

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПАРОГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ*

К. Е. АФАНАСЬЕВ, И. В. ГРИГОРЬЕВА

Кемеровский государственный университет, Россия

e-mail: afa@kemsu.ru, irene@kemsu.ru

This work is devoted to numerical investigation of the three-dimensional gas-vapor bubble dynamics using boundary integral technique. Bubble oscillations in an unbounded fluid and interaction of a bubble with various inclined solid walls are investigated numerically.

Введение

Описанная в настоящей работе модель применяется для исследования различных, не похожих на первый взгляд явлений. С одной стороны, рассматривается динамика подводных взрывов, с другой — изучается динамика одной кавитационной полости. Применимость данной модели к их исследованию обсуждается в работах [1, 2]. Что же объединяет эти столь разные на первый взгляд явления? Это возникающие кумулятивные эффекты. Пузырь, развивающийся из кавитационного зародыша (если это кавитационный пузырек) или образующийся при взрыве заряда (например, при подводном взрыве), в процессе своего роста, как правило, сохраняет форму, близкую к сферической. Достигнув наибольшего объема, пузырь переходит в фазу замыкания. При отсутствии факторов, нарушающих сферическую симметрию газового пузыря, в нем могут наблюдаться пульсации, когда фаза расширения несколько раз сменяется фазой замыкания. Близость твердой границы и (или) действие силы тяжести нарушают одномерность течения, даже если в момент максимального расширения полость была сферической.

В ряде случаев в процессе замыкания пузыря формируется струйка жидкости, внедряющаяся в пузырь до момента касания его противоположной стенки. Такая струйка может двигаться в сторону стенки со скоростью порядка сотен, а при особых условиях даже более тысячи метров в секунду. Частицы на дальней от стенки поверхности пузыря, если струйка направлена к стенке, получают наибольшее ускорение, т. е. возникает классический кумулятивный эффект.

Предположение, что механизм разрушения мишеней определяется именно воздействием высокоскоростной кумулятивной струи, формирующейся на стадии замыкания пузыря, не подтвердилось в осесимметричной постановке, когда силы тяжести и силы Бьеркнеса действуют по оси симметрии в одном или противоположных направлениях [3]. Поэтому

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант № МК-3549.2005.1).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

актуальной задачей является определение характеристик струи, таких как ее направление, скорость, высота и характер развития, для анализа эрозийного эффекта в 3d-случае.

В настоящей работе описан метод оценки урона, наносимого пузырьем твердой стенке, и найдены размерные величины для различных типов пузырей.

Исследование задачи о динамике пузыря имеет давнюю историю [4]. При ее решении применялись как теоретический, так и экспериментальный подходы, на более поздних этапах приоритетным подходом стал численный эксперимент. В первую очередь необходимо упомянуть новаторскую работу [5], следует также отметить работы российской школы, а именно [1, 6 и 7].

В настоящей статье большое внимание уделено описанию численного алгоритма. Сегодня расчет пространственной (трехмерной) задачи уже не лежит за пределами возможностей современных компьютеров и, более того, не является чем-то экстраординарным. Однако как сам расчет пространственной задачи, так и анализ результатов все еще остается достаточно сложным и трудоемким процессом. В связи с этим число работ по исследованию динамики пространственных пузырей по сей день невелико. В этом контексте необходимо упомянуть, блестящие работы [5, 8–10]. Ряду авторов удалось осуществить переход от кавитирующего пузыря к тороидальному в осесимметричной постановке, как, например, в статьях [11, 12], где для решения задачи о динамике пространственных пузырей используется метод граничных элементов (МГЭ) на основе третьей формулы Грина. В силу сложности задачи набор методов, применяемых к ее решению, весьма разнообразен. Использование метода конечных элементов для задач эволюции пузыря описано в работах [13, 14], метода объемов жидкости (volume-of-fluid method) — в [15], метода Лагранжа — Томсона — в [16], метода обобщенных вихрей (generalized vortex method) — в [17]. Поскольку представленная работа начата достаточно давно [18, 19], к настоящему времени численный алгоритм исследован досконально, опробованы различные методы построения поверхностных сеток, нахождения интегралов, решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), отработаны методы нахождения поля скоростей. Методика движения по временной координате взята из реализации алгоритма осесимметричной задачи [20], где она хорошо себя зарекомендовала. Консервативность численного алгоритма отслеживается путем контроля выполнения закона сохранения полной энергии.

1. Постановка задачи

В пространстве R^3 точек $\bar{x} = (x, y, z)$ рассматривается область $\Omega(t)$, заполненная идеальной несжимаемой жидкостью, ограниченная гладкими поверхностями. Здесь $\Gamma(t)$ — граница пузыря, S — твердая стенка, $Q(t)$ — область пузыря (рис. 1). Давление парогАЗОВОЙ смеси в пузыре складывается из давления насыщенных паров p_v и давления газа в пузыре, который, как предполагается, ведет себя адиабатически, $p_g = p_0(V_0/V(t))^\lambda$. Мы пренебрегаем диффузией газа через стенки пузыря, таким образом, на границе $\Gamma(t)$ давление $p_\Gamma = p_v + p_g$.

В начальный момент времени пузырь представляет собой сферу S_0 радиуса R_0 с центром в начале координат. Из экспериментальных данных известно, что пузырь сохраняет близкую к сферической форму большую часть времени своего существования. Постановка задачи в безразмерных переменных имеет следующий вид. Потенциал поля скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad x \in \Omega(t), \quad (1)$$

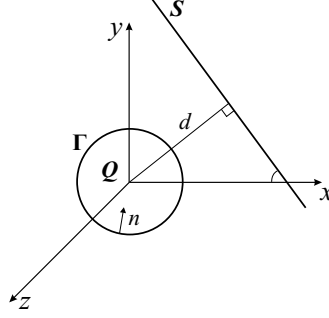


Рис. 1. Схема взаимного расположения стенки и пузыря.

а также кинематическому и динамическому условиям на свободной границе:

$$\frac{dx}{dt} = \nabla\varphi, \quad x \in \Gamma(t); \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \alpha z - \beta \left(\frac{V_0}{V}\right)^\lambda, \quad x \in \Gamma(t). \quad (3)$$

В качестве размерных величин в данном случае используются R_m — максимальный радиус пузыря при его расширении в безграничной жидкости в отсутствие сил тяжести, а также $\sqrt{\Delta p/\rho}$, где $\Delta p = p_\infty - p_v$, ρ — плотность жидкости. Такой способ перехода к безразмерным переменным приводится, в частности, в [7, 21]. В уравнение (3) введены безразмерные параметры: $\alpha = R_m \rho g / \Delta p$ — коэффициент плавучести, регулирующий действие силы тяжести; g — ускорение свободного падения; $\beta = p_0 / \Delta p$ характеризует начальное давление газа в пузыре.

На твердой границе S потенциал удовлетворяет условию непротекания

$$(\nabla\varphi, \bar{n}) = 0, \quad x \in S, \quad (4)$$

а также условию на бесконечности

$$|\nabla\varphi| \rightarrow 0, \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Кроме того, необходимо задать положение свободной границы в начальный момент времени $t = 0$ и распределение потенциала на ней

$$\Gamma|_{t=0} = \Gamma_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi(0, \bar{x}). \quad (6)$$

Таким образом, краевая задача об эволюции парогазового пузыря описывается уравнением (1) с краевыми (2)–(5) и начальными (6) условиями. Постановка задачи — традиционная для описываемых течений. Необходимо определить положение свободной границы и распределение потенциала на ней во все последующие моменты времени. Задача является нелинейной в силу нелинейности динамического условия, а также заранее не известного положения свободной границы при $t > 0$.

2. Численное моделирование

Нелинейная краевая задача (1)–(6) сводится к последовательности линейных задач на каждом временном шаге. Для этого в граничных условиях (2) и (6) делается переход к

конечно-разностным представлениям производных по времени с переменным шагом Δt_j , где j — номер шага по времени. Шаг по времени выбирается автоматически исходя из условия, что узлы сетки не могут переместиться на расстояние больше заданного:

$$\Delta t_j \leq \frac{\zeta l_{\min}^j}{\max_i |\Delta \varphi(\bar{x}_i, t_j)|}.$$

Здесь i — номер узла сетки; l_{\min}^j — наименьшая длина ребра; ζ — эмпирический коэффициент, зависящий от типа сетки и подбираемый так, чтобы расчетное время коллапса пузыря в задаче Рэлея [7] совпадало с аналитическим. Например, для сетки первого типа из 602 узлов и 1200 элементов $\zeta = 0.0102$, а для сетки второго типа, состоящей из 642 узлов и 1280 элементов, $\zeta = 0.0168$.

Таким образом, временной шаг напрямую зависит от вида сетки, аппроксимирующей свободную поверхность, а также от скорости движения свободной границы. Подобная методика движения по временной координате описана в работе [22]. Естественно, что при этом существуют величины Δt_{\max} и Δt_{\min} , подобранные также эмпирически, ограничивающие шаг по времени как сверху, так и снизу, в нашем случае $\Delta t_{\min} = 0.0001$ и $\Delta t_{\max} = 0.01$.

Для решения задачи (1) с граничными условиями (4), (5) методом граничных элементов на каждом временном шаге в качестве основного соотношения используется третья формула Грина

$$C(x)\varphi(x) + \int_{\Gamma} \varphi(x, \xi)q^*(x, \xi)d\Gamma(\xi) = \int_{\Gamma} q(x, \xi)\varphi^*(x, \xi)d\Gamma(\xi), \quad (7)$$

где $q = \partial\varphi/\partial n$; φ^* — фундаментальное решение уравнения Лапласа, которое в пространственном случае записывается в виде $\varphi^*(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{\xi}|}$, \bar{x} — текущая точка на границе области Γ , $\bar{\xi}$ — точка наблюдения на границе Γ ; $q^* = \partial\varphi^*/\partial n$.

