Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода слабой сжимаемости*

В. В. Червов
Учреждение Российской академии наук
Институт нефтегазовой геологии и геофизики
им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: elixirexpo@yandex.ru

Представлены результаты трехмерного моделирования конвекции в мантии Земли. Численная модель основана на применении неявного метода слабой сжимаемости.

Ключевые слова: тепловая конвекция в мантии Земли, метод искусственной сжимаемости, численное моделирование.

Введение

В настоящей работе продолжено тестирование задачи конвекции, предложенной в [1]. В работах [2 – 6] с использованием переменных "вектор завихренности — векторный потенциал метода дробных шагов и последовательности сеток" продемонстрировано хорошее согласие с результатами [1]. В [7] численное решение модельной задачи трехмерной теплогравитационной конвекции осуществлялось с использованием неявного метода расщепления по физическим процессам. Достаточно хорошо известным при решении задач гидродинамики несжимаемых жидкостей является метод слабой сжимаемости [8 – 11]. В настоящей работе с применением метода слабой сжимаемости получены результаты, не уступающие по точности результатам работ [1 – 7].

1. Математическая постановка задачи

Для описания течений в верхней мантии Земли привлекается хорошо известная математическая модель, включающая в себя обезразмеренные уравнения [12]:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \mathrm{Ra}\cdot T\cdot e_i, \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \nabla^2 T. \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (интеграционные проекты № 116 и № 44) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-05-00276-а).

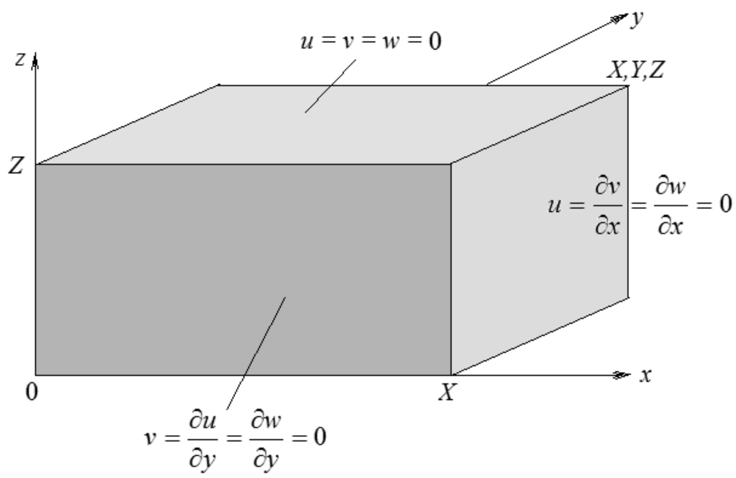

Рис. 1. Граничные условия для вектора скорости в параллелепипеде: на вертикальных гранях — условия проскальзывания; на горизонтальных плоскостях — условия прилипания

Здесь p — давление, T — температура, t — время, $\mathrm{Ra} = \dfrac{\alpha\rho g_z d^3 \Delta T}{\eta_0 \chi}$ — число Рэлея, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — вектор скорости, $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$, g_z — ускорение силы тяжести, d — вертикальный размер конвектирующей области, $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$, χ — коэффициент температуропроводности, α — коэффициент теплового расширения, ρ, η — характерные плотность и динамическая вязкость.

Размерные значения (в системе СИ), которые были использованы в [1] и в настоящей работе, принимались следующими: $d = 2.7 \cdot 10^6$ м, $\Delta T = 3700$ °C, $\chi = 10^{-6}$ м^2/с, $\alpha = 10^{-5}$ °C, $\rho = 3300$ кг/м^3, $g_z = 10$ м/с^2.

Простейшей областью интегрирования является параллелепипед $[0 : X], [0 : Y][0 : Z]$. Для вектора скорости на боковых гранях задаются условия проскальзывания, а на нижней и верхней гранях — условия прилипания (рис. 1):

— на поверхностях $x = 0;\ x = X\ (0 \le y \le Y, 0 \le z \le 1)$: $u = \partial v/\partial x = \partial w/\partial x = 0$;

— на поверхностях $y = 0;\ y = Y\ (0 \le x \le X, 0 \le z \le 1)$: $\partial u/\partial y = v = \partial w/\partial y = 0$;

— на поверхностях $z = 0;\ z = 1\ (0 \le x \le X, 0 \le y \le Y)$: $u = v = w = 0$.

Для температуры, как и в [1], на боковых гранях ставятся условия теплоизоляции (адиабатическая стенка), т. е. первые производные по нормали на вертикальных стенках равны нулю. На верхней и нижней гранях ставятся условия Дирихле: нулевая температура на верхней и некоторая фиксированная температура (в безразмерных уравнениях равная единице) на нижней:

— на поверхностях $x = 0;\ x = X\ (0 \le y \le Y, 0 \le z \le 1) : \partial T/\partial x = 0$;

— на поверхностях $y = 0;\ y = Y\ (0 \le x \le X, 0 \le z \le 1) : \partial T/\partial y = 0$;

— на поверхности $z = 0\ (0 \le x \le X, 0 \le y \le Y) : T = 1$;

— на поверхности $z = 1\ (0 \le x \le X, 0 \le y \le Y) : T = 0$.

