Вычислительные технологии **Том 12, № 4, 2007**

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ*

О. В. Капцов
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail: `kaptsov@icm.krasn.ru`

An equivalence relation on the class of linear partial differential equations is introduced. The equivalence is defined by means of linear differential operators. We prove that the Euler—Darboux transformations generate the equivalence relation on a certain class of equations. A superposition formula was found for the Euler—Darboux transformations. The Darboux and Schrödinger equations were considered as applications of the proposed method.

Введение

Задача сведения заданного уравнения к уже изученному представляет несомненный интерес для приложений. Локальные преобразования изучаются в групповом анализе дифференциальных уравнений [1–3]. Два уравнения считаются эквивалентными, если существует точечное преобразование, переводящее одно уравнение в другое. Лучше всего изучены вопросы эквивалентности для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. В работе предлагается дополнить класс преобразований линейных уравнений с частными производными.

Пусть имеется два линейных уравнения с частными производными одного и того же порядка из некоторого класса E:

$$L_1 u = 0, \tag{0.1}$$

$$L_2 v = 0. \tag{0.2}$$

Предположим, что существует линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ такой, что преобразование

$$v = \mathcal{L} u \tag{0.3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00489).

переводит решения уравнения (0.1) в решения (0.2). Тогда преобразование (0.3) называют дифференциальной подстановкой. Если найдется еще дифференциальная подстановка $u = \mathcal{M}v$, которая переводит решения уравнения (0.2) в решения (0.1), то уравнения (0.1) и (0.2) будем называть эквивалентными, а операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — операторами эквивалентности, обратными друг другу.

Таким образом, получается категория EQ, объектами которой являются линейные дифференциальные уравнения, морфизмами — дифференциальные подстановки, а на классе уравнений E возникает отношение эквивалентности. Из указанных выше условий эквивалентности следуют два соотношения:

$$L_2(\mathcal{L}u)|_{L_1u=0} = 0, \quad L_1(\mathcal{M}v)|_{L_2v=0} = 0.$$

Классический пример подобного отношения эквивалентности связан с преобразованиями Лапласа [1, 4] гиперболических уравнений

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0.$$

Следует отметить, что в случае совпадения уравнений (0.1) и (0.2) оператор $\mathcal{L}$ является симметрией уравнения (0.1) [5]. Если уравнения (0.1) и (0.2) различны, а операторы $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ совпадают, то $\mathcal{L}$ будем называть сплетающим оператором.

В данной работе рассматривается специальный класс преобразований линейных уравнений с частными производными. Эти преобразования называются преобразованиями Эйлера—Дарбу (или Э–Д-преобразованиями), поскольку Эйлер первый ввел их в своих работах [6] по построению общих решений уравнений второго порядка, а Дарбу [7] применял к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказано, что Э–Д-преобразование имеет обратное, на некотором классе $E_{2,M}$ линейных уравнений. Указаны формулы суперпозиции Э–Д-преобразований и явный вид преобразованных уравнений. Приведены примеры приложений преобразований Э–Д к уравнениям второго порядка. В частности, описано множество уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу, эквивалентных волновому уравнению с постоянными коэффициентами.

1. Преобразования Эйлера—Дарбу

В этом параграфе изучаются специальные классы линейных уравнений с частными производными и преобразования, переводящие решения одного уравнения в другое уравнение того же типа.

Рассмотрим линейное уравнение с частными производными:

$$Lu = Au + Bu = 0. \tag{1.1}$$

Предположим, что оператор A — дифференциальный оператор по одной переменной x:

$$A = \sum_{i=0}^{K} a_i(x)\partial_x^i, \tag{1.2}$$

а B — дифференциальный оператор по переменным $y_1, ..., y_n$ вида

$$B = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M} b_\alpha(y)\partial_y^\alpha, \tag{1.3}$$

где $y = (y_1, ..., y_n)$, $\partial_x^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$, $\partial_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{y_1}^{\alpha_1}, ..., \partial_{y_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс. Функции $a_i(x)$, $b_\alpha(y)$ считаются гладкими в соответствующих областях. Класс уравнений вида (1.1) обозначим через $E_{K,M}$.

