

Об отсутствии влияния тангенциальной составляющей силы  
Лоренца на осесимметричное напряженное состояние  
токонесущей конической оболочки

Р. Ш. Индиаминов

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений*

*им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

e-mail: r\_indiaminov@mail.ru

A two-dimensional variant of connected nonlinear equations of electrodynamics of the current-carrying conic shells is presented for the case of nonstationary loads. A procedure for solving the axisymmetric problems of magnetoelasticity of flexible current-carrying conic shells under nonstationary action of mechanical and electromagnetic forces is described. A stress-strained state of a flexible current-carrying ring conic shells is studied as an example. The influence of tangential components of the Lorentz force on the stressed state and electromagnetic effects of the current-carrying conic shells as well as on the components of the magnetic and mechanical voltage is investigated.

## Введение

Большинство известных работ по деформированию упругих проводящих тел выполнены для линеаризованной системы уравнений. Однако решение ряда прикладных задач, к которым нужно отнести задачи определения напряженного состояния гибких токонесущих оболочек, требует более полного изучения механических процессов (включая волновые поля, сопровождающие магнитоупругое взаимодействие) на основе нелинейной модели магнитоупругости.

Из классической физики известно, что эффекты связанности динамических и механических перемещений электропроводных тел с электромагнитным полем обусловлены пондеромоторными силами Лоренца. Последние зависят от скорости движения элементов проводящей сплошной среды и внешнего магнитного поля, а для токонесущих элементов — от величины и ориентации тока проводимости относительно внешнего магнитного поля.

Заметим, что в отсутствие внешнего электромагнитного поля внутреннее электромагнитное поле также отсутствует и пондеромоторные силы исчезают. Поэтому строгая постановка краевой задачи магнитоупругости не сводится к внутренним граничным задачам для выбранного объема электропроводного тела. Второе важное обстоятельство, которое необходимо учитывать при постановке и решении конкретных задач магнитоупругости, состоит в том, что значительные эффекты пондеромоторного взаимодействия имеют место для высокочастотных колебаний при больших значениях амплитуд перемещений, импульсных магнитных полей и токонесущих элементов. Именно

для этих условий в первую очередь необходимо развитие математических основ магнитоупругости и прикладных методов решения отдельных классов задач. Среди этих классов задач прежде всего отметим задачи для тонкостенных токонесущих пластин и оболочек, помещенных в сильное внешнее магнитное поле, а также задачи о нелинейных магнитоупругих колебаниях тонкостенных элементов в магнитном поле. Раскрытие эффектов связанности полей для задач указанного класса позволяет уточнить динамические расчеты тонкостенных элементов, которые подвергаются действию сильных магнитных полей.

При изучении вопросов нелинейной магнитоупругости значительный интерес представляет определение напряженно-деформированного состояния токонесущих пластин и оболочек, подвергающихся воздействию переменных электромагнитных полей. Эти задачи возникают в современной технике, где такие конструкции используются в качестве ограждающих или несущих элементов для экранирования внешних полей сильномагнитного оборудования. Этот интерес обусловлен также необходимостью решения задач электромагнитной совместимости при разработках современных измерительных систем, устройств вычислительной техники, при измерениях слабых импульсных полей, на фоне больших полей, при разработке вопросов защиты обслуживающего персонала от электромагнитного воздействия и др.

Основополагающие соотношения магнитоупругости твердых деформируемых сред включают уравнения механики и уравнения электродинамики. Связанность полей в однородных изотропных телах обусловлена тензором натяжений Максвелла и силой Лоренца. Количественные оценки этих сил зависят от характера деформирования среды и распределения внешнего электромагнитного поля. Воздействие электромагнитного поля на проводящее тело вызывает возникновение в теле электромагнитного поля, а следовательно, и вихревых токов. Взаимодействие токов с магнитным полем приводит к появлению объемных электромагнитных (пондеромоторных) сил и источников джоулева тепла. Электромагнитные силы и тепловые источники вызывают волны напряжений и деформаций и изменяют термодинамическое состояние тела, а значит, изменяют электромагнитное поле в нем. Таким образом, механические, электромагнитные и температурные поля оказываются взаимосвязанными и должны определяться из совместного решения уравнений термомеханики и уравнений Максвелла.

Задачи взаимодействия конструктивных элементов типа оболочек и пластин с электромагнитным полем возникают в различных областях современной техники. В последнее время выполнено много работ в области магнитоупругости тонких проводящих пластин и оболочек, находящихся в магнитном поле. Среди этих работ видное место занимают работы армянской школы механиков, выполненные в линеаризованной постановке для ферромагнитных материалов. На основе решений, полученных методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, формулируются гипотезы магнитоупругости тонких тел, позволяющие свести трехмерные уравнения к двумерным. Эти гипотезы связаны с характером изменения электромагнитного поля упругих смещений по толщине оболочки и базируются на классической гипотезе недеформируемых нормалей, а также на предположении о том, что касательные составляющие вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая напряженности магнитного поля остаются постоянными по толщине оболочки. Таким образом, исследования нестационарных задач по деформированию гибких токонесущих пластин и оболочек в магнитном поле на основе нелинейной системы уравнений магнитоупругости представляют собой актуальную научную проблему.

## 1. Получение разрешающей системы уравнений в нормальной форме Коши

Рассматриваем гибкую токнесущую усеченную коническую оболочку с постоянной толщиной  $h$ , находящуюся во внешнем магнитном поле. Считаем, что на оболочку воздействуют нестационарные электромагнитные и механические силы и пренебрегаем влиянием процессов поляризации и намагничивания.