Система уравнений (1)–(3) устроена так [13], что в начальный момент времени $t = t_0$ задаются начальные условия лишь для температуры. В качестве начального распределения температуры, как и в [1], выбиралось следующее:

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z) = (1 - z) + 0.2(\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y))\sin(\pi z).$$

2. Численная модель трехмерных течений в естественных переменных, основанная на методе слабой сжимаемости

Как уже отмечалось выше, хорошо известным подходом к решению задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости является метод искусственной сжимаемости. Для построения численной модели в случае естественных переменных применялся метод установления с использованием неявной схемы искусственной сжимаемости [8–11, 14] и метода дробных шагов [14]:

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + c^2 \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n+1}) = 0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial \tau}\right)^{n+1} + \left(\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_k}\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^{n+1} + \mathrm{Ra}\cdot T^n \cdot e_i, \tag{5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla\left(\mathbf{v}^{n+1}\cdot T\right) = \nabla^2 T. \tag{6}$$

Параметр τ является общим итерационным параметром для уравнений (4) и (5); c^2 и τ играют роль релаксационных параметров. Параметры c и τ выбирались из условия устойчивости, предложенного в [15]: $\tau < \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)/c$.

Для задачи тестирования с переменной вязкостью результаты получены при $c^2 = 219$.

Численная реализация (4)–(6) включает в себя следующие этапы.

1. В исследуемой области задается начальное распределение температуры, удовлетворяющее граничным условиям. Компоненты скорости полагаются нулевыми.

2. Из векторного уравнения (5) находится поле скорости $\mathbf{v}^{n+1}$; при этом p^{n+1} определяется из (4) и подставляется в (5).

3. После вычисления всех компонент скорости следует расчет давления из (4):

$$p^{n+1} = p^n - \tau c^2(L_1 u^{n+1} + L_2 v^{n+1} + L_3 w^{n+1}). \tag{7}$$

4. Путем решения (6) вычисляется поле температуры.

Процесс повторяется до некоторого значения

$$t_N = N\cdot\Delta t.$$

Для реализации (5) использовалась схема стабилизирующей поправки. Для вектора скорости, на примере x-компоненты u, схема выглядит так:

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = L_{11}u^{n+1/3} + L_{22}u^n + L_{33}u^n + L_{21}v^n + L_{31}w^n - L_1 p^n, \tag{8}$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} = L_{22}(u^{n+2/3} - u^n), \tag{9}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} = L_{33}(u^{n+1} - u^n). \tag{10}$$

В (7)–(10) использованы стандартные аппроксимации [16]:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial y}; \quad L_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \quad L_{11} = 2\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{22} = 2\frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial}{\partial y}; \quad L_{33} = 2\frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial}{\partial z};$$

$$L_{21} = \frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{31} = \frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial}{\partial x}.$$