Если $h(x), g(y)$ — решения уравнений

$$Ah = ch, \tag{1.4}$$

$$Bg + cg = 0, \quad c \in R,$$

то функция $u_1 = hg$ удовлетворяет уравнению (1.1). Функция u_1, порождает преобразование уравнения (1.1).

Теорема 1. *Класс уравнений $E_{K,M}$ обладает следующими свойствами:*

1. Если γ — гладкая функция вида $\gamma = p(x)q(y) \neq 0$, то преобразование

$$u \longrightarrow v = u/\gamma$$

переводит решения уравнения (1.1) в решения уравнения

$$\tilde{L}v = vL(\gamma)/\gamma + A_1 v + B_1 v = 0,$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{K} a_i^1(x)\partial_x^i, \quad B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1(y)\partial_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1 \neq 0$ уравнение $\tilde{L}v = 0$ имеет вид

$$L_1 v = A_1 v + B_1 v = 0. \tag{1.5}$$

2. Преобразование $v \longrightarrow w = v_x$ переводит решения уравнения (1.5) в решения уравнения

$$L_2 w = \sum_{i=1}^{K} (\partial_x(a_i^1)\partial_x^{i-1} w + a_i^1 \partial_x^i w) + \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha \partial_y^\alpha w = 0. \tag{1.6}$$

Доказательство. Для проверки первого свойства заметим сначала, что верны равенства

$$Lu = L(\gamma v) = vL\gamma + \tilde{A}v + \tilde{B}v = 0, \tag{1.7}$$

где

$$\tilde{A}v = \sum_{i=1}^{K} \tilde{a}_i(x,\gamma)\partial_x^i v, \quad \tilde{B}v = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} \tilde{b_\alpha}(y,\gamma)\partial_y^\alpha v.$$

Коэффициенты $\tilde{a}_i$ могут зависеть только от x, γ и производных от γ по x, а коэффициенты $\tilde{b}_\alpha$ могут зависеть только от y, γ и ее производных по $y_1, ..., y_n$. Функция γ и ее производные могут входить в коэффициенты $\tilde{a}_i$, $\tilde{b_\alpha}$ лишь линейным образом.

Разделив (1.7) на γ, получаем уравнение

$$\tilde{L}v = v\frac{L(\gamma)}{\gamma} + A_1 v + B_1 v = 0,$$

где операторы A_1, B_1 имеют вид

$$A_1 = \sum_{i=1}^{k} \tilde{a}_i(x, p(x))\partial_x^i, \quad B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} \tilde{b_\alpha}(y, q(y))\partial_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1$ приходим к уравнению (1.5). Для доказательства второго свойства достаточно продифференцировать (1.5) по x и ввести новую функцию $w = \partial_x v$. В результате получается уравнение (1.6). Заметим, что все уравнения $Lu = 0$, $L_1 v = 0$, $L_2 w = 0$ принадлежат одному классу $E_{K,M}$. $\square$

Следствие. *Пусть h — нетривиальное решение уравнения (1.4), $r \neq 0$ — гладкая функция от x. Тогда преобразование*

$$z = (u_x - \frac{h'}{h}u)/r \tag{1.8}$$

переводит решение уравнения (1.1) в решения уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Действительно, согласно теореме 1 преобразование

$$z = p(x)q(y)\partial_x\left(\frac{u}{u_1}\right) \tag{1.9}$$

сохраняет класс уравнений (1.1). Здесь p, q — произвольные гладкие функции, u_1 — решение уравнения (1.1), полученное разделением переменных $u_1 = h(x)g(y)$. Если положить $q = g,\ p = h/r$, то из (1.9) получим (1.8).

Преобразование (1.8) будем называть преобразованием Эйлера—Дарбу, а соответствующий линейный оператор

$$\frac{h}{r}\partial_x\frac{1}{h}$$

— оператором Эйлера—Дарбу первого порядка. В современной литературе преобразование (1.8) и его многомерные аналоги принято называть преобразованием Дарбу [8–11].