При построении двумерной теории тонких оболочек в геометрически нелинейной постановке воспользуемся уравнениями и соотношениями теории гибких оболочек в квадратичном приближении [1] с привлечением классической модели недеформируемых нормалей и гипотез электродинамики [2–4]:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1(\alpha, \beta, t), & E_2 &= E_2(\alpha, \beta, t), & E_3 &= \frac{\partial u_2}{\partial t} B_1 - \frac{\partial u_1}{\partial t} B_2, \\ J_1 &= J_1(\alpha, \beta, t), & J_2 &= J_2(\alpha, \beta, t), & J_3 &= 0, & H_1 &= \frac{1}{2}(H_1^+ + H_1^-) + \frac{\gamma}{h}(H_1^+ - H_1^-), \\ H_2 &= \frac{1}{2}(H_2^+ + H_2^-) + \frac{\gamma}{h}(H_2^+ - H_2^-), & H_3 &= H_3(\alpha, \beta, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u_i$  — компоненты пространственного вектора перемещений;  $B_i$  — компоненты индукции магнитного поля;  $H_i^\pm$  — известные компоненты вектора напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки;  $E_i$  — компоненты вектора напряженности электрического поля;  $J_i$  — компоненты вектора плотности электрического тока;  $\alpha, \beta, \gamma$  — смешанная ортогональная криволинейная система координат.

Для рассматриваемого случая квадратичной нелинейности деформации и углы поворота величины малые, но вторые существенно превосходят первые. Учет малости удлинений и пренебрежение сдвигами по сравнению с углами поворотов позволяет не делать различия между размерами объемного элемента до и после деформации. Вышесказанное позволяет принять, что

$$\frac{S_i^*}{S_i} \simeq 1 \quad \text{и} \quad \frac{V^*}{V} \simeq 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь  $S_i$  — элементарные площадки с нормальными  $\mathbf{n}_i$  до деформации;  $S_i^*$  — те же площадки после деформации;  $V^*$  и  $V$  — объемы элементарного элемента до и после деформации.

Такой подход позволяет учитывать нелинейность в соотношениях для деформаций, кривизн и кручения. Метрика оболочки остается практически недеформированной, так как радиусы кривизн и параметры Ламе соответствуют недеформированному состоянию оболочки. Другими словами, можно не делать различия между деформированной и неподвижной оболочками при переходе от эйлеровых координат к лагранжевым в уравнениях магнитоупругости [3].

В дальнейшем будем использовать смешанную ортогональную криволинейную систему координат  $\alpha = s$ ,  $\beta = \theta$ ,  $\gamma = \zeta$ , где  $s$  — длина меридиана;  $\theta$  — центральный угол в параллельном круге оболочки;  $\zeta$  — координатная линия по нормали и поверхности оболочки.

Исходя из того, что многие элементы конструкций находятся при эксплуатации в условиях осесимметричного нагружения, рассмотрим геометрически нелинейную кра-

евую задачу магнитоупругости в одномерной постановке по пространственной координате  $s$ . В этом случае вследствие симметрии имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad B_\theta = 0, \quad \rho f_\theta = 0, \quad v = 0, \quad P_\theta = 0, \quad E_S = 0.$$

Остальные величины являются только функциями  $s$  и  $t$ . Линии  $s = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$  — это линии главных кривизн. Если в качестве независимой переменной принять длину образующей конуса  $s$  (система  $s, \theta, \zeta$ ), то величины, характеризующие геометрию оболочки, выразятся следующим образом:

$$A = 1, \quad B = r, \quad \frac{1}{R_S} = 0, \quad \frac{1}{R_\theta} = \frac{\sin \varphi}{r}, \quad r = s \cos \varphi, \quad (1.2)$$

где  $\varphi$  — угол, образованный нормалью к срединной поверхности и осью вращения;  $r = r(s)$  — радиус параллельного круга;  $A$  и  $B$  — коэффициенты Ламе;  $R_S$  и  $R_\theta$  — радиусы главных кривизн.

Первое уравнение Кодацци—Гаусса записывается следующим образом:

$$\frac{dr}{ds} = \cos \varphi.$$

Применяя принцип виртуальных перемещений и проводя осреднение по толщине оболочки, уравнения и соотношения токонесущей конической оболочки в осесимметричной постановке, находящейся в магнитном поле, отнесенные к недеформированной поверхности в ортогональной криволинейной системе координат согласно [3], запишем:

— уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(rN_S) - \cos \varphi N_\theta + r(P_S + \rho \widehat{f}_S) &= r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial s}(rQ_S) - \sin \varphi N_\theta + r(P_\zeta + \rho \widehat{f}_\zeta) &= r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial S}(rM_S) - \cos \varphi M_\theta - rQ_S - r(N_S - \frac{\sin \varphi}{r} M_\theta)\theta_S &= r \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

— уравнения электродинамики

$$\frac{\partial B_\zeta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s}(rE_\theta), \quad (1.4)$$

$$\sigma \mu \left( E_\theta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ + B_S^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta \right) = -\frac{\partial B_\zeta}{\partial s} + \frac{B_S^+ - B_S^-}{h};$$

— выражения деформаций через перемещения

$$\varepsilon_S = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \theta_S^2, \quad \chi_S = \frac{\partial \theta_S}{\partial s}, \quad \chi_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} \theta_S, \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w, \quad \text{где} \quad \theta_S = -\frac{\partial w}{\partial s};$$

— соотношения упругости

$$N_S = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_S + \nu \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_S), \quad (1.6)$$

$$M_S = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_S + \nu\chi_\theta), \quad M_\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(\chi_\theta + \nu\chi_S).$$

