_i = x_i - \xi_i$). Причем ось y_1 направлена по внешней нормали к элементу, ось y_2 — в положительном направлении касательной (против часовой стрелки). Начало системы координат y_i находится в точке p , т. е. $y_i = e_{ij}(x_j - x_j^p)$.

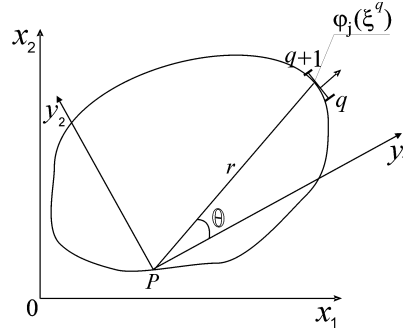


Рис. 1. Общий вид области течения.

Здесь e_{ij} — направляющие косинусы осей. В этом случае, если к тому же использовать полярные координаты r, θ , (рис. 1) можно получить

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S^q} v_{ij}^{pq} dS(\xi^q) &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \delta_{ij} (\ln r - 1) y_2 - y_1 (e_{1j} e_{2i} + e_{2j} e_{1i}) \ln r - e_{2j} e_{2i} (y_2 - 2y_1 \Theta) \right\}_q^{q+1}, \\ \int_{\Delta S^q} t_{ij}^{pq} dS(\xi^q) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ e_{1j} e_{1i} [\bar{n}_1 (\Theta + \sin \Theta \cos \Theta) + \bar{n}_2 \sin^2 \Theta] + \right. \\ &\quad + (e_{1j} e_{2i} + e_{2j} e_{1i}) [\bar{n}_1 \sin^2 \Theta + \bar{n}_2 (\Theta - \sin \Theta \cos \Theta)] + \\ &\quad \left. + e_{2j} e_{2i} [\bar{n}_1 (\Theta - \sin \Theta \cos \Theta) - \bar{n}_2 (\sin^2 \Theta - 2 \ln r)] \right\}_q^{q+1}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\bar{n}_i = e_{ij} n_j$.

Уравнения (22) верны для всех узлов x_0^p , за исключением случая $q = p$, т. е. совпадения точек наблюдения и приложения нагрузки. В этом случае

$$\begin{aligned} \Theta_q &\rightarrow -\pi/2, \quad \Theta_{q+1} \rightarrow \pi/2, \quad \bar{n}_1 = 1, \quad \bar{n}_2 = 0, \\ r_q = r_{q+1} &\rightarrow \Delta S_q/2, \quad y_1^q = y_1^{q+1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда запишем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S^q} v_{ij}^{qq} dS(\xi^q) &= \frac{\Delta S_q}{4\pi} \left\{ \delta_{ij} [\ln (\Delta S_q/2) - 1] - e_{2j} e_{2i} \right\}, \\ \int_{\Delta S^q} t_{ij}^{qq} dS(\xi^q) &= \frac{1}{2\pi} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (23)$$

где ΔS_q — длина элемента q .

Второе уравнение (23) показывает, что вклад в интеграл при $q = p$ дает лишь свободный член, главное же значение по Коши на элементе равно нулю. Используя формулы (22), (23), можно получить систему уравнений, которая в матричной форме будет иметь вид

$$\begin{Bmatrix} v^p \\ t^p \end{Bmatrix}_{2N \times 1} = \begin{bmatrix} \int_{\Delta S} v^{pq} dS \\ \int_{\Delta S} t^{pq} dS \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \begin{Bmatrix} \phi^q \end{Bmatrix}_{2N \times 1} + \begin{Bmatrix} \Psi^p \end{Bmatrix}_{2N \times 1}. \quad (24)$$

Система (24) решается стандартным методом Гаусса с выбором главного элемента, и в результате определяется вектор-столбец $\{\phi^q\}$. Для учета нелинейного слагаемого $\{\Psi^p\}$ следует организовать итерационный процесс с использованием, например, метода простой итерации. Интегралы $\int_{\Delta\Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$, $\int_{\Delta\Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$ можно вычислять с помощью численных квадратур Гаусса. Скорости, давление и напряжения рассчитываются в любой точке области с помощью численного интегрирования по дискретным аналогам соотношений, подобных уравнениям (20), (21).