Если известно решение h уравнения (1.4) при некотором c, то это позволяет построить преобразование Эйлера—Дарбу. Оказывается, что если известны решения $h_1, ..., h_k$ уравнения (1.4) при различных $c_1, ..., c_k$, то легко построить оператор порядка k и соответствующее преобразование, действующее на $E_{K,M}$. Для построения таких операторов применим конструкцию, близкую к той, что используется в теории факторизации линейных дифференциальных операторов [8, 12].

Обозначим через $\mathcal{L}_h$ оператор Эйлера—Дарбу вида

$$h\partial_x\frac{1}{h}.$$

Пусть $h_1, ..., h_N$ — гладкие, линейно независимые функции от x. Построим последовательность функций и операторов

$$p_1 = h_1, \quad p_2 = \mathcal{L}_{p_1}h_2, \quad \dots, \quad p_N = \mathcal{L}_{p_{N-1}}...\mathcal{L}_{p_1}h_N, \tag{1.10}$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{p_1}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{p_2}\mathcal{M}_1, \quad \dots, \quad \mathcal{M}_N = \mathcal{L}_{p_N}\mathcal{M}_{N-1}.$$

Как следует из построения операторов $\mathcal{M}_k$, функции $h_1, ..., h_k$ удовлетворяют дифференциальному уравнению порядка k

$$\mathcal{M}_k h = 0. \tag{1.11}$$

Значит, они образуют базис решений уравнения (1.11). Следовательно, действие оператора $\mathcal{M}_k$ на произвольную функцию представляется в виде [8, 12]

$$\mathcal{M}_k u = \partial_x^k u + a_{k-1}\partial_x^{k-1} u + ... + a_0 u = \frac{W(h_1, ..., h_k, u)}{W(h_1, ..., h_k)}. \tag{1.12}$$

Если взять в качестве $h_1, ..., h_k$ решения уравнения (1.4), соответствующие различным константам $c_1, ..., c_k$, то получим утверждение.

Лемма 1. *Преобразование*

$$z = \mathcal{M}_k u = \frac{W(h_1, ..., h_k, u)}{W(h_1, ..., h_k)} \tag{1.13}$$

переводит решение уравнения (1.1) в решение уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Операторы $\mathcal{M}_k$ отнесем к высшим операторам Эйлера—Дарбу, а преобразование (1.13) — к высшим преобразованиям Эйлера—Дарбу.

Остается открытым вопрос о том, существуют ли операторы порядка k, действующие на $E_{K,M}$ и не представимые в суперпозиции операторов Эйлера—Дарбу первого порядка.

Заметим, что лемма 1 — аналог известной теоремы Крума [8, 13] из теории линейных обыкновенных уравнений второго порядка. Подобное утверждение имеется в теории сетей [14].

2. Преобразование уравнений класса $E_{2,M}$

В данном параграфе будет указан вид уравнений класса $E_{2,M}$, полученных действиями преобразования Эйлера—Дарбу, а также найдено обратное преобразование.

Рассмотрим уравнение

$$Fu_{xx} + Gu_x + Hu = Bu, \tag{2.1}$$

где F, G, H — гладкие функции от x, B — линейный оператор вида (1.3). Уравнения вида (2.1) относятся к классу $E_{2,M}$.