В соотношениях (1.3)–(1.6)  $N_S$ ,  $N_\theta$  — меридиональное и окружное усилия;  $M_S$ ,  $M_\theta$  — изгибающие моменты;  $Q_S$  — перерезывающее усилие;  $\varepsilon_S$ ,  $\varepsilon_\theta$  — относительные деформации удлинений координатной поверхности;  $\chi_S$ ,  $\chi_\theta$  — изгибные деформации, характеризующие изменение кривизны координатной поверхности оболочки при деформации;  $u$ ,  $w$  — меридиональное и нормальное перемещения;  $\theta_S$  — угол поворота нормали;  $E_\theta$  — окружная составляющая напряжения электрического поля;  $B_\zeta$  — нормальная составляющая магнитной индукции;  $B_S^\pm$  — известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки;  $P_S = P_S(s, t)$ ;  $P_\zeta = P_\zeta(s, t)$  — компоненты механической нагрузки;  $\mu$  — магнитная проницаемость;  $\sigma$  — электрическая проводимость;  $\varphi$  — угол между нормалью к координатной поверхности и осью вращения;  $h = \text{const}$  — толщина оболочки;  $E$  — модуль Юнга материала оболочки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\rho\hat{f}_S = \rho\hat{f}_S(s, t)$ ,  $\rho\hat{f}_\zeta = \rho\hat{f}_\zeta(s, t)$  — проекции объемной силы Лоренца, которые в данном случае имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \rho\hat{f}_S &= hJ_{\theta_{\text{ст}}}B_\zeta + \sigma h \left[ E_\theta B_\zeta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta^2 \right], \\ \rho\hat{f}_\zeta &= 0.5hJ_{\theta_{\text{ст}}}(B_S^+ + B_S^-) + \sigma h \left[ -0.5E_\theta(B_S^+ + B_S^-) - 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ + B_S^-)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ - B_S^-)^2 + 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial \theta_S}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) \right]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Системы уравнений (1.3)–(1.7) при условии, что известно распределение напряженности магнитного поля на поверхностях оболочки, составляют полную замкнутую систему нелинейных дифференциальных уравнений магнитоупругости токонесущей конической оболочки.

При получении системы уравнений принято, что действие электромагнитного поля и стороннего тока на поле деформаций происходит посредством сил Лоренца. При рассмотрении составляющих силы Лоренца (1.7) учитывают скорость деформирования оболочки, внешнее магнитное поле, величину и напряженность тока проводимости относительно внешнего магнитного поля. Учет нелинейности в уравнениях движения вызывает нелинейность и в пондеромоторной силе.

Замкнутая система уравнений магнитоупругости токонесущей конической оболочки получена в лагранжевых переменных, отнесенных к недеформированной срединной поверхности оболочки в ортогональной криволинейной системе координат.

Отметим, что при получении системы связанных нелинейных уравнений магнитоупругости конической оболочки использовались гипотеза Кирхгофа–Лява и адекватные ей электромагнитные гипотезы, а также принцип виртуальных перемещений.

Решение этой системы, исходя из специфики задачи, необходимо искать совместно с уравнениями электродинамики для вакуума, т.е. решать внешнюю задачу. Эта проблема в нелинейной постановке в настоящее время практически неразрешима. Для конкретных случаев допускаются различные упрощения. Например, имея информацию о характере распределения и изменениях во времени магнитного поля на поверхностях оболочки, можно ограничиться рассмотрением только внутренней задачи. Однако и в этом случае остается проблема построения приближенных уравнений магнитоупругости и выражений для внутренних сил.

При получении разрешающей системы уравнений выберем в качестве основных разрешающих функций  $u, w, \theta_S, N_S, Q_S, M_S, B_\zeta, E_\theta$ . Выбор именно этих функций позволит в дальнейшем осуществлять различные комбинации закрепления оболочек [6]. После соответствующих преобразований разрешающая система уравнений запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial m} &= \frac{1 - \nu^2}{\rho E h} N_S - \frac{\nu \cos \varphi}{\rho r} u - \frac{\nu \sin \varphi}{\rho r} w - \frac{1}{2\rho} \theta_S^2, \\
\frac{\partial w}{\partial m} &= -\frac{\theta_S}{\rho}, \\
\frac{\partial \theta_S}{\partial m} &= \frac{12(1 - \nu^2)}{\rho E h^3} M_S - \frac{\nu \cos \varphi}{\rho r} \theta_S, \\
\frac{\partial N_S}{\partial m} &= \frac{\cos \varphi}{\rho r} \left[ (\nu - 1) N_S + E h \left( \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) \right] - \frac{P_S}{\rho} + \frac{h}{\rho} J_{\theta_{\text{ст}}} B_\zeta - \frac{\sigma h}{\rho} \times \\
&\quad \times \left[ E_\theta B_\zeta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta^2 \right] + h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial Q_S}{\partial m} &= -\frac{\cos \varphi}{\rho r} Q_S + \frac{\nu \sin \varphi}{\rho r} N_S + \frac{E h \sin \varphi}{\rho r} \left( \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w \right) - \frac{P_\zeta}{\rho} - 0.5 \frac{h}{\rho} J_{\theta_{\text{ст}}} (B_S^+ + B_S^-) - \\
&\quad - \frac{\sigma h}{\rho} \left[ -0.5 E_\theta (B_S^+ + B_S^-) - 0.25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ + B_S^-)^2 - \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ - B_S^-)^2 + \right. \\
&\quad \left. + 0.5 \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) + \frac{h}{12} \frac{\partial \theta_S}{\partial t} B_\zeta (B_S^+ + B_S^-) \right] + h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial M_S}{\partial m} &= \frac{\cos \varphi}{\rho r} \left[ (\nu - 1) M_S + \frac{E h^3 \cos \varphi}{12 r} \theta_S \right] + \frac{\theta_S}{\rho} + \frac{N_S \theta_S}{\rho} - \\
&\quad - \frac{\sin \varphi}{\rho r} \left( \nu M_S + \frac{E h^3 \cos \varphi}{12 r} \theta_S \right) \theta_S + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial B_\zeta}{\partial m} &= -\frac{\sigma \mu}{\rho} \left[ E_\theta + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_S^+ + B_S^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_\zeta \right] + \frac{B_S^+ - B_S^-}{\rho h}, \\
\frac{\partial E_\theta}{\partial m} &= -\frac{\partial B_\zeta}{\rho \partial t} - \frac{\cos \varphi}{\rho r} E_\theta.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь  $m = |\rho|s$ , где  $|\rho|$  — безразмерная плотность материала оболочки. Введение новой переменной  $m$  связано с получением устойчивого процесса счета. В случае размерной плотности  $m = \rho r$  — так называемая массовая координата [7].