После нахождения значений скоростей в узлах, принадлежащих свободной границе, рассчитывается ее новое положение с помощью кинематического условия, записанного в виде (5) или (6). Для реализации условия (5) можно использовать разностную схему с разностями против потока, которая в случае использования декартовых координат имеет вид

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = v_{2_i}^n - v_{1_i}^n \frac{\Delta f_i^n}{f_i^n \Delta x_1},$$

$$\Delta f_i^n = \begin{cases} f_i^n - f_{i-1}^n, v_{1_i}^n > 0, \\ f_{i+1}^n - f_i^n, v_{1_i}^n < 0. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь n — номер шага по времени; Δx_1 — шаг разностной сетки по координате x_1 ; i — номер узла на свободной поверхности; Δt — шаг по времени. Условие устойчивости схемы (25) имеет вид

$$\Delta t \leq \min_i \left| \frac{\Delta x_i}{v_i} \right|.$$

Граничное условие (6) дает следующие разностные формулы для вычисления новой формы свободной границы (схема Эйлера):

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t v_i^n, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Вместо (26) возможно использование схем повышенного порядка точности (типа предиктор-корректор). В соответствии с (25) или (26) находятся новые координаты узлов, принадлежащих свободной границе. Далее организуется новый итерационный процесс для учета нелинейного слагаемого.

Таким образом, данную задачу можно характеризовать как квазистационарную, поскольку для заданной формы границы находится решение, используемое для нахождения новой формы. Если рассматривается стационарный случай, то в итоге должна получаться стационарная форма свободной поверхности. На первой итерации первого шага по времени должна решаться линейная задача, что позволит найти первое приближение для $\{\Psi^p\}$. Далее в качестве первого приближения можно использовать значения с предыдущего шага по времени.

4. Решение тестовой задачи о течении нелинейно-вязкой жидкости в плоском канале

Выше изложен непрямой метод граничных элементов для решения задач о течении неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. В таком варианте этот метод ранее не

использовался для решения нелинейных задач и требует методической проверки для выяснения его работоспособности. Прежде всего необходимо выяснить, каким образом можно эффективно вычислять интегралы $\int_{\Delta\Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$ и $\int_{\Delta\Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$ по элементам области решения. В работе [9] предлагается использование полуаналитической схемы интегрирования для элементов области $\Delta\Omega^l$, если $x_p^0 \in \Delta\Omega^l$. В то же время представляется возможным применение квадратур Гаусса повышенного порядка точности с использованием внутренних точек области, так как, несмотря на особенности в подынтегральной функции, сами интегралы существуют в обычном смысле. При этом особенность должна находиться на границе $\Delta\Omega^l$. В этом случае алгоритм решения значительно упрощается ввиду единообразной процедуры вычисления рассматриваемых интегралов. Для этого необходимо решение тестовой задачи с известным аналитическим решением, что позволит также подтвердить достоверность результатов применения разработанного метода к численному моделированию течения неньютоновской жидкости в других задачах.

В качестве тестовой будем рассматривать задачу об установившемся течении нелинейно-вязкой жидкости в плоском канале. В качестве характерного размера выберем ширину канала L , в качестве характерной скорости — среднюю скорость течения V . Тогда можно получить следующее решение, описывающее поле течения [11]:

$$V_1 = 0, \quad V_2(x_1) = \frac{2n+1}{n+1} (1 - |2x_1 - 1|^{\frac{n+1}{n}}), \quad (27)$$

где V_1 — поперечная, а V_2 — продольная составляющие вектора скорости; x_1 — поперечная координата с началом на оси канала.

Сформулируем соответствующую краевую задачу, точное решение которой выражается формулами (27). Область решения представляет собой прямоугольник с шириной l и высотой H (в расчетах брались $H = 1$). Пусть на нижней (входной) границе в качестве краевого условия заданы компоненты скорости в соответствии с (27). На левой и правой границах (твердых стенках) задаются условия прилипания

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0. \quad (28)$$

На верхней (выходной) границе зададим краевое условие в виде

$$V_1 = 0, \quad t_2 = 0. \quad (29)$$

Здесь $t_2 = \sigma_{22} = -p$ — усилие в направлении оси x_2 , действующее на выходной границе, равное давлению с обратным знаком. Без ограничения общности можно считать, что $p = 0$, так как давление — величина аддитивная.

