Рекуррентная сплайн-аппроксимация третьей степени произвольной глубины p*

Э. А. Эшаров
Томский государственный университет, Россия
e-mail: elzare78@rambler.ru

Construction of a recurrent spline approximation algorithm, exact on polynomials of the third order is investigated. A computational scheme for the recurrent spline approximation of the third order valid for any depths p at an uniform grid is proposed and justified in the case of noised data.

В теории сплайнов важную роль играют аппроксимации, построенные на основе аппарата B-сплайнов [1]. Пусть $S_3(t)$ — кубический сплайн с узлами на сетке Δ: $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, ..., N$, $h = (b-a)/N$. Дополним сетку Δ узлами $t_{-1} = a - h$, $t_{N+1} = b + h$ и запишем $S_3(t)$ по системе кубических B-сплайнов:

$$S_3(t) = \sum_{j=-1}^{N+1} y_j B_3^j(t) = \sum_{j=-1}^{N+1} y_j B_3\left(\frac{t-t_j}{h}\right), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

где

$$B_3(\tau) = \begin{cases} 2/3 - \tau^2 + |\tau|^3/2, & |\tau| \le 1, \\ (2-|\tau|)^3/6, & 1 \le |\tau| \le 2, \\ 0, & 2 \le |\tau|. \end{cases} \tag{2}$$

Как известно [1], если положить $y_j = f(t_j)$, то формула (1) будет точна на многочленах первой степени. При выборе

$$y_j = \frac{1}{6}[-f(t_{j-1}) + 8f(t_j) - f(t_{j+1})] \tag{3}$$

формула (1) будет точна на кубических многочленах.

Пусть $t \in [t_k, t_{k+1})$. Тогда с учетом (2) формулу (1) можно переписать в виде

$$S_3(t) = \frac{1}{6}(1-\tau)^3 y_{k-1} + \left(\frac{2}{3} - \tau^2 + \frac{1}{2}\tau^3\right) y_k + \left[\frac{2}{3} - (1-\tau)^2 + \frac{1}{2}(1-\tau)^3\right] y_{k+1} + \frac{1}{6}\tau^3 y_{k+2},$$

где $\tau = (t - t_k)/h$, или

$$S_3(t) = \frac{1}{6}(1-\tau)^3 y_{k-1} + b(\tau) y_k + b(1-\tau) y_{k+1} + \frac{1}{6}\tau^3 y_{k+2}, \; b(\tau) = \frac{2}{3} - \tau^2 + \frac{1}{2}\tau^3. \tag{4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (гранты № 06-02-64202 а/Т и № 07-02-94773 и/м).

Пусть значения сплайна S_3 в (4) вычисляются на сетке Δ с ошибками измерения ξ_i. Тогда, согласно (4), измеренные значения $S_{3,i}$ будут иметь вид

$$S_{3,i} = \frac{1}{6}y_{i-1} + \frac{2}{3}y_i + \frac{1}{6}y_{i+1} + \xi_i \ \forall i. \tag{5}$$

В отличие от случаев интерполяционных и сглаживающих сплайнов вычисления по явной формуле (3) могут быть легко реализованы для бесконечно продолженной в обе стороны сетки. На практике это оказывается важным при обработке данных слева направо в темпе реального времени по мере поступления исходной информации. С точки зрения теории измерений формулы (3), (4) представляют собой локальный усредняющий фильтр с диапазоном времени запаздывания $[2h, 3h)$. В ряде случаев лучшие результаты в смысле уменьшения времени запаздывания и повышения точности аппроксимации дает совместное применение усредняющего и рекуррентного фильтров.

Таким образом, для нахождения параметров кубического сплайна на бесконечно продолженной вправо сетке, в отличие от (3), будем использовать рекуррентный алгоритм, требующий вычисления очередного коэффициента y_j через известные y_{j-1}, $y_{j-2}, \ldots, y_{j-p}$ с учетом наблюдений, поступивших в окрестности j-го этапа. При этом j-я группа наблюдений не влияет на значения параметров $y_{-1}, y_0, \ldots, y_{j-1}$, вычисленных ранее. Начальные значения $y_j, j = -1, \ldots, p-2$, определяются по измеренным значениям $f(t)$ на начальных отрезках, например, по способу наименьших квадратов. Такой алгоритм можно определить согласно соотношению

$$y_j = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q y_{j-q} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i f(t_{j-k+i}), \quad j = p-1, p, \ldots, \tag{6}$$