Для определения произволов, содержащихся в общем решении системы уравнений (1.8), должны быть заданы граничные условия на контурах, ограничивающих оболочку: на каждом контуре оболочки — четыре граничные условия. Краевые условия для функций, характеризующих механическую часть задачи, задаются и в обычной теории оболочек. В качестве граничных условий для электромагнитной группы уравнений могут задаваться электрические поля или комбинация магнитных и электрических полей.

В результате получаем нелинейную краевую задачу, решение которой позволяет определить напряженное состояние токнесущей конической оболочки, находящейся под воздействием нестационарных механических и электромагнитных сил в геометрически нелинейной постановке.

Решение краевых задач магнитоупругости связано с существенными вычислительными трудностями. Это объясняется тем, что полученная разрешающая система уравнений (1.8) — связанная нелинейная система дифференциальных уравнений смешанного типа восьмого порядка с переменными коэффициентами. Предлагаемый подход к численному решению краевой задачи основывается на последовательном применении схемы Ньюмарка и методов линеаризации и дискретной ортогонализации.

При решении задач токонесущих оболочек необходимо учитывать ограничения, накладываемые на величину плотности тока и внешнего магнитного поля, действующих на оболочку. Эти ограничения связаны с джоулевым теплом и значением критической силы.

Для описания процесса теплообмена между поверхностью тела и средой используется закон Ньютона—Рихмана [8]. Согласно этому закону количество тепла, отдаваемое единицей поверхности тела в единицу времени, пропорционально разности температур поверхности тела  $T_T$  и окружающей среды  $T_c$  ( $T_T > T_c$ ):

$$Q = \alpha_T(T_T - T_c), \quad (1.9)$$

где  $\alpha_T$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи. Он зависит от большого числа факторов. Однако во многих случаях коэффициент теплоотдачи можно считать неизменным, поэтому будем в дальнейшем при решении задач принимать величину  $\alpha_T$  постоянной.

Предполагая, что  $T_c = 0$ , а температура в оболочке, обусловленная выделением в ней джоулева тепла при протекании тока, не превосходит  $T = 200$  °С, согласно [2] определяем максимальное значение плотности тока по формуле

$$J_0 = \left[ \frac{T\sigma\alpha_T}{h} \right]^{1/2}, \quad (1.10)$$

где  $\sigma$  — электрическая проводимость;  $h$  — толщина оболочки.

Для удовлетворения критерия Куранта независимую переменную интегрирования необходимо умножить на безразмерный множитель, численно равный плотности материала оболочки. Это позволяет получить устойчивый процесс счета при относительно большом шаге по времени. С другой стороны, для эффективного использования предложенной теории необходимо выполнение условия

$$\tau/(h^2\sigma\mu) > 1, \quad (1.11)$$

которое фактически означает хорошее “прошивание” оболочки магнитным полем за время его действия. Здесь  $\tau$  — характерное время действия магнитного поля.

Если имеет место противоположная ситуация, то следует исключить из рассмотрения уравнения электродинамики и принять  $B_c = 0$ . В этом случае ненулевыми членами электромагнитного происхождения будут поверхностные магнитные силы  $\mathbf{n}_i$ , направленные по нормали к поверхности.

В оболочке под действием электромагнитного поля вдоль и поперек силовых линий появляются соответствующие растягивающие и сжимающие усилия, которые определяются электродинамическим тензором Максвелла.

Компоненты тензора Максвелла при пренебрежении электрическим смещением имеют следующий вид [2]:

$$T_{ij} = H_i B_j - \frac{1}{2} H_k B_k \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \quad (1.12)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Проекции тензора в криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta, \zeta$  для одномерной задачи конической оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{2\mu}(B_S^2 - B_\zeta^2), \\ T_{22} &= \frac{1}{2\mu r}(B_S^2 + B_\zeta^2), \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $B_S = \frac{1}{2}(B_S^+ + B_\zeta^-) + \frac{\zeta}{h}(B_S^+ - B_\zeta^-)$ .

При определении внутренних напряжений пользуемся следующими выражениями [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{N_S}{h} + \zeta \frac{12M_S}{h^3}, \\ \sigma_{22} &= \frac{\nu N_S}{h} + \frac{E}{s}(u + wtg\varphi) + \zeta \left( \frac{12\nu M_S}{h^3} + \frac{E}{s}\theta_S \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

## 2. Разделение переменных по времени

Для перехода к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений используем конечно-разностную аппроксимацию по временной переменной. Для этого к производным по времени применим устойчивую конечноразностную схему Ньюмарка [9]:

$$\ddot{u}^{t+\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\beta(\Delta t)^2} - \frac{1}{\beta} \left[ \frac{\dot{u}^t}{\Delta t} + \ddot{u}^t(0.5 - \beta) \right], \quad (2.1)$$

$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + 0.5\Delta t(\ddot{u}^t + \ddot{u}^{t+\Delta t}), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

где  $\beta$  — параметр схемы;  $\Delta t$  — приращение по времени.