В результате решения сформулированной задачи непрямым методом граничных элементов на выходной границе должен получаться профиль скорости V_2 , близкий к (27).

Для вычисления интегралов $\int_{\Omega} v_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z)$, $\int_{\Omega} t_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z)$ разобьем область решения на прямоугольники $\Delta\Omega^l$ сеткой прямых, параллельных осям координат. В каждом прямоугольнике интегралы $\int_{\Delta\Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z)$, $\int_{\Delta\Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z)$ будем вычислять по

36-точечным формулам Гаусса вида

$$\int_{\Delta\Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z) = \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{k=1}^6 \sum_{m=1}^6 A_k A_m v_{ij}(x_0^p, z_1^m, z_2^k),$$

$$\int_{\Delta\Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z) d\Omega(z) = \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{k=1}^6 \sum_{m=1}^6 A_k A_m t_{ij}(x_0^p, z_1^m, z_2^k),$$
(30)

где A_k, A_m — весовые коэффициенты; z_1^m, z_2^k — точки Гаусса; h_1, h_2 — поперечный и продольный размеры прямоугольника $\Delta\Omega^l$ [9]. Формулы (30) будем единообразно использовать как для областей $\Delta\Omega^l$, не содержащих точку x_0^p , так и для приграничных ячеек, у которых на одной из сторон находится эта точка.

В данном случае распределение плотности внутренних источников

$$\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} [2(1 - B)e_{ij}]$$
(31)

можно вычислить аналитически с использованием (27). Тогда будем иметь

$$\Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = \frac{4(2n + 1)}{n} \left\{ \left[\frac{2(2n + 1)}{n} \right]^{n-1} - \frac{|1 - 2x_1|^{\frac{1-n}{n}}}{n} \right\}.$$
(32)

Выражения (32) вычисляются в центрах прямоугольников $\Delta\Omega^l$, умножаются на (30) и суммируются по всем l . В результате формируется система линейных алгебраических уравнений (24), решение которой позволяет по формулам (20) вычислить не известные заранее значения скоростей на выходной границе.

Для решения задачи составлена программа расчета. Результаты вычислений приведены в табл. 1. Здесь

$$E_1 = \max_{1 < q < nb} |V_2^q - \bar{V}_2^q|, \quad E_2 = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{nb} (V_2^q - \bar{V}_2^q)^2}{nb}}, \quad E_3 = \max_{1 < q < nb} \left| \frac{V_2^q - \bar{V}_2^q}{V_2^q} \right|, \quad \%$$

— отклонения приближенного решения от точного в нормах C и L_2 (максимальное и среднеквадратическое), а также относительное отклонение; V_2^q — точные значения скоростей в соответствии с (27); \bar{V}_2^q — вычисленные значения скоростей; nb — количество граничных элементов на выходной границе; $nm = 4nb$ — общее количество элементов. Причем на всех четырех сторонах области течения количество элементов одинаково и равно nb . Коэффициент нелинейности $n = 0.5$. Результаты вычислений показывают, что разработанный метод обладает аппроксимационной сходимостью и позволяет получать решения с точностью менее 1% уже при $nm = 32$.

Таблица 1. Результаты расчетов для коэффициента нелинейности $n = 0.5$

nm	8	16	32	64	128	256
E_1	4.310^{-7}	1.210^{-2}	1.310^{-2}	5.910^{-3}	2.610^{-3}	1.310^{-3}
E_2	4.310^{-7}	1.110^{-2}	8.210^{-3}	3.610^{-3}	1.510^{-3}	6.010^{-4}
$E_3, \%$	3.710^{-5}	1.5	9.710^{-1}	8.810^{-1}	7.610^{-1}	7.310^{-1}

Таким образом, использование квадратур Гаусса для вычисления интегралов $\int_{\Delta\Omega^l} v_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$ и $\int_{\Delta\Omega^l} t_{ij}(x_0^p, z^l) d\Omega(z^l)$ в задачах о течении неньютоновской жидкости со свободной поверхностью вполне обоснованно.