где произвольное p — глубина рекурсии; m — ширина шаблона усреднения; k — сдвиг шаблона усреднения; коэффициенты λ_q, α_i — свободные параметры рекуррентного усредняющего алгоритма. Известны примеры вычисления параметров из условий наименьших квадратов, минимума остаточной дисперсии [2] либо минимума регуляризующего функционала [3]. Условие устойчивости полученных вычислительных схем каждый раз проверяется дополнительно, при этом точность на многочленах третьей степени не гарантирована, что может привести к снижению предельной точности аппроксимации сплайнами третьей степени. В отличие от ранее известных подходов мы предлагаем сразу закладывать в вычислительную схему данное условие.

Теорема 1. *Пусть параметры λ_q, α_i алгоритма (6) удовлетворяют условиям*

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i = 1 - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q, \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (i-k)h = \sum_{q=1}^{p} q\lambda_q,$$

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i (i-k)^2 h^2 = -\frac{h^2}{3} - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \left(q^2 - \frac{h^2}{3}\right), \quad \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (i-k)^3 h^3 = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q (qh^2 - q^3) \tag{7}$$

при

$$\sum_{q=1}^{p} |\lambda_q| < 1. \tag{8}$$

Тогда коэффициенты сплайна y_j вычисляются устойчивым образом. Сплайн, построенный в условиях теоремы, обеспечивает точность на многочленах третьей степени.

Доказательство. Проверим условия точности на многочленах третьей степени [4]. Для того чтобы сплайн совпадал тождественно с $f(t)$ для любых $f(t)$ из пространства многочленов не выше третьей степени, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q=1,\quad \sum_{i=0}^{m}\alpha_i t_{j-k+i}+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q t_{j-q}=t_j,$$

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i t_{j-k+i}^2+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q\left(t_j^2-2t_jq+q^2-\frac{h^2}{3}\right)=t_j^2-\frac{h^2}{3},$$

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i t_{j-k+i}^3+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q\left(t_j^3-3t_j^2q+3t_jq^2-q^3-t_jh^2+qh^2\right)=t_j^3-t_jh^2.$$

Здесь $t_{j-k+i}=t_j+(i-k)h$. Из первого равенства получим $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i=1-\sum\limits_{q=1}^{p}\lambda_q$. Далее, из второго равенства после некоторых преобразований запишем $\sum\limits_{i=0}^{m}\alpha_i(i-k)h=\sum\limits_{q=1}^{p}q\lambda_q$. Перейдем к третьему равенству системы и, подставляя $(t_j+(i-k)h)^2$ вместо t_{j-k+i}^2, получим

$$t_j^2\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q-1\right)+2t_j\left(\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(i-k)h-\sum_{q=1}^{p}\lambda_q q\right)+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(i-k)^2h^2+\sum_{q=1}^{p}\lambda_q\left(q^2-\frac{h^2}{3}\right)+\frac{h^2}{3}=0.$$

В силу первых двух равенств выражения в скобках равны нулю. Следовательно, получаем третье из доказываемых условий (7):

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(i-k)^2h^2=-\sum_{q=1}^{p}\lambda_q\left(q^2-\frac{h^2}{3}\right)-\frac{h^2}{3}.$$

Аналогично, рассматривая четвертое равенство системы, получаем последнее из соотношений (7):

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_i(i-k)^3h^3=\sum_{q=1}^{p}\lambda_q(qh^2-q^3).$$

Условия (7) теоремы доказаны.

Введем обозначение

$$\tilde{y}_j=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i f(t_{j-k+i}).\tag{9}$$

Используя обозначение (9), уравнение (6) можно переписать в виде

$$y_j=\sum_{q=1}^{p}\lambda_q y_{j-q}+\tilde{y}_j,\tag{10}$$

или с учетом предыдущего замечания о способе задания начальных условий — в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$Qy = B, \tag{11}$$

где

$$B = [y_{-1}, y_0, \dots, y_{p-2}, -\sum_{i=0}^{m} \alpha_i f(t_{i+p-1-k}), \dots]^T,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p & -1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{p-1} & \lambda_p & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Здесь Q — ленточная матрица, которая при выполнении условия (8) обладает диагональным преобладанием. Следовательно, решение линейного неоднородного разностного уравнения (10) устойчиво к влиянию начальных данных [5].

