КАКИМ МЕТОДОМ ГЕОФИЗИКИ ДОЛЖНЫ ЗАМЕНИТЬ МЕТОД ЛАВРЕНТЬЕВА НАХОЖДЕНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМИ МАТРИЦАМИ И ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМИ ВЕКТОРАМИ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ

В. Н. Страхов

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия

e-mail: osa26@yandex.ru

It is shown that the classical M.M. Lavrentiev method for solving linear algebraic equations with the symmetric positively definite matrices can not be considered as the optimal method. A new method for regularization of the linear algebraic systems mentioned above is proposed.

Каждый век с сожалением смотрел на ошибки предыдущего.
Франсуа Сарсэ, французский философ

Над прошлым, настоящим и будущим имеет власть человек.
Александр Грин. Жизнь Гнора

Введение

В геофизике (и прежде всего — в гравиметрии и магнитометрии) достаточно много задач сводится к задачам нахождения устойчивых приближенных решений $\hat{x}$ систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$Ax = f_\delta = f + \delta f, \tag{1}$$

т. е. с точно заданной матрицей A и приближенно заданным вектором правой части (вектор δf — вектор помехи).

При этом вектор $\hat{x}$ (устойчивое приближенное решение СЛАУ (1)) должен обеспечивать выполнение соотношений

$$A\hat{x} \approx f, \quad f_\delta - A\hat{x} \approx \delta f. \tag{2}$$

Иначе говоря, вектор $\hat{x}$ в основном определяется вектором полезного сигнала f, а вектор помехи δf уходит в невязку.

Сразу же необходимо подчеркнуть тот момент, что в геофизике (и прежде всего — в гравиметрии и магнитометрии), а также в геодезии и геоинформатике чаще всего возникают СЛАУ (1) с квадратными $(N \times N)$-матрицами A со свойством

$$A = A^T > 0. \tag{3}$$

Ниже описывается (естественно, в очень краткой форме) два основных метода редукции задач гравиметрии и геоинформатики к СЛАУ (1) со свойством (3).

1. Первый метод редукции к СЛАУ (1) со свойством (3) — это предложенный автором в первой половине 90-х годов XX века *метод линейных интегральных представлений*, (см. [1–3]).

Суть этого метода такова. Пусть задано аналитическое соотношение

$$f(x) = \sum_{r=1}^{R} \int\limits_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r(\xi, x) d\mu_r(\xi), \quad x \in S, \tag{4}$$

в котором все множества M_r, $r \in R^n$, $n \geq 2$, а также меры $\mu_r(\xi)$ на этих множествах являются заданными. Заданными также являются все функции:

$$\begin{gathered} Q_r(\xi, x), \\ \xi \in M_r, \quad x \in S, \quad 1 \leq r \leq R. \end{gathered} \tag{5}$$

Функции

$$\rho_r(\xi), \quad 1 \leq r \leq R, \tag{6}$$

подлежат определению по функции $f(x)$.

(A propos — ясно, что эта задача — обобщение классической задачи решения линейного интегрального уравнения первого рода.)

В задачах гравиметрии и геоинформатики имеют место ситуации, когда функция $f(x)$ задана лишь на конечном множестве точек, т. е. задано лишь конечное число значений:

$$f_i = f(x^{(i)}), \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{7}$$

— и по этим значениям требуется найти все функции $\rho_r(\xi)$, $1 \leq r \leq R$.

Ясно, что указанная здесь задача — типичная линейная некорректная задача. Ее решение рационально находить так. Ставится условная вариационная задача

$$\begin{gathered} \sum_{r=1}^{R} \int\limits_{M_r} \frac{\rho_r^2(\xi)}{p_r^2(\xi)} d\mu_r(\xi) = \min_{\substack{\rho_r(\xi), \\ 1 \leq r \leq R}}, \\ f_i - \sum_{r=1}^{R} \int\limits_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) d\mu_r(\xi) = 0, \quad 1 \leq i \leq N, \end{gathered} \tag{8}$$

в которой все
$$p_r^2(\xi), \quad 1 \le r \le R, \tag{9}$$
суть заданные функции, а
$$Q_r^{(i)}(\xi) = Q_r(\xi; x^{(i)}). \tag{10}$$
Условная вариационная задача (8) решается так. Сначала классическим *методом множителей Лагранжа* (см. [4, 5]) задаче (8) ставится в соответствие семейство безусловных вариационных задач
$$\sum_{r=1}^{R} \int\limits_{M_r} \frac{\rho_r^2(\xi)}{p_r^2(\xi)} d\mu_r(\xi) + 2\sum_{r=1}^{R} \lambda_i \left(f_i - \int\limits_{M_r} \rho_r(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) d\mu_r(\xi) \right) = \min_{\substack{\rho_r(\xi),\\ 1\le r\le R}}, \tag{11}$$
при этом в (11) все
$$\lambda_i, \quad 1 \le i \le N, \tag{12}$$
суть те *множители Лагранжа*, которыми учтены условия-равенства в исходной задаче (8).