Теорема 2. *Преобразование Эйлера—Дарбу (1.8) переводит решения уравнения (2.1) в решения уравнения*

$$Fz_{xx} + G_1 z_x + H_1 z = Bz, \tag{2.2}$$

где функции G_1, H_1 задаются формулами

$$G_1 = G + F' + 2F\frac{r'}{r}, \tag{2.3}$$

$$H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)''. \tag{2.4}$$

Здесь штрих означает производную по x, а функция h удовлетворяет уравнению

$$Fh'' + Gh' + (H + c)h = 0, \quad c \in R. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для краткости обозначим через Au левую часть (2.1), через $A_1 z$ — левую часть (2.2), а преобразование Эйлера—Дарбу запишем в виде

$$z = \mathcal{L}u = \frac{u_x + su}{r}, \tag{2.6}$$

где $s = -h'/h$. В этих обозначениях уравнения (2.1), (2.2) выглядят так:

$$Au = Bu, \quad A_1 z = Bz. \tag{2.7}$$

Второе уравнение в (2.7), с учетом (2.6), переписывается в форме

$$A_1 \mathcal{L} u = B \mathcal{L} u.$$

Поскольку операторы B и $\mathcal{L}$ коммутируют, то последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$A_1 \mathcal{L} u - \mathcal{L} A u = 0, \tag{2.8}$$

в силу первого уравнения (2.7). Левая часть (2.8) — многочлен первой степени относительно u_{xx}, u_x, u. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю.

Собирая подобные члены при u_{xx}, u_x, получаем формулы (2.3), (2.4). Используя полученные выражения (2.3), (2.4) и приравнивая к нулю коэффициент при u, приходим к уравнению

$$Fs'' + (F' - 2Fs + G)s' - F's^2 + Gs' - H' = 0. \tag{2.9}$$

Прямыми вычислениями убеждаемся в том, что (2.9) — это следствие уравнения (2.5) и выражения $s = -h'/h$. □

Замечание. Доказанный результат является небольшим обобщением теоремы Эйлера [6]. Можно заметить, следуя [6], что (2.9) допускает первый интеграл

$$Fs' - Fs^2 + Gs - H = c. \tag{2.10}$$

Тогда преобразование $s = -h'/h$ приводит (2.10) к виду (2.5).

Вернемся к высшим преобразованиям Эйлера—Дарбу.

Теорема 3. *Пусть $h_1, \dots, h_k$ — решения уравнений (2.5), соответствующие различным константам $c_1, \dots, c_k$. Тогда преобразование (1.13) переводит решения уравнения (2.1) в решения уравнения*

$$Fz_{xx} + G_k z_x + H_k z = Bz. \tag{2.11}$$

При этом коэффициенты G_k, H_k задаются формулами

$$G_k = G + kF', \quad H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln W)' + 2F(\ln W)'', \tag{2.12}$$

где W — вронскиан функций $h_1, \dots, h_k$.

Доказательство. Выражение для G_k получается по индукции, последовательным применением формулы (2.3) при $r = 1$. Используя (2.4) и конструкцию (1.10) функций $p_1, ..., p_k$, легко видеть, что индукционное построение коэффициентов H_k приводит к выражениям

$$H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln p_1 \dots p_k)' + 2F(\ln p_1 \dots p_k)''. \tag{2.13}$$

Необходимо найти произведение $p_1 \dots p_k$. Так как, согласно (1.10) и (1.12), имеют место соотношения

$$p_{i+1} = \mathcal{M}_i h_{i+1} = \frac{W(h_1, \dots, h_i, h_{i+1})}{W(h_1, \dots, h_i)},$$

справедливы равенства

$$p_1 \dots p_k = h_1 \frac{W(h_1, h_2)}{h_1} \dots \frac{W(h_1, \dots, h_k)}{W(h_1, \dots, h_{k-1})} = W(h_1, \dots, h_k).$$

Остается подставить последнее выражение в (2.13) и получить вторую формулу в (2.12). □

Замечание. Поскольку функция h_i ($i = 1, \dots, k$) удовлетворяет уравнению (2.5) с параметром $c = c_i$, оператор $\mathcal{M}_k$ зависит от $c_1, \dots, c_k$. Если некоторые параметры $c_j, \dots, c_{j+m}$ стремятся к одной величине b, то в соответствии с методом Даламбера [15] решениями уравнения (1.11) будут функции $h_j, \partial_b h_j, \dots, \partial_b^m h_j$. Чтобы лемма 1 и теорема 3 оставались справедливыми, необходимо в соответствующих формулах заменить $h_{j+1}, \dots, h_{j+m}$ на $\partial_b h_j, \dots, \partial_b^m h_j$.