Однако при решении реальных задач о течении нелинейно-вязких жидкостей воспользоваться заранее известным аналитическим выражением для распределения плотности внутренних источников, как в данном случае, не представляется возможным. Поэтому описанный выше численный алгоритм был также подвергнут проверке на аппроксимационную сходимость при условии, что плотность внутренних источников Ψ_i первоначально неизвестна и определяется в ходе расчетов численно с использованием выражения (31). В таком случае организуется полный итерационный процесс в соответствии с методом простой итерации, как было отмечено выше. Плотность внутренних источников Ψ_i на первой итерации принимается равной нулю, и решается тестовая задача о течении в канале для ньютоновской жидкости. Далее по вычисленному полю скоростей и (31) вычисляются Ψ_i во всех центрах прямоугольников с использованием конечно-разностных разложений производных, входящих в (31), эти значения умножаются на выражения (30), и первоначальная система линейных алгебраических уравнений дополняется учетом внутренних нелинейных источников в правой части (24). Решение полученной таким образом системы дает новое распределение скоростей и, в свою очередь, новые Ψ_i . Процесс повторяется до установления Ψ_i и скоростей. Сходимость процесса определялась в ходе вычислений с точностью до $\epsilon = 10^{-8}$. Решения, полученные в ходе численного эксперимента, сопоставлялись с аналитическими решениями для профиля скорости в диапазоне изменения коэффициента нелинейности n от 0.1 до 1.5. Сравнение с аналитическим решением выполнялось, как и прежде, в нормах E_1, E_2, E_3 . Наилучшая аппроксимационная сходимость в нормах E_1, E_2 ($E_1 \sim 10^{-3}, E_2 \sim 10^{-4}$) достигалась при значениях коэффициента нелинейности в диапазоне $0.5 \leq n \leq 1.3$, а в норме E_3 ($E_3 \sim 1\%$) — при $0.8 \leq n \leq 1.3$; при $0.5 \leq n \leq 0.7$ $E_3 = 1-5\%$. Однако при $n < 0.5$, а также при $n > 1.3$ итерационный процесс расходится. В расчетах количество итераций не превышало 50, в большинстве расчетов процесс сходимости завершался гораздо раньше.

В табл. 2 представлены результаты расчета для коэффициента нелинейности $n = 1.2$. Как и в предыдущем тесте, здесь $nm = 4nb$. Характер сходимости итерационного процесса иллюстрируется рис. 2–4.

Следует отметить, что в данном случае оценка результатов в нормах E_1, E_2 является более репрезентативной, а столь высокие значения относительной погрешности E_3 связаны с особенностью решения. Так, с увеличением числа граничных элементов значение скорости v_2 на элементах, прилегающих к стенке, все более стремится к нулю (на стенке — условия прилипания), а потому оценка точности полученного решения по E_3 затруднена.

Результаты решения тестовой задачи доказывают эффективность разработанного метода в широком диапазоне изменения коэффициента нелинейности $0.5 \leq n \leq 1.3$. В то же

Таблица 2. Аппроксимационная сходимость итерационного процесса, $n = 1.2$

nb	5	9	17	33	65
E_1	2.0810^{-2}	7.2910^{-3}	2.6310^{-3}	2.3110^{-3}	1.6110^{-3}
E_2	1.3610^{-2}	3.9610^{-3}	1.3710^{-3}	6.5810^{-4}	3.1810^{-4}
$E_3, \%$	1.42	0.48	0.83	1.38	1.90

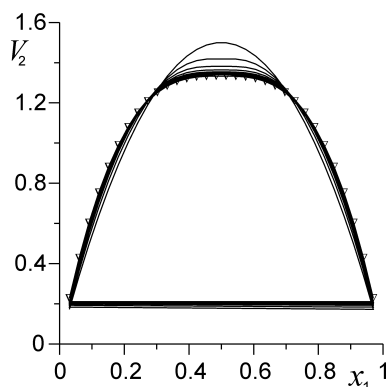


Рис. 2. Профиль скорости $V_2(x_1)$, $n = 0.5$, треугольниками отмечено аналитическое решение.