На основании численных расчетов модельных задач установлено, что метод устойчив для  $\beta = 0.25$ . Приращение по времени выбираем согласно критерию Куранта [10]. С учетом схемы (2.1) систему уравнений (1.8) на соответствующем временном слое в векторной форме можно представить следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dm} = f(m, \mathbf{N}), \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{N} = u, w, \theta_S, N_S, Q_S, M_S, B_\zeta, E_\theta$ ;  $\mathbf{f}$  — восьмимерный вектор.

Граничные условия в общем случае имеют вид

$$D_1\mathbf{N} |_{m=m_0} = \mathbf{d}_1, \quad D_2\mathbf{N} |_{m=m_1} = \mathbf{d}_2, \quad (2.3)$$

где  $D_1, D_2$  — заданные прямоугольные матрицы соответственно порядков  $k \times 8$  и  $(8 - k) \times 8$  ( $k < 8$ );  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$  — заданные векторы;  $k$  — количество левых граничных условий.



### 3. Линеаризация разрешающей системы

При решении нелинейных краевых задач теории пластин и оболочек эффективным оказывается применение таких итерационных процессов, на каждом шаге которых решается линейная краевая задача. К указанным методам решения нелинейных краевых задач относится метод линеаризации, основанный на построении итерационного процесса, на каждом шаге которого решается линейная краевая задача для следующего приближения, использующая информацию предыдущего [1, 11, 12].

В соответствии с методом квазилинеаризации [10] строим итерационную схему:

$$\frac{d\mathbf{N}^{k+1}}{dm} = \mathbf{f}(m, \mathbf{N}^{(k)}) + \Gamma(\mathbf{N}^{(k)})(\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}), \quad (3.1)$$

$$D_1\mathbf{N}^{k+1}(m_0) = \mathbf{d}_1, \quad D_2\mathbf{N}^{k+1}(m_1) = \mathbf{d}_2 \quad (\mathbf{N}^0; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Здесь  $\Gamma(\mathbf{N}^{(k)})$  — матрица якоби-системы.

Таким образом, исходная краевая задача для нелинейной системы дифференциальных уравнений сводится к последовательности линейных краевых задач. Линейная краевая задача  $k$ -го приближения решается методом дискретной ортогонализации [1]. Полученная числовая информация на каждом шаге по времени используется на последующем временном шаге и для получения решения следующего,  $(k+1)$ -го, приближения. Это приводит к необходимости хранения в памяти ЭВМ больших массивов значений функций  $N_i^{(k)}$ . Поэтому в программе применяется линейное интерполирование по дискретным значениям функций  $N_i^{(k)}$  [1, 3, 6]. В развернутом виде после применения итерационной схемы (3.1) разрешающая система краевой задачи (2.2) и (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du^{(k+1)}}{dm} &= \frac{1-\nu^2}{\rho Eh} N_S^{(k+1)} - \frac{\nu \cos \varphi}{\rho r} u^{(k+1)} - \frac{\nu \sin \varphi}{\rho r} w^{(k+1)} + \frac{1}{2\rho} (\theta_S^{(k)})^2 - \theta_S^{(k+1)} \theta_S^{(k)}, \\ \frac{dw^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{\theta_S^{(k+1)}}{\rho}, \\ \frac{d\theta_S^{(k+1)}}{dm} &= \frac{12(1-\nu^2)}{\rho Eh^3} M_S^{(k+1)} - \frac{\nu \cos \varphi}{\rho r} \theta_S^{(k+1)}, \\ \frac{dN_S^{(k+1)}}{dm} &= \frac{\cos \varphi}{\rho r} \left[ (\nu-1) N_S^{(k+1)} + Eh \left( \frac{\cos \varphi}{r} u^{(k+1)} + \frac{\sin \varphi}{r} w^{(k+1)} \right) \right] - \frac{P_S^{(k+1)}}{\rho} + \\ &+ \frac{h}{\rho} J_{\theta_{\text{CT}}} B_{\zeta}^{(k+1)} - \frac{\sigma h}{\rho} \left[ \left( -E_{\theta}^{(k)} B_{\zeta}^{(k)} + E_{\theta}^{(k+1)} B_{\zeta}^{(k)} + E_{\theta}^{(k)} B_{\zeta}^{(k+1)} \right) + \right. \\ &+ 0.5 \left\{ -(\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k)} + (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_{\zeta}^{(k)} + (\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_{\zeta}^{(k+1)} \right\} \cdot (B_S^+ + B_S^-) - \\ &- \left. \left\{ -(B_{\zeta}^{(k)})^2 (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} + (B_{\zeta}^{(k)})^2 (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} + 2B_{\zeta}^{(k+1)} B_{\zeta}^{(k)} (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} \right\} \right] + h(\ddot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}, \\ \frac{dQ_S^{(k+1)}}{dm} &= -\frac{\cos \varphi}{\rho r} Q_S^{(k+1)} + \frac{\nu \sin \varphi}{\rho r} N_S^{(k+1)} + \frac{Eh \sin \varphi}{\rho r} \left( \frac{\cos \varphi}{r} u^{(k+1)} + \frac{\sin \varphi}{r} w^{(k+1)} \right) - \\ &- \frac{P_{\zeta}^{k+1}}{\rho} - 0.5 \frac{h}{\rho} J_{\theta_{\text{CT}}} (B_S^+ + B_S^-) - \frac{\sigma h}{\rho} \left[ -0.5 E_{\theta}^{(k+1)} (B_S^+ + B_S^-) - \right. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& -0.25(\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}(B_S^+ + B_S^-)^2 - \frac{1}{12}(\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}(B_S^+ - B_S^-)^2 + \\
& + 0.5 \left\{ -(\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k+1)} \right\} \times (B_S^+ + B_S^-) + \\
& + \frac{h}{12} \left\{ -(\dot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{\theta}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k+1)} \right\} (B_S^+ + B_S^-) + h(\ddot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}, \\
& \frac{dM_S^{(k+1)}}{dm} = \frac{\cos \varphi}{\rho r} \left[ (\nu - 1) M_S^{(k+1)} + \frac{E h^3 \cos \varphi}{12 r} \theta_S^{(k+1)} \right] + \frac{\theta_S^{(k+1)}}{\rho} + \\
& + \frac{1}{\rho} \left( -N_S^{(k)} \theta_S^{(k)} + N_S^{(k+1)} \theta_S^{(k)} + N_S^{(k)} \theta_S^{(k+1)} \right) - \\
& - \frac{\nu \sin \varphi}{\rho r} \left( -M_S^{(k)} \theta_S^{(k)} + M_S^{(k+1)} \theta_S^{(k)} + M_S^{(k)} \theta_S^{(k+1)} \right) - \frac{E h^3 \sin \varphi \cos \varphi}{12 \rho r^2} \left[ -(\theta_S^{(k)})^2 + 2\theta_S^{(k+1)} \theta_S^{(k)} \right], \\
& \frac{dB_\zeta^{(k+1)}}{dm} = -\frac{\sigma \mu}{\rho} \left[ E_\theta^{(k+1)} + 0.5(\dot{w}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)}(B_S^+ + B_S^-) - \right. \\
& \left. - \left\{ -(\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} B_\zeta^{(k)} + (\dot{u}^{(t+\Delta t)})^{(k)} B_\zeta^{(k+1)} \right\} \right] + \frac{(B_S^+ - B_S^-)}{\rho h}, \\
& \frac{dE_\theta^{(k+1)}}{dm} = -\frac{1}{\rho} (\dot{B}_\zeta^{(t+\Delta t)})^{(k+1)} - \frac{\cos \varphi}{\rho r} E_\theta^{(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