Перейдем теперь к построению преобразования Эйлера—Дарбу, переводящего решения (2.2) в решения (2.1). Такое преобразование назовем обратным к (1.8).

Теорема 4. *Пусть задано преобразование Эйлера—Дарбу, переводящее решения уравнения (2.1) в решение уравнения (2.2). Тогда обратное преобразование Эйлера—Дарбу*

$$u = \frac{1}{r_1}\left(z_x - \frac{h_1'}{h_1} z\right) \tag{2.14}$$

переводит решения уравнения (2.2) в решения (2.1), если

$$r_1 = \frac{1}{rF}, \quad h_1 = \frac{1}{hr \exp(\int G/F dx)}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Согласно (2.3), первые условия того, что преобразования Эйлера—Дарбу (1.8) и (2.14) являются взаимно обратными, имеют вид

$$G_1 = G + F' + 2F(\ln r)', \tag{2.16}$$

$$G = G_1 + F' + 2F(\ln r_1)'. \tag{2.17}$$

Исключая G и G_1 из (2.16) и (2.17), получаем

$$F' + F(\ln r)' + F(\ln r_1)' = 0.$$

Это соотношение позволяет найти

$$r_1 = \frac{c}{rF}, \quad c \in R.$$

В дальнейшем будем считать, что $c = 1$. Используя (2.4), записываем вторые два условия того, что (1.8) и (2.14) взаимно обратны:

$$H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)'', \tag{2.18}$$

$$H = H_1 + \frac{(Fr_1' + G_1 r_1)'}{r_1} + F'(\ln h_1)' + 2F(\ln h_1)''. \tag{2.19}$$

Покажем теперь, как получается выражение для h_1. Функция h должна удовлетворять уравнению (2.5). Предположим, что h_1 удовлетворяет аналогичному уравнению

$$Fh_1'' + G_1 h_1' + (H_1 + c)h_1 = 0. \tag{2.20}$$

Впоследствии проверим справедливость этого предположения. Подставим в (2.18) и (2.19) функции G_1, r_1. В результате получим два линейных уравнения относительно H, H_1. Исключив из этих уравнений H, H_1, приходим к выражению

$$F' rhh'[(rhh_1)'F + (rhh_1)G] + S = 0, \tag{2.21}$$

где S не содержит F'. Явный вид S не приводится из-за его громоздкости. Требуя, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в ноль, приходим к соотношению

$$(\ln rhh_1)' = -\frac{G}{F}.$$

Полагая теперь

$$h_1 = \frac{1}{rh \exp(\int G/F dx)},$$

прямыми вычислениями можно проверить, что данная функция удовлетворяет (2.20) и (2.21). □

Следствие. *Операторы Эйлера—Дарбу порождают отношение эквивалентности на классе уравнений* $E_{2,M}$.

3. Преобразование подкласса $E_{2,M}$

Рассмотрим класс J_2 уравнений вида

$$u_{xx} + G(x)u_x = Bu, \tag{3.1}$$

где B — оператор (1.3), G — некоторая гладкая функция от x. В этом параграфе будут указаны преобразования, действующие на J_2, найдены обратные преобразования и получен аналог теоремы 3. Интерес к уравнениям типа (3.1) связан с их приложениями в механике жидкости и теории упругости.