Если рассматривается эволюция пузыря около плоской твердой стенки, функция Грина φ^* состоит из источника, находящегося в точке ξ , и источника в точке ξ' , которая расположена симметрично ξ относительно границы Γ :

$$\varphi^*(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\bar{x} - \bar{\xi}|} + \frac{1}{|\bar{x} - \bar{\xi}'|} \right).$$

Таким образом, условие непротекания на твердой границе (4) выполняется автоматически, что позволяет существенно снизить объем вычислительной работы, необходимой для решения задачи. В случае эволюции пузыря около угловой твердой стенки можно также выписать функцию Грина, обеспечивающую автоматическое выполнение условия непротекания:

$$\varphi^*(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|\bar{x} - \bar{\xi}|} + \frac{1}{|\bar{x} - \bar{\xi}'|} + \frac{1}{|\bar{x} - \bar{\xi}''|} + \frac{1}{|\bar{\xi}' - \bar{\xi}''|} \right).$$

Здесь $\bar{\xi}'$ — точка, симметричная $\bar{\xi}$ относительно одной стенки, образующей угол; $\bar{\xi}''$ — точка, симметричная относительно другой стенки. Коэффициент $C(\bar{x}) = \frac{\omega}{2\pi}$, ω представляет собой телесный угол, под которым поверхность видна из точки \bar{x} .

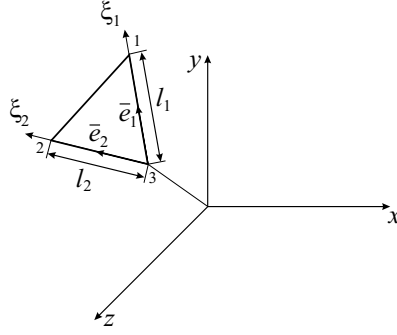


Рис. 2. Локальная система координат на элементе.

Поверхность пузыря Γ аппроксимируется набором плоских треугольных элементов. Рассмотрим два различных подхода к построению поверхностной сетки граничных элементов. В первом подходе исходная поверхность разбита на отдельные треугольные опорные зоны. Каждая опорная зона, отображаясь на каноническую область, поделена на заданное число элементов. Обратное преобразование позволяет получить требуемую поверхностную сетку [23]. Число узлов N и элементов M определяется количеством зон и разбиением каждой отдельной зоны. Если первый подход является универсальным, то второй разработан специально для построения сетки на поверхности сферы. Начальным приближением сферы для второго алгоритма является икосаэдр, каждое его ребро делится пополам новым узлом, полученные узлы сдвигаются на поверхность сферы и объединяются в новый элемент. На каждом новом уровне дискретизации каждый элемент предыдущего уровня преобразуется в четыре новых элемента. Количество узлов и элементов в этом случае увеличивается чрезвычайно быстро: $N = 5 \cdot 2^{2n-1} + 2$, $M = 5 \cdot 2^{2n}$, где n — уровень дискретизации. Таким образом, удастся получить всего одну приемлемую расчетную сетку, состоящую из 642 узлов и 1280 элементов. Преимущество второго подхода заключается в том, что построенная с его помощью сетка более равномерная, так как отношение наибольшей площади элемента к наименьшей в первом случае не превышает 1.85, во втором — 1.3. Тем не менее использование более равномерной сетки дает незначительные преимущества даже для расчетов с существенной деформацией границы пузыря.

Будем считать, что на элементах функции φ и q изменяются линейно. На элементах вводится локальная система координат (рис. 2), тогда $\mathbf{r} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k} + l_1\xi_1\mathbf{e}_1 + l_2\xi_2\mathbf{e}_2$, где l_1, l_2 — длины сторон элемента; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — базисные векторы введенной системы координат, изменяющиеся вдоль сторон элемента от 0 до 1; $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$. Интегральные коэффициенты основного соотношения МГЭ выпишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h_{ij}^k &= -\frac{S_j}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \xi_k \frac{\cos\alpha(x - x_i) + \cos\beta(y - y_i) + \cos\gamma(z - z_i)}{|\bar{x} - \bar{x}_i|^3} d\xi_1 d\xi_2 = \\
 &= -\frac{S_j}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \xi_k \frac{a_7\xi_1 + a_8\xi_2 + a_9}{(a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2 + a_4\xi_1 + a_5\xi_2 + a_6)^{3/2}} d\xi_1 d\xi_2, \\
 g_{ij}^k &= \frac{S_j}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{\xi_k}{|\bar{x} - \bar{x}_i|} d\xi_1 d\xi_2 =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{S_j}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{\xi_k}{(a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2 + a_4\xi_1 + a_5\xi_2 + a_6)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2.$$

Здесь i — номер точки наблюдения, $i = \overline{1, N}$; j — номер элемента, $j = \overline{1, M}$; S_j — площадь j -го элемента; $k = \overline{1, 3}$ — номер узла в локальной нумерации узлов на элементе; $\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — вектор нормали к j -му элементу; коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= |\bar{x}_1 - \bar{x}_3|^2, & a_2 &= |\bar{x}_2 - \bar{x}_3|^2, & a_3 &= 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3), \\ a_4 &= 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_3 - \bar{x}_i), & a_5 &= 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_3 - \bar{x}_i), & a_6 &= |\bar{x}_3 - \bar{x}_i|^2, \\ a_7 &= (\bar{x}_1 - \bar{x}_3)\bar{n}, & a_8 &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)\bar{n}, & a_9 &= (\bar{x}_3 - \bar{x}_i)\bar{n}, \\ a_{10} &= 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_i), & a_{11} &= 2(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_i), \\ a_{12} &= 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_i), & a_{13} &= |\bar{x}_1 - \bar{x}_i|^2, \\ a_{14} &= 2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{x}_1 - \bar{x}_i), & a_{15} &= |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|^2. \end{aligned}$$

В случае, когда x_i не принадлежит элементу Γ_j , интегралы h_{ij}^k и g_{ij}^k являются регулярными, а внутренние интегралы определяются аналитически, после чего получившиеся интегралы вычисляются квадратурами Гаусса по семи точкам. В качестве примера для интеграла g_{ij}^1 приведем выражение

$$g_{ij}^1 = \frac{S_j}{2\pi\sqrt{a_1}} \int_0^1 \xi_1 \ln \left(\frac{a_{10} + a_{11}\xi_1 + 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_{13} + a_{14}\xi_1 + a_{15}\xi_1^2}}{a_4 + a_3\xi_1 + 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_6 + a_5\xi_1 + a_2\xi_1^2}} \right) d\xi_1.$$

Когда точка x_i — одна из вершин элемента Γ_j , интегралы h_{ij}^k и g_{ij}^k обладают особенностью. Интегралы h_{ij}^k имеют сильную особенность $(1/|x - x_i|^3)$, но вносят нулевой вклад в результирующую систему уравнений, так как в числителе ядра стоит скалярное произведение вектора, лежащего в плоскости элемента, на ортогональный ему вектор \mathbf{n} . Интегралы g_{ij}^k имеют особенность вида $(1/|x - x_i|)$. В этом случае внутренние интегралы находятся аналитически, после чего неопределенности раскрываются по правилу Лопиталля и получившиеся интегралы вычисляются также семиточечными квадратурами Гаусса. Сингулярный интеграл g_{ii}^1 , в свою очередь, будет иметь вид

$$\begin{aligned} g_{ii}^1 &= \frac{S_j}{2\pi\sqrt{a_2}} \int_{-1}^1 \xi_2 \ln(2a_2 + a_{12}\xi_2 + 2\sqrt{a_2}\sqrt{a_2 + a_{12}\xi_2 + a_{15}\xi_2^2}) d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{S_j}{2\pi\sqrt{a_2}} \left(\frac{1}{2} \ln(2\sqrt{a_1 a_2} + a_3) + \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Суммируя h_{ij}^k и g_{ij}^k , при соответствующих значениях потенциала и нормальной производной для всех точек наблюдения получим коэффициенты матриц интегральных коэффициентов H_{ij} и G_{ij} . C_i можно найти, используя следующие соображения. Если на границе задать постоянный потенциал $\varphi = \text{const}$, то поток через границу будет равен нулю, $C_i = -\int_{\Gamma} q^*(\bar{x}, \bar{\xi}) d\Gamma(\bar{\xi})$ для ограниченных областей, а $C_i = -\int_{\Gamma} q^*(\bar{x}, \bar{\xi}) d\Gamma(\bar{\xi}) + 1$ для

областей с бесконечной границей. Вычислительные затраты при нахождении пространственных углов таким способом невелики, так как для их получения достаточно суммировать уже вычисленные интегралы H_{ij} . Но в случае, если они определены приближенно, возникает вопрос: а не накапливается ли таким образом погрешность в диагональном элементе H_{ii} ? Но для вычисления интегралов используются квадратурные формулы Гаусса, приводящие к алгоритмам без насыщения, что позволяет избежать ошибок, связанных с машинной арифметикой [24].

Для того чтобы проверить точность расчета диагональных коэффициентов H_{ii} , реализован другой путь, основанный на непосредственном вычислении телесного угла с использованием его определения и соотношения сферической тригонометрии [25]. Сравнение двух описанных способов определения коэффициента показывает, что значения телесного угла при его вычислении обоими способами совпадают не менее чем для пяти значащих цифр, но первый способ требует меньших вычислительных затрат.

