Продолжение вероятностного представления резольвенты для краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца*

В. Л. Лукинов
Институт вычислительной математики и геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: Vitaliy.Lukinov@ngs.ru

A problem of construction of statistical methods for solution of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation when the spectral parameter is close or greater then the first eugenvalue of the Laplace operator is considered. The corresponding estimates and a probabilistic representation of solution are constructed by shifting the spectral parameter.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в области $D \subset R^3$ с границей Γ:

$$(\Delta + c)u = -g, \quad u|_{\Gamma} = \varphi. \tag{1}$$

Предположим выполненными следующие условия. Функция g удовлетворяет условию Гёльдера в $\overline{D}$, D — ограниченное открытое множество в R^3 с регулярной границей Γ, функция φ непрерывна на Γ, $c < c^*$, где c^* — первое собственное значение оператора Лапласа для области D. Эти условия, обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи, а также возможность его вероятностного представления и представления с помощью функции Грина для шара, предполагаются выполненными, в том числе и после замены всех параметрических функций на их модули. Введем следующие обозначения:

$\overline{D}$ — замыкание области D;

$d(P)$ — расстояние от точки P до границы Γ;

Γ_ε — ε-окрестность границы Γ, т. е. $\Gamma_\varepsilon = \{P \in \overline{D} : d(P) < \varepsilon\}$;

$S(P)$ — максимальная из сфер (точнее, из гиперсфер) с центром в точке P, целиком лежащих в $\overline{D}$, $S(P) = \{Q \in \overline{D} : |Q - P| = d(P)\}$.

Известно, что решение задачи (1) удовлетворяет интегральному соотношению [3]

$$u(r) = \int_D k(r, r'; c)u(r')dr' + h(r), \text{ или } u = K_c u + h. \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00334) и программы “Ведущие научные школы” (грант № 587.2008.1).

Алгоритмы метода Монте-Карло для решения (2) основаны на представлении

$$u = (I - K_c)^{-1}h = h + R_c h,\ R_c = \sum_{i=1}^{\infty} K_c^i, \tag{3}$$

которое имеет смысл, когда для спектрального радиуса оператора K_c верно неравенство $\rho(K_c) < 1$, т. е. при $c < c^*$. При c, близком к c^*, ряд сходится очень медленно и расходится, если $c \geq c^*$. Таким образом, первая задача заключается в ускорении сходимости степенного ряда (3) при $c < c^*$. Вторая задача состоит в построении $(I - K_c)^{-1}$ при $c > c^*$, когда ряд (3) расходится.

2. Схема аналитического продолжения резольвенты путем сдвига спектрального параметра c на c_0

Стандартным подходом к аналитическому продолжению резольвенты является построение специальной замены спектрального параметра c, являющейся комфорным отображением односвязной области параметров на область сходимости ряда (3) [6]. Сдвиг параметра c на c_0 приводит к методу простых итераций резольвенты R_c. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + (c - c_0))u_0 = -g, & u_0|_\Gamma = \varphi, \\ (\Delta + (c - c_0))u_i = -c_0 u_{i-1} - g, & u_i|_\Gamma = \varphi, \quad i \geq 1. \end{array} \right. \tag{4}$$

Перепишем (4) в виде

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Delta + (c - c_0))(u_1 - u_0) = -c_0 u_0, & u_1 - u_0|_\Gamma = 0, \\ (\Delta + (c - c_0))(u_i - u_{i-1}) = -c_0(u_{i-1} - u_{i-2}), & \\ u_i - u_{i-1}|_\Gamma = 0, & i \geq 2. \end{array} \right. \tag{5}$$

Заметим, что разность $u_i - u_{i-1}$ удовлетворяет следующему метаэллиптическому уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + (c - c_0))^{i+1}(u_i - u_{i-1}) = (-1)^{i+1} c_0^i g, \\ (\Delta + (c - c_0))^{i}(u_i - u_{i-1})|_\Gamma = (-1)^{i} c_0^i \varphi, \\ (\Delta + (c - c_0))^{k}(u_i - u_{i-1})|_\Gamma = 0, \quad k = 0, \ldots, i-1. \end{array} \right. \tag{6}$$

Из вида задачи (4) следует, что предельная функция для рекуррентной последовательности решений u_i удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1). При условии $||c_0(\Delta + (c - c_0))^{-1}|| < 1$, используя равенство $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i - u_{i-1}$, нетрудно показать ограниченность нормы предельной функции (например, в пространстве L_∞). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $||c_0(\Delta + (c - c_0))^{-1}|| < 1$, *то* $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i - u_{i-1} \to u$ *при* $n \to \infty$.