Как следует из (2.4), преобразование Эйлера—Дарбу

$$z = \frac{1}{r}\left(u_x - \frac{h'}{h}u\right) \tag{3.2}$$

переводит решения уравнения (3.1) в решения уравнения

$$z_{xx} + G_1(x)z_x = Bz, \tag{3.3}$$

если функция r удовлетворяет уравнению

$$r'' + Gr' + (G' + 2(\ln h)'')r = 0. \tag{3.4}$$

Прямой проверкой убеждаемся в том, что одним из решений (3.4) является функция

$$r = -\frac{h'}{h}.$$

Знак минус выбран из соображений удобства. Второе решение (3.4) более громоздкое и здесь не используется. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Преобразование Эйлера—Дарбу*

$$z = -\frac{h}{h'}u_x + u \tag{3.5}$$

переводит решения уравнения (3.1) в решения (3.3), если коэффициент G_1 *задается формулой*

$$G_1 = G + 2(\ln(h'/h))', \tag{3.6}$$

а функция h *удовлетворяет уравнению*

$$h'' + Gh' + ch = 0, \quad c \in R. \tag{3.7}$$

Следствием теоремы 4 является лемма 3.

Лемма 3. *Если* h *— нетривиальное решение уравнения (3.7), то преобразование (3.5) имеет обратное:*

$$u = -\frac{h_1}{h_1'}z_x + z,$$

где

$$h_1 = -\frac{1}{h' \exp(\int G\,dx)}.$$

Таким образом, преобразования Эйлера—Дарбу порождают преобразование эквивалентности на J_2.

Перейдем к построению высших операторов Эйлера—Дарбу. Введем линейный оператор

$$\mathcal{L}_h = -\frac{h}{h'}\partial_x + 1,$$

соответствующий преобразованию (3.5). Предположим, что известны решения $h_1, \dots, h_N$ уравнения (3.7) при некоторых значениях $c_1, \dots, c_N$. Как в разд. 2, определим рекуррентным способом функции и операторы

$$p_1 = h_1, \quad p_2 = \mathcal{L}_{p_1}h_2, \dots, p_N = \mathcal{L}_{p_{N-1}}...\mathcal{L}_{p_1}h_n,$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{p_1}, \quad \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{p_2}\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N = \mathcal{L}_{p_N}\mathcal{M}_{N-1}.$$

Каждый оператор $\mathcal{M}_k$ имеет вид

$$\mathcal{M}_k = a_k\partial_x^k + a_{k-1}\partial_x^{k-1} + ... + 1,$$

где a_i — функции от x.

Если $h_1, \dots, h_N$ — линейно независимы, то при любом $k \le N$ они составляют фундаментальную систему решений уравнения

$$\mathcal{M}_k u = 0. \tag{3.8}$$

Это уравнение эквивалентно следующему:

$$W(u, h_1, \dots, h_k) = 0,$$

где W — вронскиан. Поскольку коэффициент при u в (3.8) равен единице, разлагая вронскиан по первому столбцу и разделив его на $W(h_1', \dots, h_k')$, получаем равенство

$$\mathcal{M}_k u = \frac{W(u, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}.$$

Значит, высшее преобразование Эйлера—Дарбу в данном случае имеет вид

$$z = \frac{W(u, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}. \tag{3.9}$$

Лемма 4. *Преобразование (3.9) переводит решения уравнения (3.1) в решения уравнения*

$$z_{xx} + G_k z_x = Bz,$$

где G_k задается формулой

$$G_k = G + 2\partial_x \left(\ln \frac{W(h_1', \dots, h_k')}{W(h_1, \dots, h_k)} \right). \tag{3.10}$$

Доказательство. Как следует из леммы 2, функции G_i и G_{i+1} связаны соотношением

$$G_{i+1} = G_i + 2\partial_x (\ln h_i'/h_i).$$

Значит, функция G_k представляется в виде

$$G_k = G + 2\partial_x \left(\ln \frac{h_1' \dots h_k'}{h_1 \dots h_k} \right). \tag{3.11}$$

Нам остается вычислить произведение

$$P = \frac{h_1' \dots h_k'}{h_1 \dots h_k}.$$

По построению оператора $\mathcal{M}_k$ справедливо представление

$$\mathcal{M}_k u = \left(-\frac{h_k}{h_k'} \partial_x + 1 \right) \dots \left(-\frac{h_1}{h_1'} \partial_x + 1 \right) u.$$