Матрица результирующей системы линейных уравнений $AQ = B$ является окончательно заполненной, несимметричной, незнакоопределенной. При расчете тестовых задач использованы как точные методы решения СЛАУ (метод Гаусса с выбором главного элемента), так и итерационные (метод Гаусса — Зейделя, метод нелинейной регуляризации [26]), наиболее же приемлемым оказался метод Гаусса, основанный на выборе главного элемента с последующим итерационным уточнением из библиотеки IMSL Microsoft Fortran Power Station.

Вычислив значения скорости $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\right)$, $i = \overline{1, N}$, в узлах сетки, являющихся стыками плоских треугольных элементов, сможем получить новое положение границы пузыря и распределение потенциала на ней. Рассмотрим алгоритм вычисления скоростей для i -го узла сетки. С этой целью на каждом элементе, одной из вершин которого является i -й узел, вычисляются компоненты скорости в локальной системе координат. В качестве касательных направлений s_j и τ_j (j — номер элемента) выбираются стороны элемента, прилежащие i -му узлу. Производные по этим направлениям находятся как конечные разности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_j} = \frac{\varphi_{m_j} - \varphi_i}{|\bar{s}_j|}, \quad \bar{s}_j = (\bar{x}_{m_j} - \bar{x}_i), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \tau_j} = \frac{\varphi_{k_j} - \varphi_i}{|\bar{\tau}_j|}, \quad \bar{\tau}_j = (\bar{x}_{k_j} - \bar{x}_i),$$

где m_j, k_j — номера двух узлов j -го элемента, третьей вершиной которого является i -й узел. В качестве нормального направления выбирается средний по всем окружающим элементам вектор нормали \mathbf{n} . Нормальная компонента скорости уже получена из МГЭ $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i} = q_i\right)$. После того как получены $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial s_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial \tau_i}\right)$, осуществляется переход к декартовой системе координат, в которой компоненты вектора скорости запишутся как $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\right)$. В качестве результирующих берутся средние по всем окружающим узел элементам значения компонент вектора скорости. Введение весовых коэффициентов, обратно пропорциональных расстояниям до середин окружающих элементов, как это описывается в ряде работ [5], не приводит к увеличению точности при нахождении скоростей.

В данной работе не применялись алгоритмы сглаживания как свободной поверхности, так и значений потенциала на ней, хотя в ряде случаев при расчете развивается численная нестабильность границы и он преждевременно разрушается, сглаживание, вероятно, позволило бы продолжить такие расчеты. Отказ от сглаживающих алгоритмов вызван в первую очередь тем, что их использование вызывает искажение энергетических характеристик [27] и приводит к несоблюдению закона сохранения энергии, который в данном

случае имеет вид [6]

$$3 \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + V \left(1 - \frac{\beta}{1 - \lambda} \left(\frac{V_0}{V(t)} \right)^\lambda \right) + \alpha r_z^c = E, \quad (8)$$

где r_z^c — геометрический центр пузыря; E — полная энергия.

Для проверки работы метода граничных элементов на одном шаге по времени использовалась задача о движении абсолютно твердой сферы в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости [28]. Относительная погрешность при нахождении нормальной скорости для сетки, состоящей из 642 узлов, составила 0.0096, для сетки из 786 узлов — 0.0093. Для верификации численного алгоритма в целом и особенно методики выбора шага по времени использовалась задача Рэлея о замыкании сферически симметричного пузыря в безграничном объеме идеальной несжимаемой невесомой жидкости. Кроме того, проводилось сравнение с расчетами осесимметричной задачи [29].

3. Результаты моделирования

3.1. Пульсации пузыря

Рассмотрим процесс пульсаций газонаполненного сферического пузыря в безграничной невесомой жидкости. Предполагается, что пузырь настолько мал, что действие сил тяжести на него несущественно. В начальный момент времени пузырь радиуса $1R_m$, сохраняя сферическую форму, сжимается до минимального радиуса под действием гидростатического давления. Начальное давление газа, пусть даже небольшое, при уменьшении объема пузыря повышается, противодействуя движущейся границе, замыкание пузыря сменяется расширением, и, наоборот, эволюция пузыря приобретает пульсирующий характер. Движение границы пузыря в этом случае описывается уравнением Рэлея

$$\xi \ddot{\xi} + \frac{3}{2} \dot{\xi}^2 - \beta \xi^{3\lambda} + 1 = 0,$$

где $\xi = R/R_m$ — безразмерный радиус пузыря; $\dot{\xi}$, $\ddot{\xi}$ — безразмерные скорость и ускорение границы пузыря. Г.А. Хорошев [7], приняв для упрощения показатель адиабаты $\lambda = 4/3$, в результате численного интегрирования получил аппроксимирующую зависимость минимального радиуса от параметра газосодержания β (для $\beta > 0.3$):

$$\xi_{\min} \approx \frac{3\beta}{1 + 3\beta - \beta^{3/2}}.$$

Здесь ξ_{\min} — минимальный безразмерный радиус пузыря. Так как данная модель не предусматривает потерь энергии, пульсации пузыря могут продолжаться бесконечно. При численном моделировании удается пройти всего несколько пульсаций, после чего происходит разрушение численного счета из-за развития численной неустойчивости границы.

На рис. 3 приводятся зависимости радиуса пузыря от времени, полученные при численном моделировании процесса пульсаций пузыря для различных значений β (от 0.4 до 0.9). Для расчета использовалась поверхностная сетка, состоящая из 642 узлов и 1280 элементов.

Интересно отметить, что пузырь сохраняет сферическую форму практически все время численного счета, нарушение сферической симметрии возникает и развивается достаточно быстро, что приводит к разрушению расчета. Формы пузыря в моменты достижения минимального и максимального объемов, а также непосредственно перед разрушением расчета для случая $\beta = 0.4$ представлены на рис. 4.

Во всех случаях, за исключением $\beta = 0.4$, развитие неустойчивости происходит на этапе роста пузыря. При увеличении β амплитуда пульсаций пузыря заметно уменьшается и удается получить большее количество пульсаций до момента разрушения расчета. Расчеты

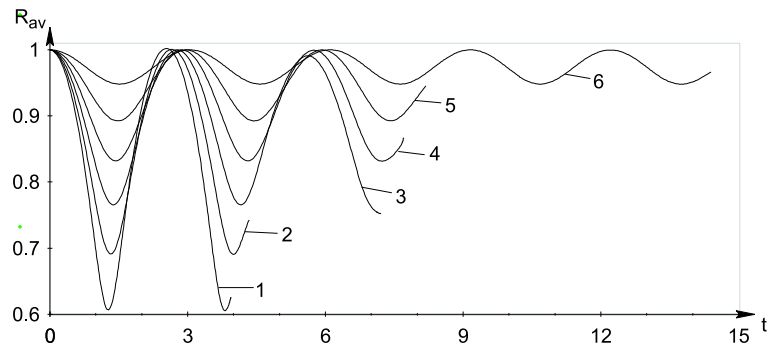


Рис. 3. График зависимости среднего радиуса пузыря от времени для значений параметра газосодержания $\beta = 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9$ (кривые 1–6 соответственно).

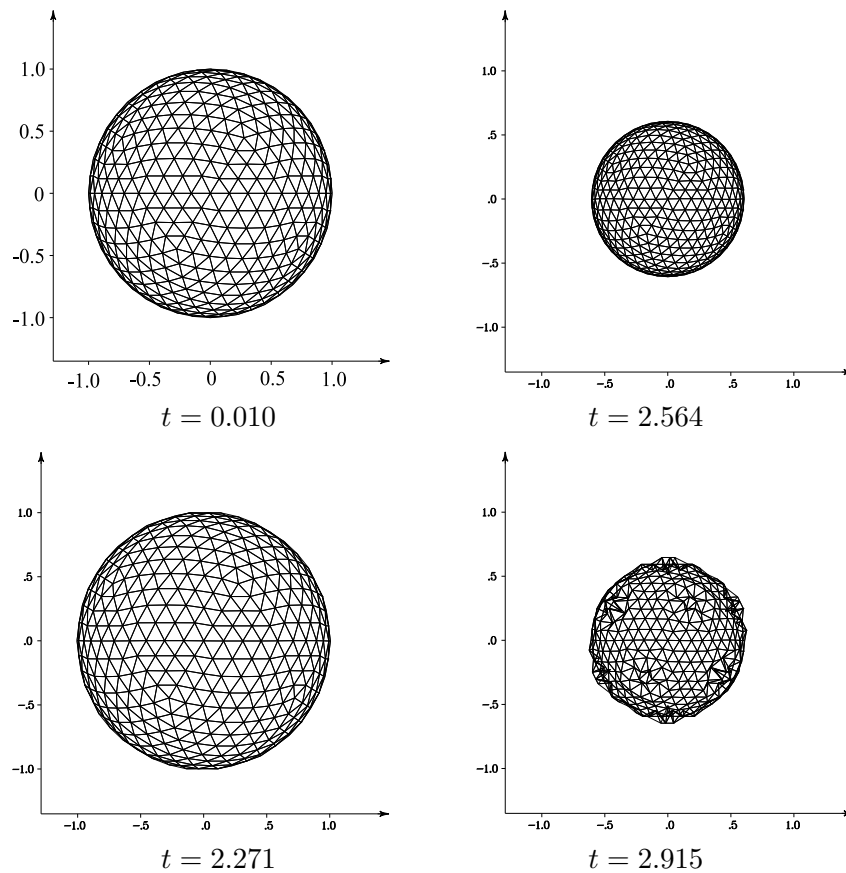


Рис. 4. Пузыри в моменты достижения минимального и максимального объемов перед разрушением расчета для случая $\beta = 0.4$.