Теорема доказана. □

Полученные значения коэффициентов сплайна y_j $\forall j$ представляют собой статистические оценки $\hat{y}_j$ истинных значений коэффициентов, для которых согласно (10) справедливы уравнения

$$\hat{y}_j = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q \hat{y}_{j-q} + \tilde{y}_j. \tag{12}$$

Следующая теорема доказывает асимптотическую сходимость рекуррентного алгоритма (6) по коэффициентам.

Теорема 2. *Будем предполагать, что ξ_i $\forall i$ — случайные величины с нулевым средним. Тогда в условиях Теоремы 1 оценки коэффициентов сплайна y_j асимптотически несмещенные при $j \to \infty$.*

Доказательство. С учетом (7) получаем

$$\tilde{y}_j = y_j - \sum_{q=1}^{p} \lambda_q y_{j-q} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \xi_{j-k+i}. \tag{13}$$

С учетом (13) выражение (12) принимает вид

$$\hat{y}_j - y_j = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q (\hat{y}_{j-q} - y_{j-q}) + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \xi_{j-k+i}. \tag{14}$$

Применим к формуле (14) операцию вычисления математического ожидания. Тогда

$$M\left\{\hat{y}_j - y_j\right\} = \sum_{q=1}^{p} \lambda_q M\left\{\hat{y}_{j-q} - y_{j-q}\right\} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i M\left\{\xi_{j-k+i}\right\}. \tag{15}$$

В выражении (15) $M\left\{\xi_{j-k+i}\right\}=0$ согласно постановке задачи. Таким образом, выражение (15) принимает окончательный вид

$$M\left\{\hat{y}_j-y_j\right\}=\sum_{q=1}^{p}\lambda_q M\left\{\hat{y}_{j-q}-y_{j-q}\right\}\forall j. \tag{16}$$

Равенства (16) представляют собой однородную систему линейных алгебраических уравнений вида (11) с нулевой правой частью. Матрица Q в силу невырожденности имеет только тривиальное решение $M\left\{\hat{y}_j-y_j\right\}\to 0, j\to\infty$, т. е. несмещенность решения y_j следует из его устойчивости.

Теорема 2 доказана. □

Рассмотрим примеры для рекуррентной сплайн-аппроксимации третьей степени глубины $p=0$ (рекурсивное слагаемое отсутствует) и $p=1$.

Случай 1. Пусть $p=0,\ m=3,\ k=2,\ h=1$. В результате имеем четыре неизвестных значения — $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$, для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & = & 1, \\ 2\alpha_0+\alpha_1-\alpha_3 & = & 0, \\ 4\alpha_0+\alpha_1+\alpha_3 & = & -1/3, \\ 8\alpha_0+\alpha_1-\alpha_3 & = & 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен 12, поэтому существует единственное решение $\alpha_0=0,\ \alpha_1=-1/6,\ \alpha_2=4/3,\ \alpha_3=-1/6$, и оно совпадает с локальной аппроксимацией (3).

Случай 2. Пусть $p=1,\ m=2,\ k=1,\ h=1$. В результате имеем четыре неизвестных значения — $\lambda_1,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$, для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

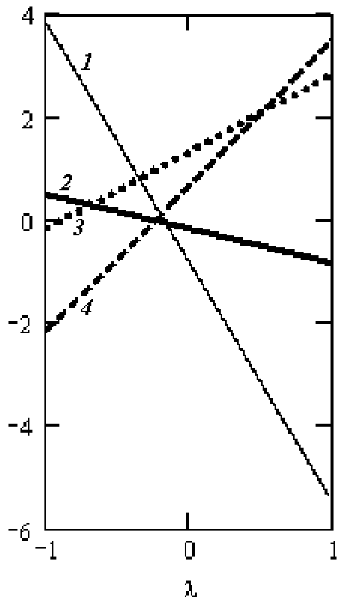
$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\lambda_1 & = & 1, \\ \alpha_0-\alpha_2+\lambda_1 & = & 0, \\ \alpha_0+\alpha_2-2\lambda_1/\ 3 & = & 1/3, \\ 8\alpha_0-\alpha_2 & = & 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен $22/3$, поэтому существует единственное решение $\alpha_0=1/22,\ \alpha_1=19/11,\ \alpha_2=4/11,\ \lambda_1=7/22$. Полученное значение $\lambda_1=7/22$ по модулю меньше 1, т. е. решение удовлетворяет условиям теоремы. При этом диапазон запаздывания составляет $[h,2h)$, что существенно меньше случая локальной аппроксимации.