Использование необходимого (а в данном случае и достаточного) признака экстремума приводит к представлениям
$$\rho_r(\xi) = p_r^2(\xi) \sum_{i=1}^{N} \lambda_i Q_r^{(i)}(\xi), \quad 1 \le r \le R. \tag{13}$$
Используя далее условия-равенства в исходной задаче (8), находим, что вектор Лагранжа λ (с компонентами $\lambda_i,\ 1 \le i \le N$) удовлетворяет СЛАУ вида
$$A\lambda = f, \tag{14}$$
в которой $(N \times N)$-матрица A обладает свойством
$$A = A^T > 0 \tag{15}$$
и имеет элементы
$$a_{ij} = \sum_{r=1}^{R} \int\limits_{M_r} p_r^2(\xi) Q_r^{(i)}(\xi) Q_r^{(j)}(\xi) d\mu_r(\xi), \quad 1 \le i,\ j \le N. \tag{16}$$
Понятно далее, что в СЛАУ, возникающих при решении задач гравиметрии, магнитометрии, геодезии и геоинформатики, фактически является заданным не вектор f, а вектор
$$f_\delta = f + \delta f, \tag{17}$$
где δf — это вектор помехи (или по-другому — вектор погрешности).

Следовательно, надо находить не точные, а устойчивые приближенные решения СЛАУ
$$\begin{gathered} Ax = f_\delta = f + \delta f, \\ A = A^T > 0. \end{gathered} \tag{18}$$

2. Далее о **втором основном методе** редукции задач гравиметрии, геодезии и геоинформатики к СЛАУ вида (18). Этот метод, именуемый *методом точечных источников* (см. [6, 7]), имеет три варианта:

а) локальный;

б) региональный;

в) глобальный.

В первом варианте сферичностью Земли можно пренебрегать, трактуя Землю как нижнее полупространство с криволинейной границей раздела S Земля–воздух.

Во втором и третьем вариантах учитывается сферичность (или даже эллипсоидальность) Земли.

В настоящей работе дается лишь краткое описание метода точечных источников в самом важном — локальном — варианте.

В этом варианте принимается, что в определенном (конечном, с числом точек N) количестве точек на границе раздела S Земля—воздух измерены значения некоторой функции $u(x)$, $x = (x_1,\ x_2,\ x_3)$,которая является непрерывной в области $D \in S$, содержащей все точки $x^{(i)} = \left(\ x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ x_3^{(i)}\right)$, где заданы значения функции $u(x)$. Пусть система координат $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ введена так, что

$$x_3^{(i)} > 0, \quad 1 \le i \le N, \tag{19}$$

причем величина

$$\min_i x_3^{(i)} > 0 \tag{20}$$

небольшая. В этом случае в нижнем полупространстве задаются N точек, располагающихся *под точками* $x^{(i)} = \left(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ x_3^{(i)}\right)$, причем у них третья координата равна $\left(-x_3^{(i)}\right)$, т. е. равна по величине, но противоположна по знаку, когда функция $u(x)$ не представляет собой какой-либо элемент некоторого физического поля

$$\begin{gathered} u(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{R\left(x - x^{(j)}\right)}, \\ R(x - x^{(j)}) = \left[\left(x_1 - x_1^{(j)}\right)^2 + \left(x_2 - x_2^{(j)}\right)^2 + \left(x_3 - x_3^{(j)}\right)^2\right]^{1/2}. \end{gathered} \tag{21}$$

При этом ясно, что через $x^{(j)} = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}\right)$, $1 \le j \le N$, обозначены координаты точек, симметричных (относительно плоскости $x_3 = 0$) точкам задания значений функции $u(x)$, при этом

$$x_3^{(j)} < 0, \quad 1 \le j \le N. \tag{22}$$

Из (22) получаем СЛАУ для нахождения N-вектора с компонентами $c_j,\ 1 \le j \le N$: $Ac = u$, где N-вектор u имеет компоненты

$$u_i = u(x^{(i)}), \quad 1 \le i \le N, \tag{23}$$

а $(N \times N)$-матрица A обладает свойством

$$A = A^T > 0 \tag{24}$$

и имеет элементы

$$a_{ij} = \frac{1}{R(x^{(i)} - x^{(j)})}, \quad 1 \le i,\ j \le N. \tag{25}$$

Из (25) следует, что

$$a_{ij} > 0, \quad 1 \le i,\ j \le N, \tag{26}$$

что очень важно с вычислительных позиций.