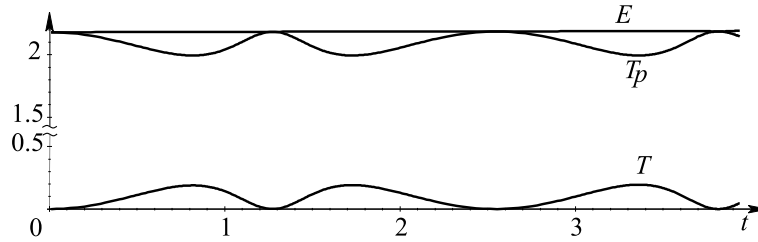


Рис. 5. Пульсации пузыря при $\beta = 0.4$. Закон сохранения энергии. T_p — потенциальная, T — кинетическая и E — полная энергии.

пульсаций с малой амплитудой значительно лучше отвечают аналитическим оценкам минимального радиуса, отклонения от аналитических минимумов радиуса составляют 1.25 % при $\beta = 0.4$ и 0.0 % для $\beta = 0.9$ соответственно при первой пульсации и 1.5 и 0.1 % — при второй. Колебание полной энергии до заметного развития численной неустойчивости во всех случаях не превышает 1 %. Иллюстрация выполнения закона сохранения энергии для случая $\beta = 0.4$ приведена на рис. 5.

В работе [17] метод обобщенных вихрей применен для моделирования динамики пузыря с учетом поверхностного натяжения в продолжительные периоды существования пузыря. Под влиянием малых и средних пульсаций пузырь испытывал несущественные деформации. Описываемый в настоящей статье метод позволяет моделировать эволюцию пузыря в случае его значительной деформации, кроме того, при пульсациях малой амплитуды и для продолжительных периодов существования пузыря.

3.2. Эволюция пузыря около твердой стенки

Рассмотрим эволюцию пузыря около плоских твердых стенок при действии силы тяжести. Совместное влияние твердой стенки и сил плавучести на процесс эволюции пузыря создает значительно более сложные структуры течения. Для всех расчетов, описанных ниже, в начальный момент времени пузырь представляет собой сферу радиуса $R_0 = 0.1R_m$, начальное приближение потенциала берется из задачи Рэлея о движении газового пузыря [7]. Значения параметра плавучести составляют от 0 до 0.2 при различных положениях твердой стенки $\epsilon = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ и расстоянии пузыря от стенки от $1R_m$ до $6R_m$, когда влияние твердой стенки уже фактически незаметно. Наибольший интерес представляют случаи, когда пузырь расположен близко к стенке: $1R_m - 3R_m$. На этапе расширения пузырь, как правило, сохраняет форму, близкую к сферической. На этапе замыкания происходит формирование острых граней или вершин, что приводит к разрушению расчета (рис. 6,а). В ряде случаев наблюдалась тенденция к разделению пузыря на два, но меньшего размера (рис. 6,б). Чаще на этапе замыкания пузыря со стороны, противоположной твердой стенке, формируется высокоскоростная струйка, внедряющаяся в пузырь, в направлении твердой стенки отклоняемая силой тяжести (рис. 6,в и г). Струйка развивается до момента касания противоположной стенки пузыря, за исключением сложных режимов, когда происходит преждевременное разрушение расчета.

При исследовании трехмерной модели наибольший интерес представляет вопрос о направлении развития высокоскоростной струйки на этапе замыкания пузыря. В ряде работ для предсказания направления развития струи используется импульс Кельвина [3, 30]. Этот вопрос исследовался и в настоящей статье, и сделанный вывод совпадает с выводами авторов работы [21]: импульс Кельвина не дает гарантированно верной оценки направле-

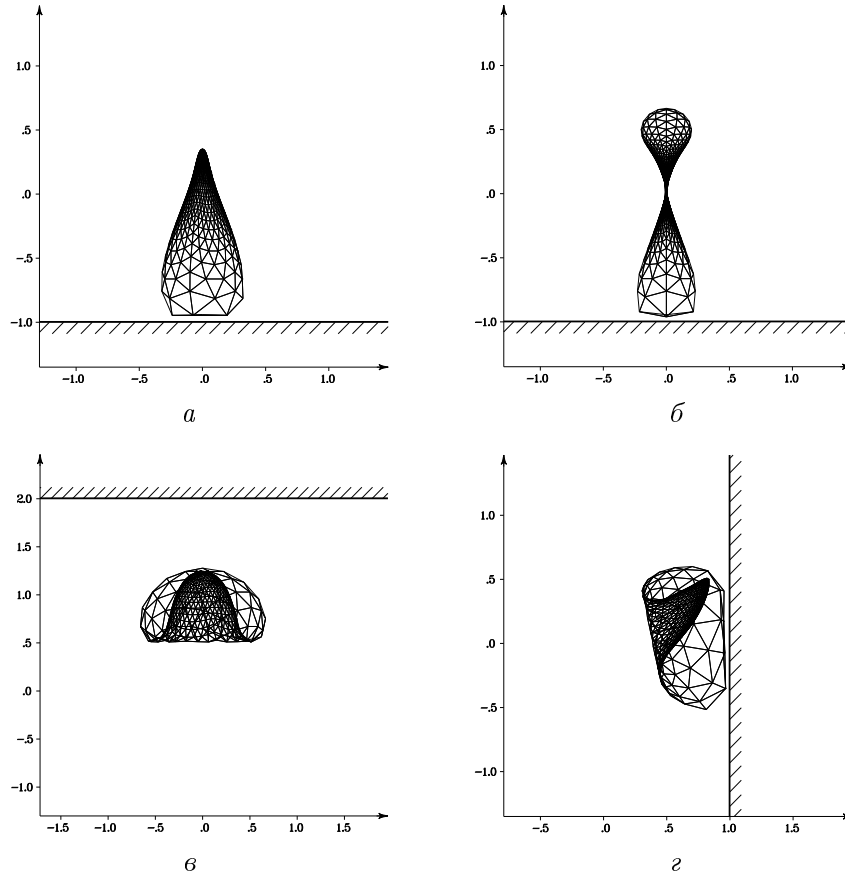


Рис. 6. Форма пузырей в последние моменты существования: $a - \varepsilon = \pi$, $d = 1R_m$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 100$, сетка второго типа $N = 642$, $M = 1280$; $б - \varepsilon = \pi$, $d = 1R_m$, $\alpha = 0.125$, $\beta = 100$, сетка второго типа $N = 786$, $M = 1568$; $в - \varepsilon = 0$, $d = 2R_m$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 100$, сетка второго типа $N = 786$, $M = 1568$; $г - \varepsilon = \pi/2$, $d = 1R_m$, $\alpha = 0.2$, $\beta = 100$, сетка второго типа $N = 642$, $M = 1280$.

ния развития струйки для пузырей, достаточно близко расположенных к твердой стенке ($d < 3R_m$). Интересно, что в случае, когда импульс Кельвина позволяет предсказать, что струя будет направлена от твердой стенки, это предсказание, как правило, оказывается верным, в то время как предсказание о том, что струйка направлена к твердой стенке, зачастую оказывается ошибочным или спорным. Задачей данной работы было получение ряда характеристик струйки, а также размерных величин для различных типов пузырей, как кавитационных, так и формирующихся в результате взрывов различных зарядов.

3.2.1. Коэффициент пробоя струйки

При оценке эрозийного эффекта от струи важны такие параметры, как направление развития струйки, ее длина, скорость движения ее вершины [1]. Глубина проникания кумулятивной струйки в мишень L_p и длина струйки L_j , плотность жидкости ρ_i и плотность материала мишени ρ_m (в данном случае мишень — это твердая стенка) связаны соотношением $L_p = \sqrt{\rho_i/\rho_m} L_j$.

Таким образом, в отсутствие твердой стенки, когда $\sqrt{\rho_i/\rho_m} = 1$, струйка без ощутимой потери скорости пробивает только на свою длину. Вот почему необходимо учитывать наличие прослойки жидкости между пузырем и твердой стенкой. Построив вектор $(x_l - x_h)$, началом которого является вершина струйки x_h , в направлении вектора скоро-

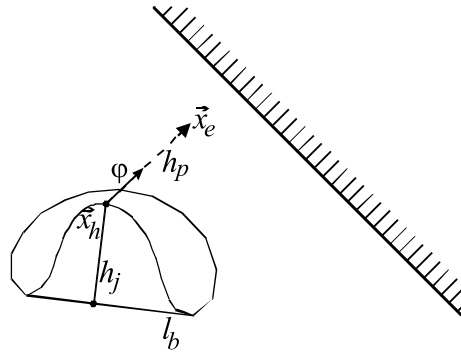


Рис. 7. К вычислению коэффициента пробоя струйки.

сти вершины с длиной, равной высоте струйки $L_j = |x_l - x_h|$, и определив безразмерный коэффициент его вхождения в мишень J_p ($0 \leq J_p \leq 1$), получим уточненное соотношение для $L_p = \sqrt{\rho_i/\rho_m} J_p L_j$ (рис. 7). Струйка не может поразить мишень, не развив необходимой для этого скорости. Таким образом, в случае неотрицательного коэффициента L_p и достаточной скорости струйка поражает твердую стенку.