#### 4. Числовой пример

Для иллюстрации предложенной методики, а также для исследования учета влияния пондеромоторной силы Лоренца  $\rho \widehat{f}_S$  на напряженно-деформированное состояние и электромагнитные эффекты оболочки рассмотрим краевую задачу о напряженном состоянии геометрически нелинейной токнесущей конической оболочки постоянной толщины в одномерной постановке по пространственной координате  $s$ .

Считаем, что оболочка из алюминия находится под воздействием внешнего магнитного поля  $\mathbf{V} = \{B_{S_0}, 0, 0\}$  и механической силы  $\mathbf{P} = \{0, 0, P_\zeta\}$ , а также стороннего электрического тока  $\mathbf{J}_{\text{ст}} = \{0, J_{\text{ст}}, 0\}$ . В этом случае на оболочку действует комбинированное нагружение, состоящее из пондеромоторной силы Лоренца

$$\rho \widehat{f} = \sigma(\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{V})) \times \mathbf{V} - \mathbf{J}_{\text{ст}} \times \mathbf{V}$$

и механической силы (рис. 1). Здесь  $\mathbf{J}_{\text{ст}}$  — сторонний электрический ток. Такая форма представления пондеромоторной силы позволит в дальнейшем дифференцированно оценивать влияние этой силы на деформацию оболочки в зависимости от стороннего тока и внешнего магнитного поля.

Если в качестве независимой переменной принять длину образующей конуса  $s$  ( $s_0 \leq s \leq s_N$ ), то величины, характеризующие геометрию оболочки, выразятся формулами

$$r = s \cos \varphi, \quad \sin \varphi = \sin \varphi_0, \quad \cos \varphi = \cos \varphi_0.$$

Для ограничивающих контуров усеченного конуса имеем

$$s_0 = \frac{r_0}{\cos \varphi_0}, \quad s_N = s_0 + \frac{d}{\sin \varphi_0}.$$

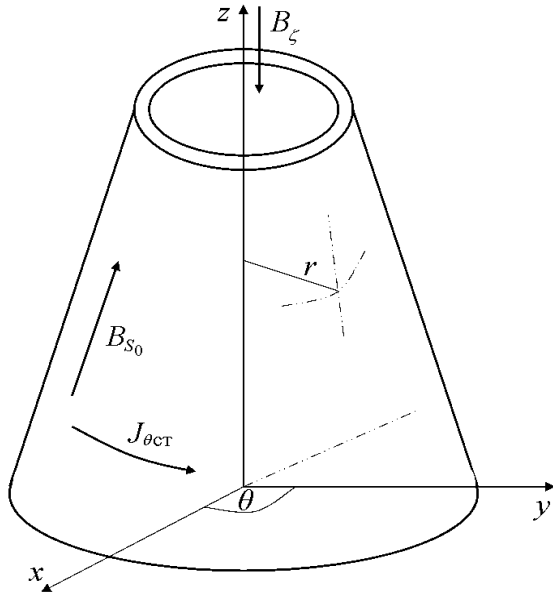


Рис. 1.