Ясно далее, что фактически надо находить не точное решение СЛАУ (22), а устойчивое приближенное решение СЛАУ

$$Ac = u_\delta = u + \delta u, \tag{27}$$

где δu есть вектор помехи.

Далее рассмотрим тот случай, когда в совокупности точек на поверхности Земли S заданы значения функции

$$\Delta g(x) = -\frac{\partial V_a(x)}{\partial x_3}, \tag{28}$$

где $V_a(x)$ — потенциал аномального гравитационного поля. В этом случае аппроксимацию функции $\Delta g(x)$ необходимо брать иной, нежели в (21), а именно

$$\Delta g(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j(x_3 - x_3^{(j)})}{R^3(x - x^{(j)})}. \tag{29}$$

Понятно, что и в данном случае для нахождения вектора c получаем СЛАУ

$$Ac = \Delta g + \delta\Delta g, \tag{30}$$

в которой векторы Δg и $\delta\Delta g$ суть векторы полезного сигнала и помехи, с компонентами

$$\begin{gathered} \Delta g_i = \Delta g(x^{(i)}), \quad \delta\Delta g_i, \\ 1 \le i \le N. \end{gathered} \tag{31}$$

Матрица A имеет элементы

$$a_{ij} = \frac{x_3^{(i)} - x_3^{(j)}}{R^3(x^{(i)} - x^{(j)})}, \quad 1 \le i, \ j \le N. \tag{32}$$

Ясно, что и в данном случае

$$a_{ij} > 0, \quad 1 \le i, \ j \le N. \tag{33}$$

Нетрудно также найти, что в данном случае матрица A имеет сильное диагональное преобладание, что облегчает нахождение устойчивого приближенного решения СЛАУ (30).

3. Итак, выше было показано, что для гравиметрии и геоинформатики большое значение имеет задача нахождения устойчивых приближенных решений $\hat{x}$ СЛАУ вида

$$\begin{gathered} Ax = f_\delta = f + \delta f, \\ A = A^T > 0. \end{gathered} \tag{34}$$

М.М. Лаврентьевым в 1959 году (см. [8]) впервые был предложен метод нахождения векторов

$$\hat{x} = x_\delta. \tag{35}$$

В методе Лаврентьева принималось, что априорно известна величина

$$\delta^2 = \|\delta f\|_E^2. \tag{36}$$

Суть метода в том, что СЛАУ (34) заменяется на *регуляризованную* СЛАУ

$$(\alpha E_N + A)x_\alpha = f_\delta, \tag{37}$$

в которой E_N суть единичная $(N \times N)$-матрица, а

$$\alpha > 0, \tag{38}$$

есть *параметр регуляризации*, малый по величине.

Вектор x_δ определяется как вектор x_{α_δ}, который удовлетворяет равенству

$$\|f_\delta - Ax_{\alpha_\delta}\|_E^2 = \delta^2. \tag{39}$$

Доказывается ряд важных положений.

Во-первых, что если

$$\frac{\delta^2}{\|f_\delta\|_E^2} < 1, \tag{40}$$

то значение $\alpha = \alpha_\delta$, при котором имеет место соотношение (39), *существует и единственно.*

Во-вторых, имеет место соотношение

$$\|\bar{x} - x_\delta\|_E^2 \underset{\delta^2 \to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{41}$$

в котором $\bar{x}$ есть точное решение СЛАУ

$$Ax = f, \tag{42}$$

т. е. при $\delta f = 0$.

Внимание! Оба приведенных положения установлены в духе “чистой математики”. Это означает, что:

а) все числа (элементы a_{ij} матрицы A и компоненты $f_{\delta,i}$ вектора f_δ) заданы с бесконечным числом значащих цифр;

б) все арифметические действия над числами выполняются *идеально точно*, т. е. без каких-либо ошибок округления.

Внимание! Уже в то время, когда М.М. Лаврентьев создавал свой метод, было известно, что если матрица A имеет достаточно большую размерность (условно: $N \geq 100$) и является очень плохо обусловленной (например, это известная матрица Гильберта, с элементами $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$), то даже в том случае, когда $\delta f = 0$, система может не решаться — из-за того, что разложение Холецкого матрицы A,

$$A = LL^T, \tag{43}$$

не находится — в силу ошибок округления, а потому при некотором i под знаком квадратного корня возникает отрицательное число.