3. Алгоритмы “блуждания по сферам”

Рассматриваемые далее оценки метода Монте-Карло для решения уравнения (1) связаны с так называемым процессом “блуждания по сферам” в области D. В процессе “блуждания по сферам” очередная точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_k)$; процесс обрывается, если точка попадает в Γ_ε. Рассмотрим метагармоническое уравнение вида

$$\begin{cases} (\Delta + c)^{i+1} v = -\widetilde{g}, \\ (\Delta + c)^k v|_\Gamma = \varphi_k, \quad k = 0, \ldots, i. \end{cases} \tag{7}$$

Справедливо следующее утверждение [4].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия, сформулированные выше, и $c < c^*$, тогда параметрическая производная i-й степени от решения задачи (1) с функциональными параметрами*

$$\varphi = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^k (c - c_1)^{i-k}}{i!} \varphi_k, \quad g = \frac{(-1)^i}{i!} \widetilde{g} \tag{8}$$

является решением задачи (7) (производные вычисляются в точке c_1).

При этом параметрическая производная $u^{(i)}$ с функциональными параметрами $g_1 = -g\frac{c_0^{i+1}}{i!}$, $\varphi_1 = \varphi\frac{c_0^{i+1}}{i!}$ удовлетворяет уравнению (6). Поскольку разность функций $u_i - u_{i-1}$ является решением метагармонического уравнения (6), на основании следующей теоремы [5] очевидным образом строится смещенная оценка η_k "блуждания по сферам" для аналитического продолжения резольвенты.

Теорема 2. *Если $c < c^*$ и первые пространственные производные функций $\{u^{(i)}\}$, $i = 1, \ldots, n+1$, равномерно ограничены в $\bar{D}$, то*

$$|u(r) - \mathsf{E}\eta_n| \le C_n \varepsilon, \quad r \in D, \quad \varepsilon > 0,$$

где

$$\eta_n = \sum_{p=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{N} \left\{ \left[\prod_{j=0}^{i-1} D_j(c) \right] \tfrac{c_0^{i+1}}{i!} g(\nu_i, \omega_i) D_i(c) \tfrac{d_i^2 \sin(\sqrt{c}(d_i - \nu_i))}{6(d_i - \nu_i)} \right\}^{(p)} + \right.$$
$$\left. + \left\{ \left[\prod_{j=0}^{N-1} D_j(c) \right] \tfrac{c_0^{i+1}}{i!} \varphi(r_N) \right\}^{(p)} \right], \quad D_j(c) = \tfrac{\sqrt{c} d_j}{\sin(\sqrt{c} d_j)}. \tag{9}$$

Случайная величина ν_i, распределенная в интервале $(0, d_i)$ с плотностью $6x(1 - x/d_i)d_i^{-2}$, и единичный изотропный вектор ω_i моделируются при помощи известных формул [3].

4. Связь аналитического продолжения с вероятностным представлением

Известно, что если функция u является решением задачи (1), то при выполнении сформулированных выше условий для нее справедливо следующее вероятностное представление [1]:

$$u(r) = \mathsf{E} \left[\int_0^\tau e^{s(t;c)} g(\xi_t) dt + e^{s(\tau;c)} \varphi(\xi_\tau) \right], \quad s(t;c) = \int_0^t c(\xi_{t'}) dt', \tag{10}$$

где ξ_t — начинающийся в точке r соответствующий оператору Лапласа диффузионный процесс; τ — момент первого выхода процесса из области D. Справедливо следующее утверждение [4].

Лемма 2. *Пусть выполнены условия, сформулированные выше, и $c < c^*$. Тогда*

$$\frac{\partial^i u}{\partial c^i} = u^{(i)} = \mathsf{E}\left[\int\limits_0^\tau t^i e^{ct} g(\xi_t)dt + \sum_{l=0}^{i} C_i^l \tau^{i-l} e^{c\tau} \frac{\partial^l}{\partial c^l}\varphi(\xi_\tau, c)\right]. \tag{11}$$

Таким образом, из (6) и (11) получаем вероятностное представление для функции u_n:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i - u_{i-1} = \mathsf{E}\tilde{\eta}_n = \mathsf{E}\left[\int\limits_0^\tau \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{c_0^i}{i!}t^i\right) e^{(c-c_0)t} g(\xi_t)dt + \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{c_0^i}{i!}\tau^i\right) e^{(c-c_0)\tau}\varphi(\xi_\tau)\right]. \tag{12}$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим в п. 2, можно построить продолжение вероятностного представления резольвенты

$$u = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\tilde{\eta}_n = \sum_{i=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[\int\limits_0^\tau \frac{c_0^i}{i!} t^i e^{(c-c_0)t} g(\xi_t)dt + \frac{c_0^i}{i!} t^i e^{(c-c_0)t}\varphi(\xi_\tau)\right].$$

Лемма 3. *Если $||c_0(\Delta + (c - c_0))^{-1}|| < 1$, то $\mathsf{E}\tilde{\eta}_n \to u$ при $n \to \infty$, где u — решение задачи* (1).