Следовательно, коэффициент при старшей производной равен $(-1)^k/P$. С другой стороны, как показано выше, выражение $\mathcal{M}_k u$ равно $W(u, h_1, \dots, h_k)/W(h_1', \dots, h_k')$. Поэтому коэффициент при $\partial_x^k u$ имеет вид

$$(-1)^{k+1} \frac{W(h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}.$$

Таким образом, искомое P равно

$$-\frac{W(h_1', \dots, h_k')}{W(h_1, \dots, h_k)},$$

и лемма доказана. □

Для линейного обыкновенного уравнения второго порядка

$$y'' + g(x)y' + cy = 0, \quad c \in R,$$

формулы, аналогичные (3.9) и (3.10), были получены в работе [16].

4. Применения преобразований Эйлера—Дарбу

Рассмотрим уравнение Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$u_{xx} + G(x)u_x = u_{yy}. \tag{4.1}$$

Оно возникает в исследованиях по газовой динамике и теории упругости [17, 18]. Хорошо известны его решения, найденные Эйлером, соответствующие функции

$$G = \frac{2n}{x}, \quad n \in Z.$$

Групповой анализ произвольного линейного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными выполнен в [1]. В частности, доказано, что уравнения

$$u_{xx} + \frac{c}{x}u_x = u_{yy}, \quad c \in R,$$

с разными константами c не являются эквивалентными относительно точечных преобразований. Заметим, что относительно преобразований Эйлера—Дарбу эти уравнения при $c = 2n$, где n — любое целое число, эквивалентны простейшему волновому уравнению [6]:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Все линейные дифференциальные подстановки первого порядка, соответствующие указанной функции G, получены в [19]. Г. Дарбу [7] несколько расширил список уравнений, приводящихся к (4.1) точечными преобразованиями и допускающих общее явное решение.

Используем лемму 4 для интегрирования уравнений (4.1). Для ее применения необходимо знать решение уравнения (4.1) с некоторой функцией G и решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$h'' + G(x)h' + ch = 0, \quad c \in R. \tag{4.2}$$

Рассмотрим наиболее простой случай $G = 0$. В зависимости от константы c, решениями уравнения (4.2) являются функции

$$a_1 x + b_1, \quad a_2 \cos(nx) + b_2 \sin(nx), \quad a_3 \operatorname{ch}(nx) + b_3 \operatorname{sh}(nx), \tag{4.3}$$

где $a_i, b_i \in R$, $n^2 = |c|$. На основании леммы 4 можно утверждать, что уравнение (4.1) с коэффициентом

$$G = 2\partial_x \left(\ln \frac{W(h_1', \dots, h_k')}{W(h_1, \dots, h_k)} \right)$$

имеет решение

$$u = \frac{W(u^0, h_1, \dots, h_k)}{W(h_1', \dots, h_k')}, \tag{4.4}$$

где $h_1, \dots, h_k$ — функции вида (4.3) такие, что $W(h_1', \dots, h_k') \neq 0$, $u^0 = U(x+y)+V(x-y)$, а U, V — произвольные гладкие функции.

Последовательным применением преобразования Эйлера—Дарбу можно получать решения, включающие рациональные функции. Например, решением уравнения

$$u_{xx} + \left(\frac{2}{x} - \frac{6x^2}{x^3 + b} \right) u_x = u_{yy}, \quad b \in R,$$

является функция

$$u = \frac{x^3 + b}{3x} (U'' + V'') - x (U' + V') + U + V.$$

Если

$$G = \frac{-2(3x^8 + 6kx^5 - 10mx^3 + 30k^2x^2 + 5km)}{(x^6 + 5kx^3 - 5k^2 + 5mx)(x^3 + k)}, \quad k, m \in R,$$

то функция

$$u = \frac{(x^6 + 5kx^3 - 5k + 5mx)(x^3 + k)}{15(x^7 + 2kx^4 + k^2x)} (x(U''' + V''') - U'' - V'') +$$

$$+ \frac{x^3 + k}{3x} (U'' + V'') - x (U' + V') + U + V$$

удовлетворяет уравнению (4.1). Вероятно, указанные решения можно получить из (4.4) некоторым предельным переходом. Следует отметить, что все указанные уравнения принадлежат одному классу эквивалентности, порожденному волновым уравнением.