Таким образом, переход от СЛАУ

$$\begin{gathered} Ax = f_\delta = f + \delta f, \\ A = A^T > 0 \end{gathered} \tag{44}$$

к регуляризованной СЛАУ

$$(\alpha E_N + A)x_\alpha = f_\delta \tag{45}$$

фактически имеет две цели:

а) подавить влияние вектора помехи δf;

б) обеспечить нахождение разложения Холецкого матрицы СЛАУ (44).

Итак, при заданном значении α сначала матрица

$$A_\alpha = A + \alpha E_N \tag{46}$$

разлагается (классическим методом Холецкого, см. [9, 10]) в произведение треугольных матриц

$$A_\alpha = L_\alpha L_\alpha^T \tag{47}$$

(здесь L_α суть нижняя треугольная матрица размера $(N \times N)$, а L_α^T — верхняя треугольная матрица, получаемая транспонированием матрицы L_α).

После того, как разложение (47) найдено, последовательно решаются две СЛАУ с треугольными матрицами:

$$\begin{aligned} L_\alpha z_\alpha &= f_\delta, \\ L_\alpha^T x_\alpha &= z_\alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

4. Итак, способ решения регуляризованной СЛАУ (45) при заданном значении α описан. Остается указать на то, что для нахождения вектора

$$x_\delta = x_{\alpha_\delta}, \tag{49}$$

при котором выполняется (приближенно, но с достаточно высокой точностью) соотношение (39), необходимо находить решения регуляризованных СЛАУ (45) при достаточно большом числе значений параметра регуляризации α. Вычислительный опыт показывает, что число n различных значений α, при которых решаются регуляризованные СЛАУ (45), обычно заключено в пределах

$$10 \le n \le 20, \tag{50}$$

т. е. в среднем имеем

$$n = 15. \tag{51}$$

Иначе говоря, метод Лаврентьева *очень трудоемок.*

Но это не самый главный недостаток этого метода. Главный его недостаток в том, что в нем *не выполняются определяющие соотношения (2).*

В самом деле, при любом $\alpha > 0$ в методе Лаврентьева имеют место соотношения

$$x_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\alpha}, \tag{52}$$

где положено

$$\rho_\alpha = f_\delta - Ax_\alpha. \tag{53}$$

Равенство (52) в развернутой форме таково:

$$x_\alpha = \frac{f - Ax_\alpha}{\alpha} + \frac{\delta f}{\alpha}. \tag{54}$$

Из (54) следует

$$Ax_\alpha = \frac{\mathrm{A}(f - Ax_\alpha)}{\alpha} + \frac{A\delta f}{\alpha}. \tag{55}$$

Но известно, что

$$\alpha_\delta = \mathrm{O}(\delta), \quad \delta = \|\delta f\|_E\,. \tag{56}$$

Таким образом, имеем, что вектор $Ax_\delta = Ax_{\alpha_\delta}$ достаточно сильно зависит от вектора помехи δf, а еще сильнее от вектора помехи δf зависит вектор $x_{\alpha_\delta} = \hat{x}$.

И эти два факта имеют место потому, что при всех $\alpha > 0$ выполняется соотношение (52), т. е. векторы x_α однозначно выражаются через векторы невязок ρ_α и α.

5. В заключение укажу, что не только метод Лаврентьева, но вся классическая теория регуляризации СЛАУ вида

$$Ax = f_\delta = f + \delta f, \tag{57}$$

созданная в 50–80-е годы XX века в основополагающих трудах А.Н. Тихонова, В.К. Иванова, М.М. Лаврентьева и их многочисленных учеников и последователей (см. [11, 12]), имеет ряд важных (принципиально важных!) недостатков. Основных недостатков этой теории три.

Первый недостаток состоит в том, что в этой теории используется точное знание величины

$$\delta^2 = \|\delta f\|_E^2\,, \tag{58}$$

тогда как в геофизике (а также в геодезии и геоинформатике) точного знания этой величины никогда нет, известны лишь величины $\delta^2_{\min}$ и $\delta^2_{\max}$ в неравенствах

$$\delta^2_{\min} < \|\delta f\|^2_E \leq \delta^2_{\max}, \tag{59}$$

причем величина

$$\gamma^2 = \frac{\delta^2_{\max}}{\delta^2_{\min}} \tag{60}$$

может быть и заметно больше единицы.

Второй недостаток классической теории регуляризации СЛАУ (57) состоит в том, что в ней не учитывается возможность (и необходимость!) использования и другой, априорной, информации о векторах δf и f.