5. Результаты расчетов

Задача Дирихле решалась в кубе $0 \le x, y, z \le 1$ для уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta u + cu = 0, \\ &u|_\Gamma = \cos\left(x\sqrt{c/3}\right)\cos\left(y\sqrt{c/3}\right)\cos\left(z\sqrt{c/3}\right). \end{aligned}$$

Точное решение имеет вид $u(x, y, z; c) = \cos\left(x\sqrt{c/3}\right)\cos\left(y\sqrt{c/3}\right)\cos\left(z\sqrt{c/3}\right)$. В первом случае решение оценивалось с помощью стандартной оценки “блуждания по сферам”

$$\eta_\varepsilon = u(r_N, c)\prod_{j=0}^{N-1}\frac{\sqrt{c}d_j}{\sin(\sqrt{c}d_j)},$$

в точке r с координатами $x = y = z = 0,9$ для разных значений c. Известно, что для единичного куба $c^* = 3\pi^2 \approx 29.609$. Результаты расчетов приведены в табл. 1. Во втором случае решение оценивалось на основе вероятностного представления (12). Для этого с использованием метода Эйлера с постоянным шагом по времени $\triangle t$ статистически моделировались приближения r_i к траектории случайного процесса ξ_t в моменты времени $i\triangle t$. Решение находилось с помощью оценок

$$\zeta_1 = e^{cT}\varphi(r_N), \quad \zeta_2 = \left[\sum_{i=0}^{M}\frac{c_0^i T^i}{i!}\right] e^{(c-c_0)T}\varphi(r_N).$$

Здесь T — приближенное время выхода процесса r_i на границу куба; r_N — приближенная координата выхода. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

c	$N \cdot 10^{-6}$	ε	$-u(r)$	$-\widetilde{u}(r)$	$\lvert u(r) - \widetilde{u}(r)\rvert \pm \sqrt{\frac{D\eta_\varepsilon}{N}}$
50	16.7	10^{-4}	0.639	280.4	281 ± 5674
50	1	10^{-4}	0.639	131162	131162 ± 131464
35	16.7	10^{-4}	0.993	1.493	0.5 ± 0.260
35	16.7	10^{-2}	0.993	0.337	0.656 ± 0.918
30	9.8	10^{-4}	0.875	0.899	0.023 ± 0.018
20	1	10^{-4}	0.3197	0.3252	0.0055 ± 0.004
15	0.4	10^{-4}	0.078	0.0785	0.0004 ± 0.0003
10	0.24	10^{-4}	0.00038	0.00046	0.00008 ± 0.0002

Т а б л и ц а 2

c_0	c	$N \cdot 10^{-6}$	$\triangle t^* \cdot 10^2$	$-u(r)$	$-\widetilde{u}(r)$	$\lvert u(r) - \widetilde{u}(r)\rvert \pm \sqrt{\frac{D\eta_\varepsilon}{N}}$
—	30	10^2	1	0.875	1.086	0.001 ± 0.179
–	30	10	1	0.875	0.790	0.085 ± 0.227
–	35	1	1	0.993	5.385	4.392 ± 3.452
5	30	1	1	0.875	1.143	0.268 ± 0.185
5	30	10^2	1	0.875	1.086	0.211 ± 0.179
10	35	10^2	10^{-2}	0.993	2.923	1.93 ± 0.516

Если решение оценивалось в помощью оценки ζ_1, то в первой колонке табл. 2 стоит прочерк, для оценки ζ_2 число слагаемых M бралось равным 50. Таким образом построены необходимые оценки метода Монте-Карло для аналитического продолжения резольвенты. Результаты расчетов показывают, что статистические алгоритмы, построенные путем сдвига спектрального параметра, эффективны в достаточно малой области изменения параметра.

Список литературы

[1] Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.

[2] Елепов Б.С., Михайлов Г.А. О решении задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + cu = -g$ моделированием "блужданий по сферам" // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. № 3. С. 647–654.

[3] Михайлов Г.А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск: Наука, 2003.

[4] Михайлов Г.А., Лукинов В.Л. Вероятностное представление и методы Монте-Карло для решения уравнений со степенями эллиптических операторов // Докл. РАН. 2003. Т. 390, № 6. С. 1–3.

[5] Михайлов Г.А., Лукинов В.Л. Методы Монте-Карло для решения первой краевой задачи для полигармонического уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 3. С. 495–508.

[6] Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах. М.: Наука, 1989. [Engl. Transl.: Springer-Verlag, 1991].

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.