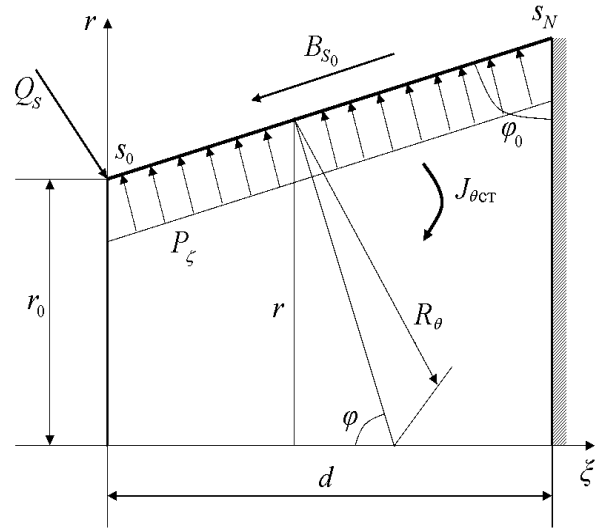


Рис. 2.

Параметры оболочки и материала принимаем следующие (рис. 2):  $r = s \cos \varphi$  м,  $s_0 = 0.5196$  м,  $s_N = 0.9196$  м,  $d = 0.3$  м,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ,  $E = 7.1 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\nu = 0.34$ ,  $\omega = 314.16$  с<sup>-1</sup>,  $\rho = 2670$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma = 3.63 \cdot 10^7$  (Ом · м)<sup>-1</sup>,  $\mu = 1.256 \cdot 10^{-6}$  ГН/м,  $J_{\theta \text{ст}} = -5 \cdot 10^5 \sin \omega t$  А/м<sup>2</sup>,  $h = 5 \cdot 10^{-4}$  м,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 10^{-2}$  с,  $P_\zeta = 0.5$  Н/м<sup>2</sup>,  $B_{S_0}^+ = B_{S_0}^- = 0.5$  Тл.

Характерное время действия сил  $0 \leq t \leq 10^{-2}$  с. Шаг интегрирования  $\Delta t = 10^{-3}$  с.

Граничные условия выбираем в виде

$$N_S = 0, \quad Q_S = 10, \quad M_S = 0, \quad E_\theta = -0.5 \dot{w}^{t+\Delta t} (B_S^+ + B_S^-) + \dot{u}^{t+\Delta t} B_\zeta \quad \text{при } s = s_0,$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_S = 0, \quad E_\theta = 0 \quad \text{при } s = s_N. \quad (4.1)$$

Начальные условия

$$\mathbf{N}(s, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{u}(s, t) \Big|_{t=0} = \dot{w}(s, t) \Big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\theta}_S(s, t) \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.2)$$

При использовании схемы Ньюмарка (2.1) на первом временном шаге, помимо первых производных по времени при  $t = 0$ , необходимо знать вторые производные по времени. Считаем, что тело в начальный момент времени находится в абсолютном покое, принимаем, что в этот момент вторые производные по  $t$  также равны нулю. На последующих шагах по времени эти производные уже известны и берутся из решения, полученного на предыдущем шаге.

Краевая задача (3.3), (4.1) с начальными условиями (4.2) решается в дальнейшем методом дискретной ортогонализации. На первом шаге по времени за начальное приближение выбирается решение линейной задачи, на последующих шагах по времени выбирается решение нелинейной задачи на предыдущем шаге. Такой выбор начального приближения позволяет уменьшить число итераций при получении решения.

Как отмечалось выше, цель настоящей работы — исследование учета влияния компоненты силы Лоренца  $\rho \hat{f}_S$  на напряженно-деформированное состояние и электромагнитные эффекты усеченной конической токнесущей оболочки, находящейся во внешнем

Таблица значений  $\widehat{\rho f_S}$ 

$s, \text{ м}$	$t \cdot 10^{-3}, \text{ с}$				
	2	4	6	8	10
0.5196	0.34863	$0.16443 \cdot 10^1$	$0.25308 \cdot 10^1$	$0.16630 \cdot 10^1$	$0.18128 \cdot 10^{-1}$
0.5596	$-0.12288 \cdot 10^2$	$-0.29682 \cdot 10^2$	$-0.18983 \cdot 10^2$	$-0.12661 \cdot 10^2$	-0.37044
0.5996	$-0.50275 \cdot 10^1$	$-0.85301 \cdot 10^1$	$-0.83685 \cdot 10^1$	$-0.10632 \cdot 10^2$	$0.28269 \cdot 10^{-1}$
0.6396	-0.56956	0.69647	$0.44858 \cdot 10^1$	$0.24323 \cdot 10^1$	$-0.24319 \cdot 10^1$
0.6796	$-0.52032 \cdot 10^1$	$-0.20406 \cdot 10^2$	$-0.15404 \cdot 10^2$	$-0.13922 \cdot 10^2$	$0.10593 \cdot 10^1$
0.7196	$0.17532 \cdot 10^1$	$0.17438 \cdot 10^2$	$0.19651 \cdot 10^2$	$0.24787 \cdot 10^2$	-0.69126
0.7596	$-0.62300 \cdot 10^1$	$-0.20982 \cdot 10^2$	$-0.14466 \cdot 10^2$	$-0.93698 \cdot 10^1$	$0.11709 \cdot 10^1$
0.7996	$0.19198 \cdot 10^1$	$0.47961 \cdot 10^1$	$0.18482 \cdot 10^1$	-0.69862	0.44586
0.8396	$0.11754 \cdot 10^1$	$-0.15233 \cdot 10^2$	$0.16750 \cdot 10^2$	$0.18859 \cdot 10^2$	$-0.35591 \cdot 10^1$
0.8796	$-0.76994 \cdot 10^1$	$-0.22636 \cdot 10^2$	$-0.34589 \cdot 10^1$	$0.66609 \cdot 10^1$	$0.15317 \cdot 10^2$
0.9196	$0.25537 \cdot 10^1$	$0.98693 \cdot 10^1$	$0.14554 \cdot 10^2$	$0.10^2 16 \cdot 10^2$	$-0.33358 \cdot 10^{-4}$

магнитном поле. Поэтому в дальнейшем рассматриваются два варианта решения поставленной краевой задачи (геометрические и физические параметры оболочки одни и те же при одинаковых граничных условиях):

- 1-й вариант:  $\widehat{\rho f_S} \equiv 0$ ;
- 2-й вариант:  $\widehat{\rho f_S} \neq 0$ .