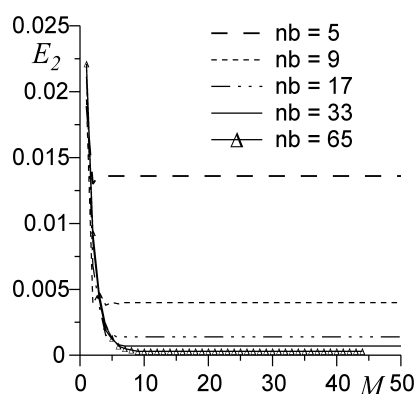


Рис. 3. Итерационная сходимость в норме E_2 , $n = 1.2$, M — число итераций.

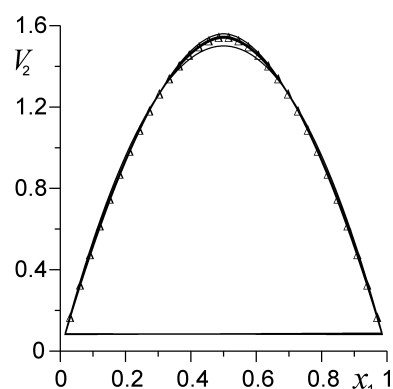


Рис. 4. Профиль скорости $V_2(x_1)$, $n = 1.2$, треугольниками отмечено аналитическое решение.

время необходимо отметить, что поведение полимерных масс, используемых в химической технологии, удовлетворительно описывается уравнением (1) с коэффициентом нелинейности $0.7 \leq n \leq 0.9$. Это позволяет сделать вывод о возможности применения непрямого метода граничных элементов в представленном варианте для решения более сложных задач, в частности для моделирования течения неньютоновской среды в объемном смесителе.

Список литературы

- [1] ORR F.M., SCRIVEN L.E. Rimming flow: numerical simulation of steady viscous free surface flow with surface tension // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 84. P. 145–165.
- [2] HAJI-SHEICH A., LAKSHIMANARAYAN R., LOU DAVID Y.S. Contined flow in a partially-filled rotating horizontal culinder // Trans. ASME: J. Fluid Eng. 1985. Vol. 106, N 5. P. 270–278.
- [3] ШРАГЕР Г.Р., ШТОКОЛОВА М.Н., ЯКУТЕНОК В.А. и др. Моделирование вязкого течения со свободной поверхностью внутри вращающегося горизонтального цилиндра // Теоретические основы химической технологии. 2005. Т. 39, № 3. С. 303–309.
- [4] JOHNSON R.E. Steady-state coating flows inside a rotating horizontal cylinder // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 190. P. 312–342.

- [5] FOMIN S., WATTERSON J., RAGHUNATHAN S., HARKIN-JONES E. The run-off condition and hydraulic jump in rimming flow of a non-Newtonian fluid // Proc. of the ASME 2001 Fluids Eng. Division Summer Meeting. New Orleans, 2001. Paper FEDSM 2001-18186.
- [6] ROSS A.B., WILSON S.K., DUFFY B.R. Thin-film flow of a viscoplastic material round a large horizontal stationary or rotating cylinder // J. Fluid Mech. 1991. Vol. 39. P. 137–187.
- [7] FOMIN S., HASHIDA T., WATTERSON J., Fundamentals of steady-state non-Newtonian rimming flow // J. of Non-Newtonian Fluid Mech. 2003. Vol. 11. P. 19–40.
- [8] ШРАГЕР Г.Р., КОЗЛОБРОДОВ А.Н., ЯКУТЕНОК В.А. Моделирование гидродинамических процессов при переработке полимерных материалов. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 219 с.
- [9] БРЕББИА К., ВРОУБЕЛ Л., ТЕЛЛЕС Ж. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
- [10] БАТТЕРФИЛД Р., БЕНЕРДЖИ П. Методы граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 494 с.
- [11] ШУЛЬМАН З.П., БАЙКОВ В.П. Реодинамика и теплообмен в пленочных течениях. Минск: Наука и техника, 1979. 296 с.
- [12] ЛАДЫЖЕНСКАЯ О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

Поступила в редакцию 25 мая 2006 г.