3.2.2. Эволюция пузыря около наклонных стенок

В качестве примера рассмотрим два положения стенки при минимальной удаленности пузыря от нее $d = 1R_m$, для которых удалось получить ненулевые значения коэффициента пробоя. Первый случай — пузырь развивается над наклонной стенкой ($\epsilon = 3\pi/4$), для всех значений параметра плавучести на этапе замыкания пузыря формируется струйка, внедряющаяся в пузырь. На рис. 8 и 9 приведена форма пузырей для различных моментов времени и значений параметра плавучести. При минимальном значении параметра плавучести $\alpha = 0.025$ на этапе замыкания образуется острая струйка, направленная в сторону твердой стенки, незначительно отклоняемая силой тяжести. Угол градиента скорости с нормалью к стенке составляет 23.4° . В этом случае струйка имеет самую большую скорость для данного положения стенки $9.28\sqrt{\Delta p/\rho}$, длина струйки составляет $0.56R_m$, коэффициент пробоя струйки 0.35. При $\alpha = 0.2$ получаем очень широкую струйку, направление ее развития составляет угол больше 90° с нормалью к твердой стенке 93.6° , эта струйка имеет наименьшую скорость для данного положения стенки. На рис. 10 и 11 приведены графики зависимостей высоты и скорости струйки от времени.

Когда пузырь развивается под наклонной стенкой $\epsilon = \pi/4$, картины течений при различных значениях параметра плавучести различаются уже не так значительно. Формирующиеся на этапе схлопывания пузыря кумулятивные струйки имеют достаточно большую высоту. Так, в случае $\alpha = 0.2$ высота струйки составила $0.72R_m$ (рис. 12 и 13). В данном случае получаются положительные коэффициенты пробоя струйки от 0.94 ($\alpha = 0.025$) до 0.71 ($\alpha = 0.1$), но скорости струйки значительно меньше, чем во всех описанных выше случаях (см. рис. 11). Графики зависимостей высоты и скорости струйки от времени для описанных случаев представлены на рис. 14 и 15.

На основе проведенной серии расчетов получено, что при эволюции парогАЗОВОГО пузыря около плоских твердых стенок ($d = 1R_m$) на этапе его замыкания в большинстве случаев происходит развитие струи жидкости, внедряющейся в пузырь. Данная модель не позволяет продолжать расчет в случае нарушения односвязности области и пересечений границы. Вопрос перехода 3d-пузыря к тору частично обсуждается в [5]. В таблице приве-

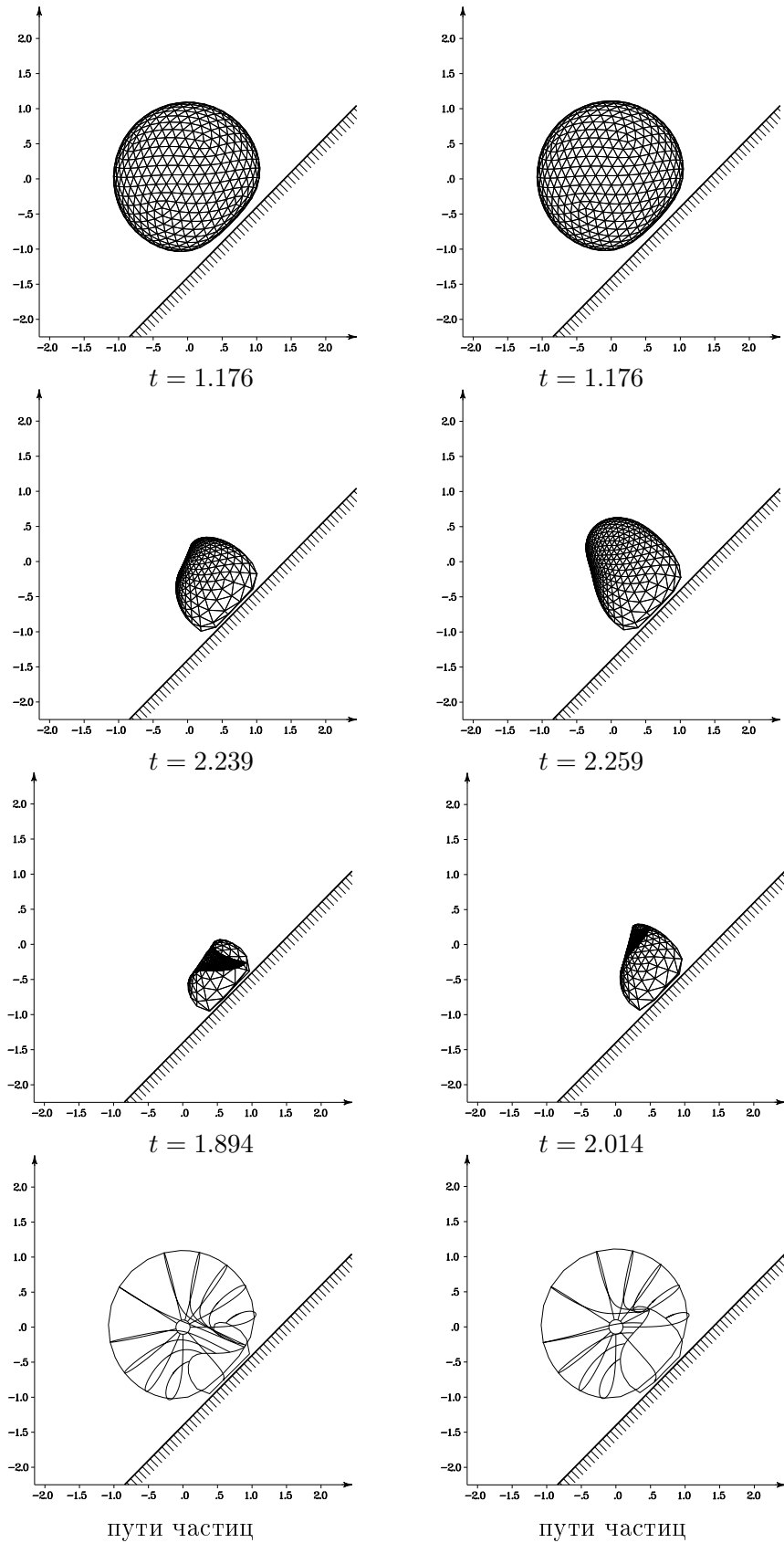


Рис. 8. Форма пузыря при его эволюции около наклонной твердой стенки ($d = 1.0R_m, \epsilon = 3\pi/4$) для различных значений параметра плавучести: $\alpha = 0.025$ (слева), $\alpha = 0.05$ (справа), сетка второго типа $N = 642, M = 1280$.

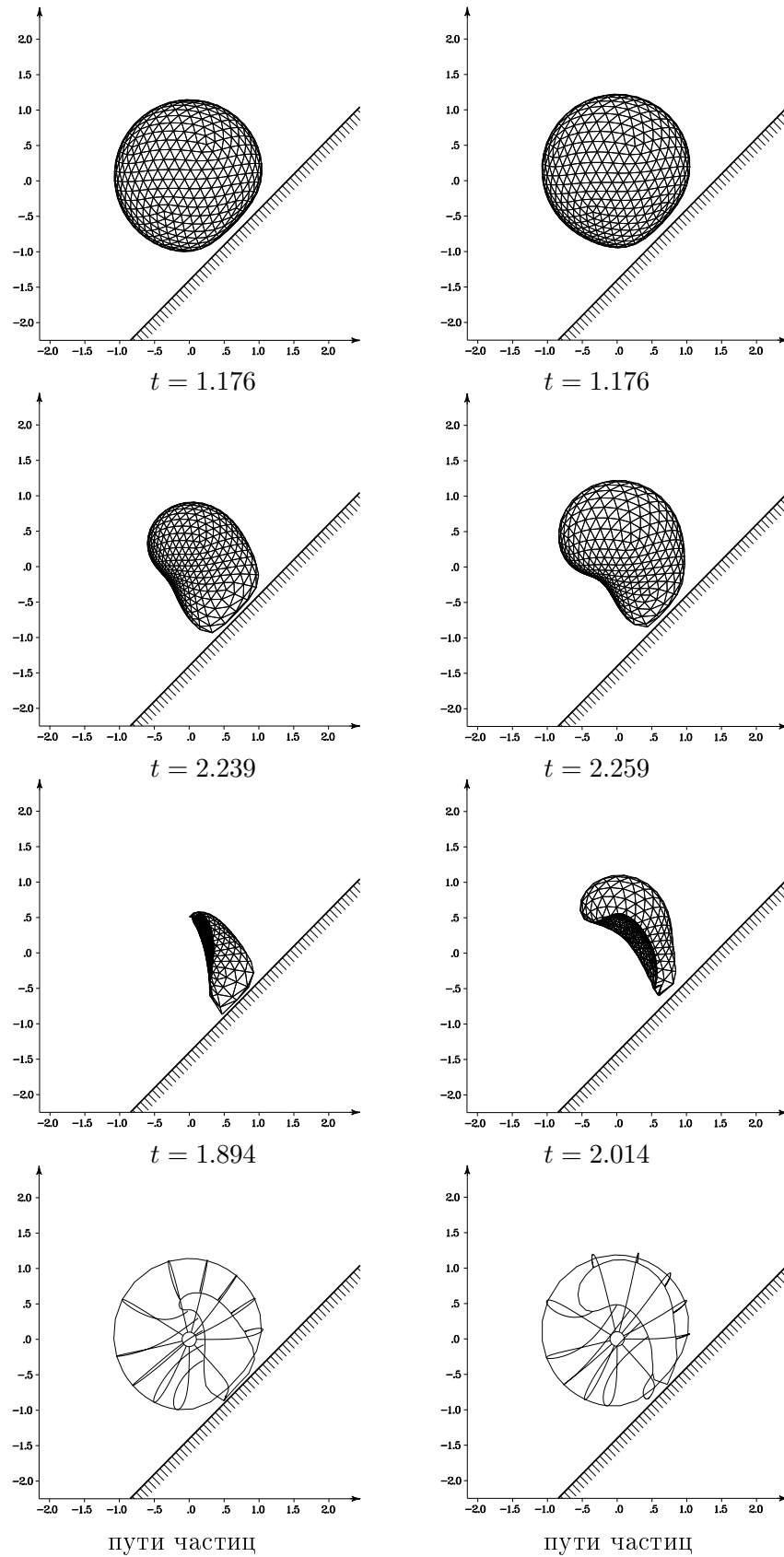


Рис. 9. Форма пузыря при его эволюции около наклонной твердой стенки ($d = 1.0R_m, \epsilon = 3\pi/4$) для различных значений параметра плавучести: $\alpha = 0.1$ (слева), $\alpha = 0.2$ (справа), сетка второго типа $N = 642, M = 1280$.