Для оценки величины тангенциальной составляющей пондеромоторной силы Лоренца  $\widehat{\rho f_S}$  в таблице приведены ее значения. Как указывалось выше, значения этой силы вычисляются в каждой точке интегрирования на каждом шаге по времени. При рассмотрении вышеприведенных вариантов, естественно, в первую очередь нужно было описать влияние составляющей силы Лоренца  $\widehat{\rho f_S}$  на электромагнитные компоненты оболочки. Однако при решении поставленной задачи обнаружилось, что это влияние незначительно. Для примера на рис. 3 приведено распределение нормального напряжения Максвелла  $T_{11}$  на внешней поверхности оболочки по ее длине в конечный момент времени для обоих вариантов (кривые 1 и 2 соответствуют 1-му и 2-му вариантам).

Как видно из графиков, различие между значениями  $T_{11}$  двух вариантов наблюдается только в единственной точке  $s = 0.9196 \text{ м}$  и составляет 23%. При определении значений магнитной индукции, электрического и магнитного напряжений конической оболочки результаты совпадают для обоих вариантов (максимальное различие составляет

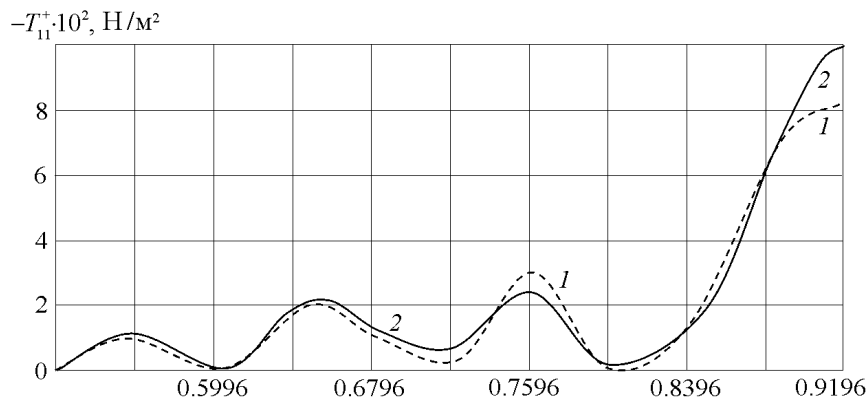


Рис. 3.

в среднем 3%). Что касается механических компонент напряженно-деформированного состояния оболочки, таких как прогиб, усилия, момент и напряжения, то, согласно полученным результатам, различия не обнаружены.

В заключение отметим, что учет тангенциальной составляющей пондеромоторной силы Лоренца  $\rho \hat{f}_S$  не влияет на напряженное состояние и электромагнитные эффекты усеченной конической оболочки в приведенной постановке. Необходимо также отметить, что максимальная величина, характеризующая нелинейность данной задачи, —  $w/h = 0.6$ . Естественно, что при более глубокой нелинейности для ответа на вопрос о влиянии составляющей  $\rho \hat{f}_S$  на напряженное состояние оболочки необходимо проводить дополнительные исследования.

## Список литературы

- [1] ГРИГОРЕНКО Я.М., МУКОЕД А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. Киев: Вища школа, 1983. 286 с.
- [2] АМБАРЦУМЯН С.А., БАГДАСАРЯН Г.Е., БЕЛУБЕКЯН М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
- [3] МОЛЬЧЕНКО Л.В. Магнитоупругость нелинейных токнесущих оболочек и газодинамика струйных течений. Киев: Вища школа, 1989. 113 с.
- [4] ДРЕСВЯННИКОВ В.И. К теории тонких электропроводящих оболочек, деформирующихся в импульсном магнитном поле индуктора // Прикл. проблемы прочности и пластичности. 1983. Вып. 23. С. 66–74.
- [5] МОЛЬЧЕНКО Л.В., ИНДИАМИНОВ Р.Ш. Учет влияния комбинированного нагружения на напряженное состояние конической оболочки, находящейся в магнитном поле // Докл. Академии наук Республики Узбекистан. 1993. № 6. С. 21–22.
- [6] ИНДИАМИНОВ Р.Ш. Анализ электромагнитных эффектов и напряженно-деформированного состояния токнесущей конической оболочки при комбинированном нагружении // Вестн. СамГУ, Самарканд. 2000. № 1. С. 24–28.
- [7] САМАРСКИЙ А.А., ПОПОВ Ю.В. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 350 с.
- [8] ИСАЧЕНКО В.П., ОСИПОВА В.А., СУКОМЕЛ А.С. Теплопередача. М.; Л.: Энергия, 1965. 423 с.
- [9] NEWMARK N.M. A method of computation for structural dynamics // J. End. Mech. Div. Proc. ASCE. 1959. Vol. 85, N 7. P. 67–97.
- [10] САМАРСКИЙ А.А., ГУЛИН А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 232 с.
- [11] БЕЛЛМАН Р., КАЛАБА Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 184 с.
- [12] МОЛЬЧЕНКО Л.В. Нелинейное деформирование оболочек вращения произвольного меридиана в нестационарном магнитном поле // Прикл. механика. 1996. Вып. 3. С. 24–28.

*Поступила в редакцию 20 марта 2006 г.,  
в переработанном виде — 10 сентября 2008 г.*