Третий недостаток классической теории регуляризации СЛАУ (57) (по мнению автора – принципиально важный) состоит в том, что в ней не формулируются и не обсуждаются соотношения

$$A\hat{x} \approx f, \quad f_\delta - A\hat{x} \approx \delta f, \tag{61}$$

являющиеся характеристиками для вектора $\hat{x}$.

6. Имея в виду решение задач гравиметрии, магнитометрии, геодезии и геоинформатики, следует указать на четыре принципиально важных момента, определяющих предлагаемый новый метод нахождения устойчивых приближенных решений СЛАУ:

$$\begin{gathered} Ax = f_\delta = f + \delta f, \\ A = A^T > 0. \end{gathered} \tag{62}$$

Первый момент. Известными являются величины $\delta^2_{\min}$ и $\delta^2_{\max}$ в неравенствах

$$\delta^2_{\min} < \|\delta f\|^2_E \le \delta^2_{\max}, \tag{63}$$

при этом имеем

$$1 < \gamma^2 = \frac{\delta^2_{\max}}{\delta^2_{\min}} \le 2. \tag{64}$$

Ясно, что наивероятное значение величины $\|\delta f\|^2_E$ таково:

$$\Delta^2 = \frac{\delta^2_{\min} + \delta^2_{\max}}{2}. \tag{65}$$

Второй момент состоит в том, что априорно известно равенство

$$(f, \delta f) = 0. \tag{66}$$

Третий момент состоит в том, что вектор $\hat{x}$, в силу первого и второго моментов, должен удовлетворять равенствам

$$\begin{aligned} \|f_\delta - A\hat{x}\|^2_E &= \Delta^2, \\ (A\hat{x}, f_\delta - A\hat{x}) &= 0, \end{aligned} \tag{67}$$

или по-другому — равенствам

$$\begin{aligned} \|Ax\|^2_E &= \|f_\delta\|^2_E - \Delta^2, \\ (\mathrm{A}^T f_\delta, x) &= \|f_\delta\|^2_E - \Delta^2. \end{aligned} \tag{68}$$

Четвертый момент состоит в том, что вектор $\hat{x}$, удовлетворяющий соотношениям (7), проще всего найти (как именно, описывается ниже), если предварительно определить вектор $\tilde{\tilde{x}}$, для которого выполняется неравенство

$$0 < \left\|f_\delta - A\tilde{\tilde{x}}\right\|^2_E < \delta^2_{\min}. \tag{69}$$

В приводимом ниже описании нового метода нахождения устойчивых приближенных решений $\hat{x}$ СЛАУ (62) все приведенные четыре момента учитываются. При этом, естественно, учитывается и различие в свойствах векторов f и δf.

А именно, вектор полезного сигнала f является *низкочастотным*, т. е. его компоненты f_i, $1 \le i \le N$, при изменении номера i на единицу изменяется плавно (закономерно), а вектор δf является *высокочастотным*, более того — *случайным и однородным.*

7. Итак, пусть задана СЛАУ

$$Ax = f_\delta = f + \delta f \tag{70}$$

с $(N \times N)$-матрицей A со свойством

$$A = A^T > 0, \tag{71}$$

которая является достаточно плохо обусловленной (что почти всегда имеет место, если N велико, условно: $N \ge 1000$).

Обозначим через

$$D_A \tag{72}$$

диагональ матрицы A, т. е. ее элементы d_i суть

$$d_i = a_{ii}, \quad 1 \le i \le N. \tag{73}$$

Так вот, в новом (описываемом ниже) методе нахождение векторов $\hat{x}$ СЛАУ (70) заменяется на регуляризованную СЛАУ

$$A_\alpha x_\alpha = [(D_A + \alpha D_A^{-1}) + (1-\beta)(A - D_A)]x_\alpha = \lambda f_\delta, \tag{74}$$

при этом в (74) β и λ *не являются независимыми*, они однозначно определяются по заданному значению α (см. ниже).

Внимание! Прежде всего обратим внимание читателей на тот факт, что в новом методе улучшение обусловленности матрицы A путем ее замены на матрицу

$$A_\alpha = [(D_A + \alpha D_A^{-1}) + (1-\beta)(A - D_A)] \tag{75}$$

достигается двумя способами:

во-первых, заменой матрицы D_A на матрицу

$$D_A + \alpha D_A^{-1}, \tag{76}$$

где

$$\alpha > 0 \tag{77}$$

— небольшое число;

во-вторых, заменой матрицы $A - D_A$ на матрицу

$$(1-\beta)(A - D_A). \tag{78}$$

(A propos — в методе Лаврентьева (см. [8, 11, 12]) используется существенно более простая конструкция, а именно — матрица D_A заменяется на матрицу $D_A + \alpha E$, где $\alpha > 0$, а матрица $A - D_A$ остается без изменения.)