Безразмерные характеристики пузыря и струйки при эволюции пузыря около твердых стенок на расстоянии $d = 1R_m$ для различных углов наклона стенки и значений параметра плавучести

ϵ	α	H	J_p	θ
π	0.025	0.64	0.96	0
	0.05	0.52	0.49	0
$3\pi/4$	0.025	0.56	0.62	23.4
	0.05	0.22	—	48.6
	0.1	0.25	—	76.5
	0.2	0.39	—	93.6
$\pi/2$	0.025	0.55	0.67	25.2
	0.05	0.36	—	42.3
	0.1	0.41	—	58.5
	0.2	0.62	—	70.2
$\pi/4$	0.025	0.61	0.94	15.3
	0.05	0.56	0.81	23.4
	0.1	0.59	0.71	32.4
	0.2	0.72	0.79	37.8
0	0.025	0.54	0.86	0
	0.05	0.54	0.86	0
	0.1	0.56	0.81	0
	0.2	0.64	0.84	0

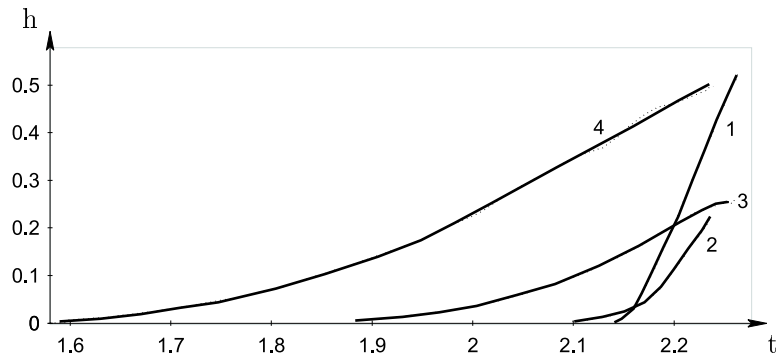


Рис. 10. Зависимость высоты кумулятивной струйки от времени ($d = 1.0R_m, \epsilon = 3\pi/4$) для различных значений коэффициента плавучести: $\alpha = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ (кривые 1–4 соответственно).

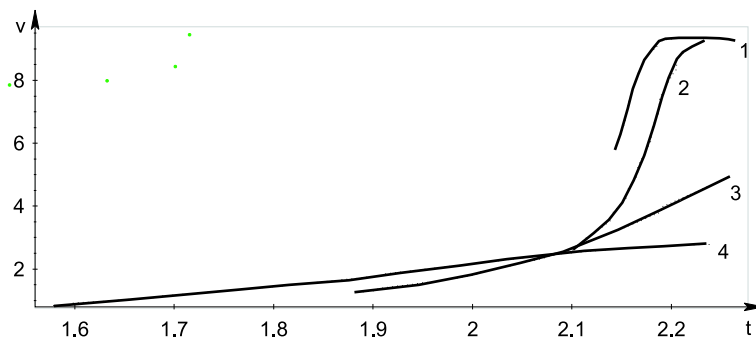


Рис. 11. Зависимость скорости вершины струйки от времени ($d = 1.0R_m, \epsilon = 3\pi/4$) для различных значений коэффициента плавучести: $\alpha = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ (кривые 1–4 соответственно).

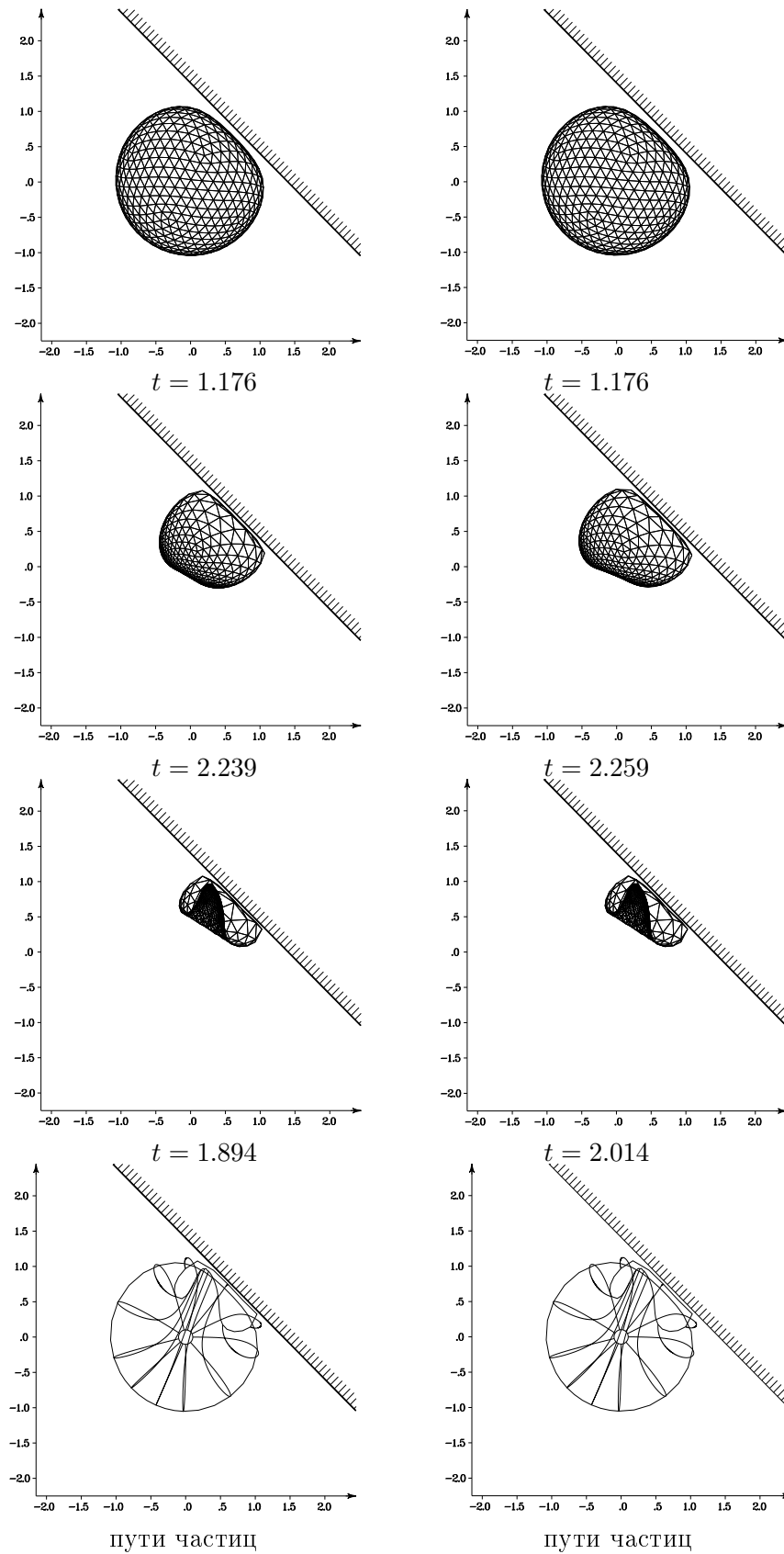


Рис. 12. Форма пузыря при его эволюции около наклонной твердой стенки ($d = 1.0R_m, \epsilon = \pi/4$) для различных значений параметра плавучести: $\alpha = 0.025$ (слева), $\alpha = 0.05$ (справа), сетка второго типа $N = 642, M = 1280$.