Пусть теперь n не обязательно целое число. Легко видеть, что уравнение

$$u_{xx} - \frac{2n}{x} u_x = u_{yy}, \quad n \in R, \tag{4.5}$$

обладает частным решением

$$u = c_1(x^2 - y^2)^n + c_2, \quad c_1, c_2 \in R.$$

Для того чтобы применить преобразование Эйлера—Дарбу к (4.5), нужно решить уравнение

$$h'' - \frac{2n}{x} h' + ch = 0, \quad c \in R.$$

Решения последнего уравнения выражаются через функции Бесселя. Используя лемму 4, можно построить класс эквивалентных уравнений, частные решения которых выражаются через функции Бесселя.

Многомерное уравнение Дарбу

$$u_{tt} - \Delta u - \frac{2m}{t} u_t = 0,$$

где Δu — n-мерный оператор Лапласа, при целом m эквивалентно волновому уравнению

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

Эквивалентность устанавливается последовательным применением преобразования Эйлера—Дарбу по переменной t.

Рассмотрим n-мерное стационарное уравнение Шредингера

$$\Delta u + G(x_1, \ldots, x_n) u = 0. \tag{4.6}$$

Предположим, что

$$G(x) = \sum_{j=1}^{n} G_j(x_j)$$

и для каждой функции G_j справедливо представление

$$G_j = 2\partial_{x_j}^2 \left(\ln W(h_1^j, \dots, h_{k_j}^j)\right),$$

где функции $h_i^j(x_j)$ задаются формулами (4.3) и все вронскианы $W(h_1^j, \dots, h_{k_j}^j)$ не равны нулю. Тогда, действуя последовательно преобразованиями Эйлера—Дарбу по каждой переменной x_j, можно показать, что уравнение (4.6) эквивалентно n-мерному уравнению Лапласа.

Применение преобразований Эйлера—Дарбу к линейным уравнениям с частными производными позволяет существенно расширить списки уравнений [20], допускающих частные или общие решения.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[2] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[3] Olver P.J. Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge University Press, 1995.

[4] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[5] Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.

[6] Эйлер Л. Интегральное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1958. Т. 3.

[7] Darboux G. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. P.: Gauthier-Villars, 1915. Vol. 2.

[8] Matveev V.B., Salle M.A. Darboux trasformations and solitons. N. Y.: Springer-Verlag, 1991.

[9] Rogers C., Schief W.K. Bäcklund and Darboux transformations: geometry and modern applications in soliton theory. Cambridge University Press, 2002.

[10] Berest Y., Veselov A. On the structure of singularities of intereble Schrödinger operators // Lett. Math. Phys. 2000. N 52. P. 103–111.

[11] Chalykh O.A., Oblomkov A.A. Harmonic oscillator and Darboux transformations in many dimensions // Phys. Lett. A. 2000. Vol. 267. P. 256–264.

[12] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИ, 1939.

[13] Crum M.M. Associated Sturm-Liouville systems // Quart. J. Math. 1955. Vol. 6.P. 121–127.

[14] Eisenhart L.P. Transformations of surfaces. N.Y.: Chelsea, 1962.

[15] Гурса Э. Курс математического анализа. М.; Л.: ГТТИ, 1933. Т. 2. Ч. 2.

[16] Yurova A.A., Yurov A.V., Rudnev M. Darboux trasformation for classical acoustic spectral problem // Intern. J. Math. and Math. Sciences. 2003. Vol. 49. P. 3123–3142.

[17] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

[18] Аксенов А.В. Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера—Пуассона—Дарбу // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 2. С. 176–179.

[19] Аксенов А.В. Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уранений Эйлера—Пуассона—Дарбу // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. Т. 63, № 1. С. 15–20.

[20] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Наука, 2001.

Поступила в редакцию 18 апреля 2007 г.