Случай 3. Пусть теперь $p=1,\ m=2,\ k=2,\ h=1$. В результате имеем четыре неизвестных значения — $\lambda_1,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$, для определения которых требуется решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\lambda_1 & = & 1, \\ 2\alpha_0+\alpha_1+\lambda_1 & = & 0, \\ 4\alpha_0+\alpha_1-2\lambda_1/\ 3 & = & 1/3, \\ 8\alpha_0+\alpha_1 & = & 0. \end{cases}$$

Детерминант матрицы системы равен -8. Единственное решение системы существует: $\alpha_0=-1/24,\ \alpha_1=1/3,\ \alpha_2=23/24,\ \lambda_1=-1/4$. Полученное значение $\lambda_1=-1/4$ по



Графики коэффициентов в зависимости от λ_1 при $|\lambda_1| < 1$:
1 — $\alpha_0 = -\dfrac{2\lambda_1}{3} - \dfrac{1}{6}$; *2* — $\alpha_1 = -\dfrac{17\lambda_1}{6} + \dfrac{2}{3}$; *3* — $\alpha_2 = -\dfrac{14\lambda_1}{3} - \dfrac{5}{6}$; *4* — $\alpha_3 = -\dfrac{3\lambda_1}{2} + \dfrac{4}{3}$

модулю меньше 1, т. е. оно также удовлетворяет условиям теоремы. При этом запаздывание не превышает величины шага h.

Случай 4. Пусть теперь $p = 1$, $m = 3$, $k = 3$, $h = 1$. В результате имеем пять неизвестных значений — λ_1, α_0, α_1, α_2, α_3, для определения которых требуется решить недоопределенную систему четырех линейных алгебраических уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = & 1 - \lambda_1, \\ 3\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2 & = & -\lambda_1, \\ 9\alpha_0 + 4\alpha_1 + \alpha_2 & = & 1/3 + 2\lambda_1/3, \\ 27\alpha_0 + 8\alpha_1 + \alpha_2 & = & 0. \end{array}\right.$$

Детерминант матрицы системы равен 12, поэтому существует общее решение, зависящее от параметра λ_1:

$$\alpha_0 = -2\lambda_1/3 - 1/6, \quad \alpha_1 = 17\lambda_1/6 + 2/3, \quad \alpha_2 = -14\lambda_1/3 - 5/6, \quad \alpha_3 = 3\lambda_1/2 + 4/3.$$

Графики полученных значений коэффициентов в зависимости от λ_1 при $|\lambda_1| < 1$ представлены на рисунке.

Таким образом, получен класс рекуррентных вычислительных процессов, удовлетворяющих условию устойчивости $|\lambda_1| < 1$, оценки коэффициентов $\hat{y}_j$ экспериментальной зависимости, представленной в виде сплайна третьей степени. Это допускает проведение дополнительной оптимизации по λ_1 (например, согласно критерию минимума погрешности аппроксимации на многочленах четвертой степени). При этом минимальное запаздывание $[-h, 0]$ обеспечивается при $\alpha_3 = 0$ (соответственно, $\lambda_1 = -2/3$), что представляет возможность устойчивого прогнозирования измеренных сеточных значений на шаг вперед.

Автор благодарит научного руководителя проф., д.ф.-м.н. Б.М. Шумилова.

Список литературы

[1] Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

[2] Сухотина Л.Ю. Рекуррентные алгоритмы оценки параметров сплайновых моделей временных рядов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск, 1988. 169 с.

[3] Кочегурова Е.А. Текущая аппроксимация нестационарных случайных процессов в системах управления на основе рекуррентного сглаживающего сплайна: Дис. ... канд. техн. наук. Томск, 1990. 167 с.

[4] Шумилов Б.М. Рекуррентная аппроксимация сплайнами // Изв. вузов. Математика. 1996. № 1. С. 85–87.

[5] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 176 с.

Поступила в редакцию 20 февраля 2007 г.,
в переработанном виде — 21 марта 2008 г.