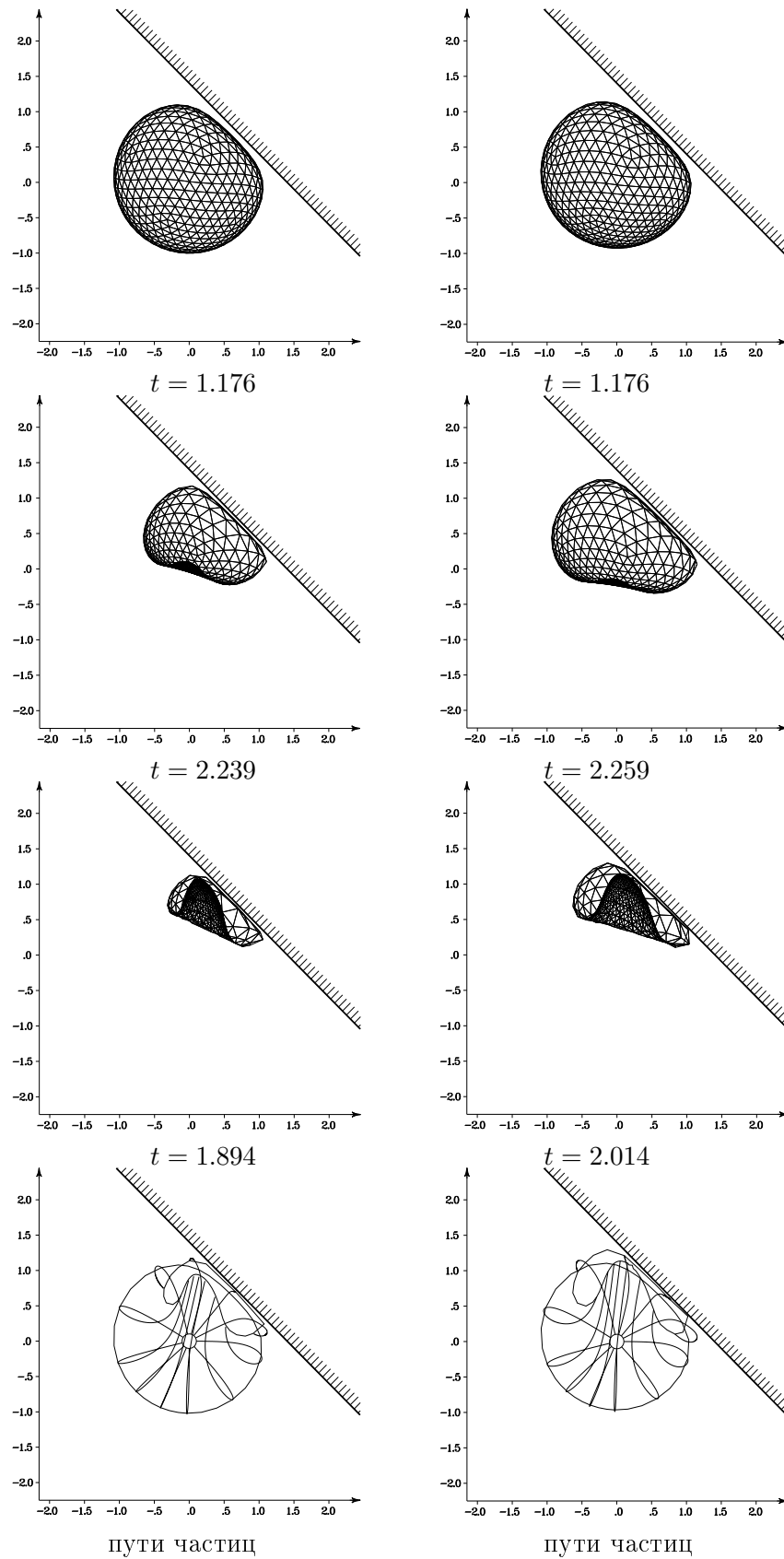


Рис. 13. Форма пузыря при эволюции около наклонной твердой стенки ($d = 1.0R_m$, $\epsilon = \pi/4$) для различных значений параметра плавучести: $\alpha = 0.1$ (слева), $\alpha = 0.2$ (справа), сетка второго типа $N = 642$, $M = 1280$.

дены безразмерные значения высоты струйки, коэффициента пробоя струйки, угла между градиентом поля скоростей и внешней (по отношению к жидкости) нормалью к твердой стенке для расчетов, когда на этапе замыкания формируется кумулятивная струйка. При минимальной удаленности пузыря от стенки ($d = 1R_m$) кумулятивный эффект развивается наиболее ярко, пузырь располагается достаточно близко к твердой стенке, прослойка жидкости между пузырем и стенкой минимальна. Получить ненулевые коэффициенты пробоя струйки удастся только для этого расстояния пузыря от стенки. Максимальная высота струйки получается для случая $\epsilon = \pi/4$, $\alpha = 0.2$, она составляет $0.72R_m$, при этом достигается и наибольшая длина пробоя струйки $J_p L_j = 0.58R_m$. Максимальное значение скорости струйки при $\alpha = 0.05$ равняется $163.6\sqrt{\Delta p/\rho}$.

Для двух кавитационных пузырей и двух подводных взрывов получены максимальные значения скорости движения вершины струйки. Максимальный радиус кавитационных пузырей составил 1.27 и 10 мм. Кроме того, исследовались пузыри, образующиеся при выбросе продуктов детонации в случае подводного взрыва [31]. Рассматривались пузырь, формирующийся при взрыве подводной мины [32], а также пузырь, максимальный радиус которого составляет 115 м, образующийся при взрыве ядерного заряда “Вигвам” мощностью 30 кт [33]. Расчеты показали, что скорость движения струйки в пузыре всегда конечна, максимальная безразмерная скорость струйки составляет $16.26\sqrt{\Delta p/\rho}$, и, как видно из приведенных графиков скоростей струйки (см. рис. 11 и 15), значение скорости, достигнув определенной величины, больше не растет. График скорости образует “полку”, за исключением случаев, когда разрушение расчета происходит на ранних этапах

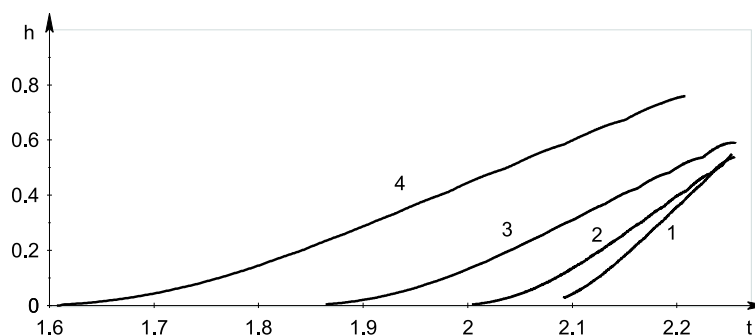


Рис. 14. Зависимость высоты кумулятивной струйки от времени ($d = 1.0R_m$, $\epsilon = \pi/4$) для различных значений коэффициента плавучести: $\alpha = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ (кривые 1–4 соответственно).

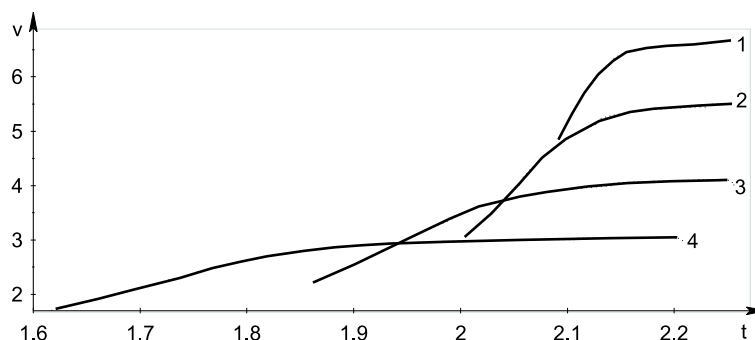


Рис. 15. Зависимость скорости вершины струйки от времени ($d = 1.0R_m$, $\epsilon = 3\pi/4$) для различных значений коэффициента плавучести: $\alpha = 0.025, 0.05, 0.1, 0.2$ (кривые 1–4 соответственно).

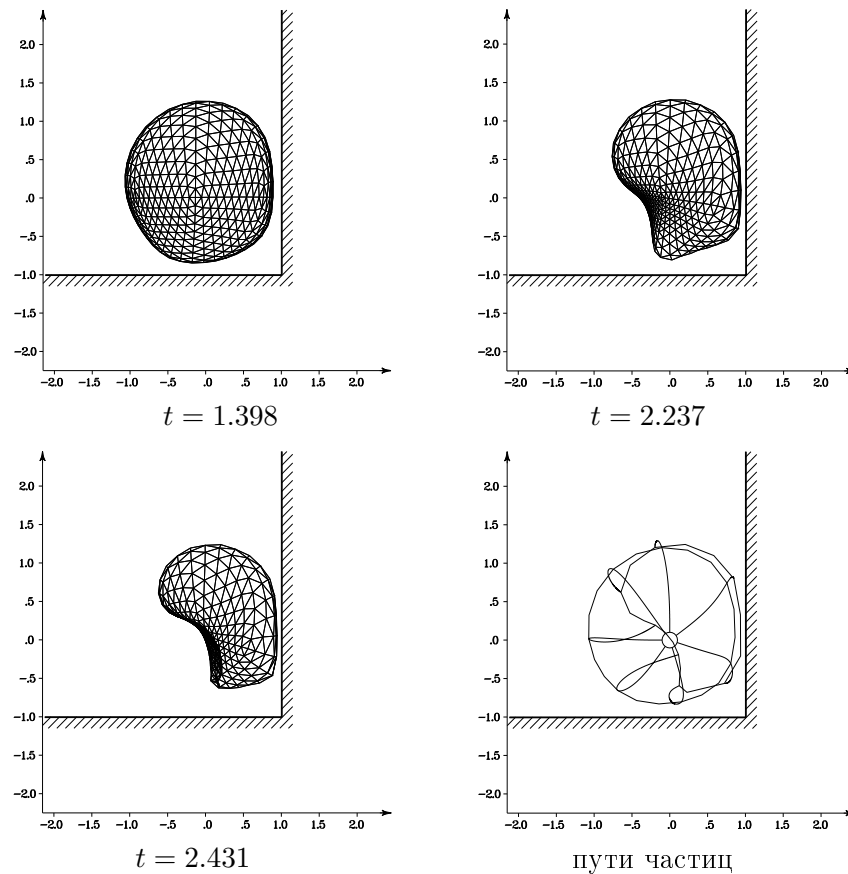


Рис. 16. Эволюция пузыря около прямого угла, образованного двумя твердыми стенками: $\alpha = 0.2$, $\beta = 100$, сетка первого типа $N = 786$, $M = 1568$.