Так вот, в (75) величина $\alpha > 0$ является заданной, а величина β находится по величине α на основе соотношения

$$\left\| D_A + \alpha D_A^{-1} \right\|_E^2 + (1-\beta)^2 \left\| A - D_A \right\|_E^2 = \left\| D_A \right\|_E^2 + \left\| A - D_A \right\|_E^2, \tag{79}$$

которое представляет собой развернутую запись соотношения

$$\left\| A_\alpha \right\|_E^2 = \left\| A \right\|_E^2, \tag{80}$$

выражающего собой *принцип сохранения евклидовой нормы матрицы при ее регуляризации.*

Ясно, что из (79) следует

$$(1-\beta)^2 = \frac{\left\| D_A + \alpha D_A^{-1} \right\|_E^2 - \left\| D_A \right\|_E^2}{\left\| A - D_A \right\|_E^2} \tag{81}$$

и далее

$$\beta = 1 - \sqrt{\frac{\left\|D_A + \alpha D_A^{-1}\right\|_E^2 - \|D_A\|_E^2}{\|A - D_A\|_E^2}}. \tag{82}$$

Ясно также, что при достаточной малости величины α имеем

$$0 < \beta < 1. \tag{83}$$

При этом ясно, что условие достаточной малости α имеет вид

$$\left\|D_A + \alpha D_A^{-1}\right\|_E^2 - \|D_A\|_E^2 < \|A - D_A\|_E^2. \tag{84}$$

8. Далее рассмотрим вопрос об определении величины λ, фигурирующей в СЛАУ (74). Для этого введем вектор $\tilde{x}_\alpha$, являющийся решением СЛАУ:

$$A_\alpha \tilde{x}_\alpha = \left[(D_A + \alpha D_A^{-1}) + (1-\beta)(A - D_A)\right] \tilde{x}_\alpha = f_\delta. \tag{85}$$

Иными словами, СЛАУ (85) есть СЛАУ (74) при $\lambda = 1$. Допустим, что решение СЛАУ (85) при заданном значении α — и найденном по нему значении β — получено (как именно, описывается ниже, см. п. 9 статьи). Ясно, что тем самым найдена и величина

$$\tilde{\nu}_\alpha^2 = \|f_\delta - A\tilde{x}_\alpha\|_E^2. \tag{86}$$

Допустим теперь, что желательно найти несколько более точное приближенное решение

$$\tilde{\tilde{x}}_\alpha, \tag{87}$$

т. е. такое, что

$$\left\|f_\delta - A\tilde{\tilde{x}}_\alpha\right\|_E^2 < \|f_\delta - A\tilde{x}_\alpha\|_E^2. \tag{88}$$

Ясно, что можно принять

$$\tilde{\tilde{x}}_\alpha = \lambda \tilde{x}_\alpha \tag{89}$$

(т. е. $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$ есть уже решение СЛАУ (74)) и находить значение $\lambda = \lambda_\alpha$ из условия

$$\|f_\delta - \lambda A\tilde{x}_\alpha\|_E^2 = \min_\lambda. \tag{90}$$

Нетрудно понять, что из (90) находим такое значение $\lambda = \lambda_\alpha$:

$$\lambda = \lambda_\alpha = \frac{(f_\delta, A\tilde{x}_\alpha)}{\|A\tilde{x}_\alpha\|_E^2}. \tag{91}$$

9. Опишем далее метод решения СЛАУ (85) — при заданном значении α и найденном по нему значении β. Матрицу СЛАУ (85) обозначим A_α.

Так вот, сначала матрица A_α классическим методом Холецкого (см. [8, 9]) разлагается в произведение двух треугольных матриц

$$A_\alpha = L_\alpha L_\alpha^T, \tag{92}$$

где L_α — нижняя треугольная матрица размера $(N \times N)$, а L_α^T — верхняя треугольная матрица, получаемая транспонированием матрицы L_α, после чего последовательно решаются две СЛАУ с треугольными матрицами:

$$\begin{aligned} L_\alpha z_\alpha &= f_\delta, \\ L_\alpha^T \tilde{x}_\alpha &= z_\alpha. \end{aligned} \tag{93}$$