развития струйки задолго до момента ее касания противоположной стенке пузыря. Эта особенность поведения струйки выявлена при исследовании осесимметричной модели пузыря и подробно описана в работе [3]. Если нет осевой симметрии течения, это явление также имеет место. Максимальная скорость струйки кавитационного пузыря не превышает 200 м/с.

Таким образом, еще раз подтверждается предположение, что струйка одиночного кавитационного пузыря не способна причинить урон стенке. При взрыве мины максимальная скорость движения струйки составляет 205.4 м/с. При ядерном взрыве скорость движения вершины струйки имеет порядок скорости звука в воде, хотя и не превышает ее, и достигает 1086.7 м/с. Время эволюции для разных типов пузырей существенно варьируется. Так, для кавитационных пузырей первого типа время их существования составляет от 0.00021 до 0.00023 с, для кавитационных пузырей второго типа — 0.00167...0.00182 с, для пузыря, образующегося при взрыве мины, — 0.4...0.445 с, при взрыве ядерного заряда — 3.61...4 с.

Заключение

Данная работа посвящена исследованию динамики одиночного парогазового пузыря в идеальной несжимаемой весомерной жидкости без учета поверхностного натяжения. В качестве инструмента численного исследования используется метод граничных элементов на основе

третьей формулы Грина. Реализованы два метода построения поверхностных сеток, при вычислении регулярных и сингулярных интегральных коэффициентов используется единый подход — внутренние интегралы находятся аналитически, после чего для вычисления внешних используются квадратурные формулы Гаусса.

Для решения результирующей системы линейных уравнений используется метод Гаусса с последующим итерационным уточнением. Консервативность численного алгоритма отслеживается путем контроля за сохранением полной энергии. С помощью описанного численного метода проведено моделирование пульсаций сферически симметричного пузыря в безграничной жидкости без учета действия сил тяжести. Поскольку данная модель не предусматривает потерь энергии, теоретически такие пульсации должны продолжаться бесконечно долго.

Численная модель не полностью адекватна математической и вносит численную вязкость. В процессе численного моделирования удалось получить от двух до пяти неполных пульсаций в зависимости от значения параметра газосодержания. Минимальные радиусы пузыря, полученные при численном моделировании, удовлетворяют аналитическим оценкам. Разрушение численного счета происходит вследствие наступления численной неустойчивости границы.

Кроме того, рассматривалась эволюция пузыря около плоских наклонных твердых стенок. Главной задачей работы было исследовать такие характеристики струи, как высота, скорость и направление развития. Введен коэффициент пробоя струйки, позволяющий уточнить соотношение, приведенное в работе [1]. Положительные коэффициенты пробоя удалось получить для минимального расстояния пузыря от стенки $d = 1R_m$. Получены размерные характеристики для кавитационных пузырей и пузырей, формирующихся в результате взрыва мины и ядерного заряда.

К недостаткам метода граничных элементов при его применении к данному классу задач относится невозможность расчета преобразования коллапсирующего пузыря в тор без использования дополнительных искусственных приемов. В этом смысле более перспективны методы, позволяющие беспрепятственно перейти от односвязной геометрии области к многосвязной, как, например, методы, описанные в работах [15, 34].

Список литературы

- [1] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва. Эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [2] KOROVKIN A.A. Asymptotic theory of liquid-solid impact // *Phil. Trans. Roy. Soc. A.* 1997. Vol. 335. P. 507–522.
- [3] BEST J.P., KUCERA A. A numerical investigation of non-spherical rebounding bubbles // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 245. P. 137–154.
- [4] BENJAMIN T.B., ELLIS A.T. The collapse of cavitation bubbles and the pressures thereby reduced against solid wall // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.* 1966. Vol. 260. P. 221–240.
- [5] WANG Q.X. The evolution of a gas bubble near an inclined wall // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics.* 1998. Vol. 12. P. 29–51.
- [6] Воинов О.В., Воинов В.В. О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // *Докл. АН СССР.* 1976. Т. 227, № 1. С. 63–66.

- [7] ЛЕВКОВСКИЙ Л.В. Структура кавитационных течений. Л., 1973.
- [8] BLAKE J.R., BOUTON-STONE J.M., TONG R.P. Boundary integral methods for rising, bursting and collapsing bubbles // *BE Appl. in Fluid Mech. Mech. Publ. Southampton*. 1995. P. 31–71.
- [9] XI W.-Q., KWEE P.-E., НОСК Т.-В. Numerical simulation of evolution three-dimensional bubbles // *Proc. Twenty-Second Symp. on Naval Hydrodynamics*. Aug. 9–14, Monday Session, 1998. P. 255–271.
- [10] WANG Q.X. Numerical simulation of violent bubble motion // *Phys. of Fluids*. 2004. Vol. 16, N 5. P. 1610–1619.
- [11] BEST J.P. The rebound of toroidal bubbles // *Bubble Dynamics and Interface Phenomena* / Ed. J.R. Blake, J.M. Boulton-Stone, N.H. Thomas. N.Y.: Kluwer, 1994. P. 405–412.
- [12] BLAKE J.R., ТОМИТА Y., TONG R.P. The art, craft and science of modelling jet impact in a collapsing cavitation bubble // *Appl. Sci. Research*. 1998. Vol. 58. P. 77–90.
- [13] ROGERS J.C., SZYMCAK W.G. Computations of violent surface motions: Comparisons with theory and experiment // *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 1997. A 355. P. 649–663.
- [14] SUSSMAN M., SMEREKA P. Axisymmetric free boundary problems // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 341. P. 269–294.
- [15] LAWSON N.J., RUDMAN M., GUERRA A., LION J.-L. Experimental and numerical comparisons of the break up of a large bubble // *Experiments in Fluids*. 1999. Vol. 26. P. 524–534.
- [16] VAN DER GELD C.W.M. On the motion of a spherical bubble deforming near a plane wall // *J. of Eng. Math.* 2002. Vol. 42. P. 91–118.
- [17] POZRIKIDIS C. Numerical simulation of three-dimensional bubble oscillations by a generalized vortex method // *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*. 2002. Vol. 16. P. 151–169.
- [18] ГУДОВ А.М., АФАНАСЬЕВА М.М. Моделирование пространственных задач идеальной жидкости методом граничных элементов // *Гидродинамика больших скоростей: Межвуз. сб. науч. тр. Чебоксары: Чуваш. гос. ун-т*. 1990. С. 15–24.
- [19] АФАНАСЬЕВ К.Е., ГУДОВ А.М. Численное моделирование динамики пространственного пузыря методом граничных элементов // *Моделирование в механике: сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ*. 1993. Т. 7, № 1. С. 11–19.
- [20] THERENTIEV A.G., AFANASIEV K.E., AFANASIEVA M.M. Simulation of unsteady free surface flow problems by the direct boundary element method // *Advanced Boundary Element Method, IUTAM Symp.* / Ed. Th. A. Cruse. Berlin: Springer-Verlag, 1988. P. 427–434.
- [21] BLAKE J.R., ТАИБ В.В., DOHERTY G. Transient cavities near boundaries. Pt 1. Rigid Boundary // *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 170. P. 31–71.
- [22] ШАХИНЕ G., ДУРАСВАМИ R., REBUT M. Analytical and numerical study of large bubble/bubble and bubble/flow interaction // *19th ONR Symp. of Naval Hydrodynamics*. Seoul, 1992. P. 125–144.
- [23] GHASSEMI F. Automatic mesh generation scheme // *Computing and Structures*. 1982. Vol. 15, N 6. P. 613–626.

- [24] БАБЕНКО К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
- [25] ГРИГОРЬЕВА И.В. Особенности численного решения пространственных задач динамики идеальной несжимаемой жидкости методом граничных элементов // Тр. Междунар. науч. конф. "Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности-2000". Уфа, 2000. С. 176–180.
- [26] ТРУШНИКОВ В.Н. Один нелинейный регуляризирующий алгоритм и некоторые его приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 822–829.
- [27] АФАНАСЬЕВ К.Е., САМОЙЛОВА Т.И. Техника использования метода граничных элементов в задачах со свободными границами // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отделение. Ин-т вычисл. технологий. 1995. Т. 4, № 11. С. 19–37.
- [28] СЕДОВ Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [29] АФАНАСИЕВ К.Е., ГРИГОРИЕВА И.В. The investigation of bouyant gas bubble dynamics near an inclined wall // Intern. Summer Sci. School. High Speed Hydrodynamics. HSH-2002 Proc., Cheboksary, Russia, 2002. P. 111–119.
- [30] WEST J.P. The Kelvin impulse: application to cavitation bubble dynamics // J. Aust. Math. Soc. 1988. Vol. B30. P. 127–146.
- [31] КНЭПП Р., ДЕЙЛИ ДЖ., ХЭММИТ Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974.
- [32] ЛАМБ Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
- [33] ПРИТЧЕТТ ДЖ.У. Расчеты явлений при подводных взрывах в условиях несжимаемости // Подводные и подземные взрывы. М.: Мир, 1974. С. 44–57.
- [34] LIU G.R. Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method. CRC Press LLC, 2003.

Поступила в редакцию 20 февраля 2006 г.