Как известно (см. [8, 9]), нахождение разложения (92) требует выполнения

$$\frac{N^3}{3} \tag{94}$$

арифметических операций, а нахождение решений двух СЛАУ с треугольными матрицами (93) — еще

$$4N^2 \tag{95}$$

арифметических операций. Сверх того, определение величины β_α по заданному значению α (см. п. 7 статьи) требует выполнения еще $\mathrm{O}(N^2)$ арифметических операций, и такое же число арифметических операций требуется на нахождение величины λ_α. Иначе говоря, вычислительная процедура нахождения вектора $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$ (см. (37)) достаточно трудоемка, если значение N достаточно велико, условно

$$N \geq 1000. \tag{96}$$

10. В связи с этим весьма важное значение имеет эффективный алгоритм нахождения такого значения α, при котором выполняется неравенство

$$\left\| f_\delta - A\tilde{\tilde{x}}_\alpha \right\|_E^2 < \delta_{\min}^2. \tag{97}$$

Дело в том, что если вектор $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$ найден, то вектор $\hat{x}$ определяется достаточно эффективно.

В самом деле, по вектору $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$, для которого выполняется неравенство (97), сначала находятся векторы $x^{[1]}$ и $x^{[2]}$, для которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left\| f_\delta - Ax^{[1]} \right\|_E^2 &= \delta_{\max}^2, \\ \left\| f_\delta - Ax^{[2]} \right\|_E^2 &= \delta_{\min}^2, \end{aligned} \tag{98}$$

после чего по векторам $x^{[1]}$ и $x^{[2]}$ находится вектор $\hat{x}$.

Векторы $x^{[1]}$ и $x^{[2]}$ определяются в таком виде:

$$\begin{aligned} x^{[1]} &= \tau_1 \tilde{\tilde{x}}_\alpha, \\ x^{[2]} &= \tau_2 \tilde{\tilde{x}}_\alpha, \end{aligned} \tag{99}$$

где величины τ_1 и τ_2:

$$0 < \tau_1 < 1, \quad 0 < \tau_2 < 1, \tag{100}$$

находятся как соответствующие корни квадратных уравнений

$$\begin{aligned} \left\| f_\delta - \tau_1 A\tilde{\tilde{x}}_\alpha \right\|_E^2 &= \delta_{\max}^2, \\ \left\| f_\delta - \tau_2 A\tilde{\tilde{x}}_\alpha \right\|_E^2 &= \delta_{\min}^2. \end{aligned} \tag{101}$$

После того, как векторы $x^{[1]}$ и $x^{[2]}$ найдены, вектор $\hat{x}$ определяется как линейная комбинация этих векторов, а именно

$$\hat{x} = ax^{[1]} + bx^{[2]}. \tag{102}$$

Причем величины a и b в (102) находятся из условий

$$\begin{aligned} &\|A\hat{x}\|_E^2 = \|au + bv\|_E^2 = \|f_\delta\|_E^2 - \Delta^2, \\ &(A^T f_\delta, \hat{x}) = a(A^T f_\delta, x^{[1]}) + b(A^T f_\delta, x^{[2]}) = \|f_\delta\|_E^2 - \Delta^2, \end{aligned} \tag{103}$$

в которых положено

$$u = Ax^{[1]}, \quad v = Ax^{[2]}. \tag{104}$$

Нетрудно установить, что из соотношений (103)–(104) величины a и b находятся однозначно.

Таким образом, определение вектора $\hat{x}$ сводится к определению вектора $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$, удовлетворяющего неравенству (97). Нахождение же вектора $\tilde{\tilde{x}}_\alpha$ сводится к рациональному заданию множества величин α,

$$\alpha = \alpha_1, \ \ \alpha_2, \ \ ..., \ \ \alpha_n, \tag{105}$$

где значение n достаточно мало, условно

$$n \leq 6. \tag{106}$$

Значения величины α (по которой, как описано выше, определяются величины $\beta = \beta_\alpha$ и $\lambda = \lambda_\alpha$) следует задавать так:

$$\begin{aligned} &\alpha_1, \\ &\alpha_k = q_k \alpha_{k-1}, \\ &k = 2, \ 3, \ ..., \end{aligned} \tag{107}$$

где q_k суть величины, которые должны находиться в процессе счета. По-видимому, целесообразно принимать

$$\alpha_1 = 10^{-6} \dots 10^{-7} \tag{108}$$

и

$$q_k = \left(\frac{\delta^2_{\min}}{v^2_{k-1}} \right)^{1/2}, \tag{109}$$

где положено

$$v^2_{k-1} = \left\| f_\delta - Ax_{\alpha_{k-1}} \right\|^2_E. \tag{110}$$

Ясно, что:

а) значение α_1 следует задавать так, чтобы было

$$v_1^2 = \|f_\delta - Ax_{\alpha_1}\|_E^2 \approx \delta^2_{\max}; \tag{111}$$

б) последующие значения α_k должны обеспечить достаточно быстрое нахождение вектора $\tilde{\tilde{x}}$, для которого

$$\left\| f_\delta - \tau_2 A\tilde{\tilde{x}} \right\|^2_E < \delta^2_{\min}. \tag{112}$$

Внимание! Ясно, что описанный метод целесообразнее всего использовать при расчетах на кластерах из персональных компьютеров или многопроцессорных вычислительных систем, когда $x_{\alpha_k}, \ k = 1, 2, 3, ..., n$, можно вычислить в режиме параллельных вычислений.

Заключение

Итак, остается лишь подвести основные итоги работы.

Первый (самый главный) **итог** работы состоит в том, что в ней предложен принципиально новый метод устойчивых приближенных решений $\hat{x}$ для СЛАУ вида

$$\begin{gathered} Ax = f_\delta = f + \delta f, \\ A = A^T > 0, \end{gathered} \tag{113}$$

имеющих матрицу A достаточно большого размера $(N \times N)$,

$$N \geq 1000. \tag{114}$$

Второй итог работы состоит в том, что в новом методе реализуется принципиально новая стратегия нахождения векторов $\hat{x}$ (устойчивых приближенных решений СЛАУ (53)). А именно, сначала определяется вектор $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий неравенству

$$\left\| f_\delta - A\tilde{\tilde{x}} \right\|_E^2 < \delta_{\min}^2, \tag{115}$$

а уже затем по вектору $\tilde{\tilde{x}}$ находится вектор $\hat{x}$, удовлетворяющий сразу двум условиям:

$$\begin{gathered} \|f_\delta - A\hat{x}\|_E^2 = \Delta^2, \\ (A\hat{x}, f_\delta - A\hat{x}) = 0, \end{gathered} \tag{116}$$

где положено

$$\Delta^2 = \frac{\delta_{\min}^2 + \delta_{\max}^2}{2}. \tag{117}$$

Третий итог работы состоит в том, что вектор $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий (115), определяется на основе параметровой регуляризации СЛАУ (113), принципиально отличной от той, которая используется в методе Лаврентьева.

А именно, регуляризация СЛАУ (53) по Лаврентьеву состоит в замене этой СЛАУ на СЛАУ

$$(\alpha E + A)x_\alpha = f_\delta, \tag{118}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, а E — единичная $(N \times N)$-матрица (см. [8, 11]).

В новом же методе СЛАУ (113) заменяется на более сложную, но и обеспечивающую существенно лучшую обусловленность, СЛАУ

$$Ax_\alpha = [(D_A + \alpha D_A^{-1}) + (1 - \beta)(A - D_A)]x_\alpha = \lambda f_\delta. \tag{119}$$

При этом в (119) задается лишь значение α, а величины β и λ находятся по заданному α. При этом $\beta = \beta_\alpha$ определяется по принципу сохранения евклидовой нормы матрицы при ее регуляризации.

Таковы три основных итога работы.

Список литературы

[1] Страхов В.Н. Линейные задачи гравиметрии и магнитометрии в постановках, адекватных геофизической практике // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. М.: ОИФЗ РАН, 1997. С. 89–105.

[2] Страхов В.Н. Современное состояние и перспективы развития теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Воронеж, 1998. С. 4–35.

[3] Страхов В.Н. О методе линейных интегральных представлений при решении задач гравиметрии и магнитометрии // Актуальные вопросы математической геофизики. М.: ОИФЗ РАН, 2001. Т. 1. С. 110–115.

[4] Коша А. Вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 1983. 279 с.

[5] Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Курс вариационного исчисления. М.; Л.: Гостоптехиздат, 1950.

[6] Страхов В.Н. Смена эпох в науках о Земле // Вторая Всероссийская школа-семинар по электромагнитным зондированиям Земли: Общая информационная, научная программа, лекции, тезисы, Москва, 28–30 ноября 2005. М.: Макспресс, 2005. С. 11–20.

[7] Страхов В.Н. Три парадигмы в теории и практике интерпретации потенциальных полей (анализ прошлого и прогноз будущего). М.: ОИФЗ РАН, 1999. 78 с.

[8] Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 92 с.

[9] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.

[10] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 734 с.

[11] Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 226 с.

[12] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Поступила в редакцию 9 февраля 2007 г.,
в переработанном виде — 23 июня 2007 г.