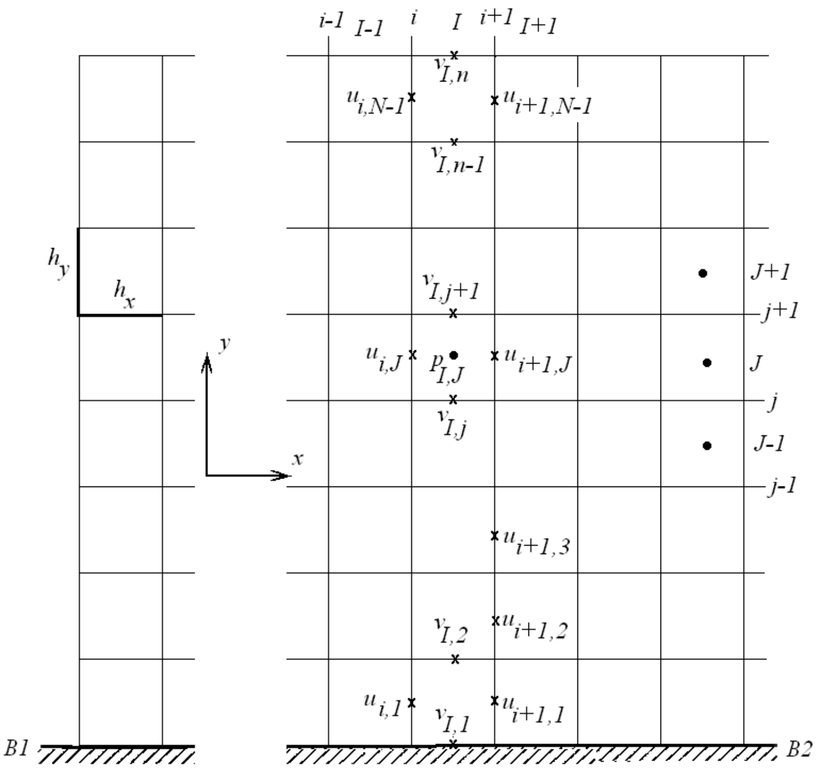

Рис. 2. Двумерная разнесенная сетка

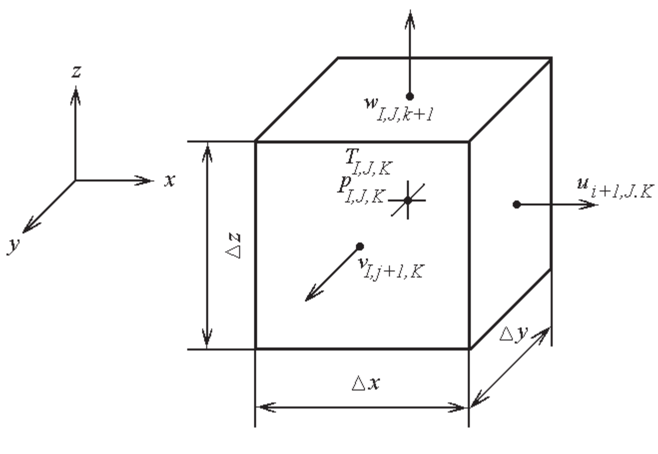

Рис. 3. Сеточный шаблон: в центре ячейки, кроме давления и температуры, вычисляется и вязкость $\eta_{I,J,K}$

Для v и w конечно-разностное представление аналогично (8)–(10).

В задаче использовались как разнесенная, так и неразнесенная сетки. На разнесенной сетке давление, вязкость и температура определялись в центре элементарного объема, компоненты вектора скорости — в центрах плоскостей ячеек: u — в центре плоскости $y0z$, v — в центре плоскости $x0z$, w — в центре плоскости $x0y$. На рис. 2 для простоты и наглядности изображена двумерная разнесенная сетка, сеточный трехмерный шаблон представлен на рис. 3.

3. Результаты расчетов

Тестирование численной модели осуществлялось решением модельной задачи [1]. Решение для переменной вязкости отыскивалось в единичном кубе ($X = Y = Z = 1$).

При этом задавались следующие параметры: масштабный множитель при вязкости $\eta_0 = 1.20165 \cdot 10^{24}$; $\eta(T) = \exp[\theta/(\mathrm{T} + \Theta) - \theta/(0.5 + \Theta)]$; $\theta = 225/\ln(r) - 0.25\ln(r)$; $\Theta = 15/\ln(r) - 0.5$; $r = \eta\,|_{T=0}\,/\eta\,|_{T=1} = 20$; $\mathrm{Ra} = 20\,000$.

Для решения задачи вводилась равномерная в каждом направлении сетка. Вычислялись следующие параметры:

(i) среднеквадратичная скорость:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{XYZ}\iiint\limits_A (u^2 + v^2 + w^2)dxdydz},$$

где A — объем параллелепипеда со сторонами X, Y и Z;

(ii) число Нуссельта (Nu) по формуле [17]:

$$\mathrm{Nu} = -(XY)^{-1}\iint\limits_{S_{top}} \frac{\partial T}{\partial z}dxdy,$$

где S_{top} — верхняя поверхность параллелепипеда;

(iii) значение вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя;

(iv) средняя температура:

$$T_m = \iint\limits_{S_{top}} Tdxdy,$$

вычисляемая на горизонтальных сечениях области $S_{z=0.75}$ и $S_{z=0.50}$, на глубинах $z = 0.75$ и $z = 0.50$;

(v) значения z_1 — отклонения свободной поверхности Земли от геоида в угловых точках верхней поверхности куба.

Интегралы вычислялись с применением квадратурной формулы трапеций.

Результаты расчетов автора (Che) сопоставлены с данными У. Кристенсена (Chr) как наиболее полными из имеющихся в статье [1] и представлены в табл. 1 и 2. Согласие достаточно хорошее. Изложенный выше алгоритм был с успехом применен к решению модельной задачи о протекании мантийной жидкости [7].

Т а б л и ц а 1. Переменная вязкость. Разнесенная сетка. Естественные переменные. Искусственная сжимаемость

№ п/п	Параметр	Сетка $32 \times 32 \times 64$		Err, %
		Chr	Che	
1	Nu	3.03927	2.99409	1.51
2	v_{rms}	35.132	35.159	0.08
3	$w(0,0,1/2)$	165.91	165.967	0.04
4	$w(0,Y,1/2)$	−26.72	−26.977	0.95
5	$w(X,Y,1/2)$	−58.23	−58.755	0.89
6	$T(0,0,1/2)$	0.90529	0.9052	0.01
7	$T(0,Y,1/2)$	0.49565	0.4955	0.02
8	$T(X,Y,1/2)$	0.23925	0.2388	0.20
9	$T_m(3/4)$	0.56593	0.5654	0.09
10	$T_m(1/2)$	0.58158	0.5890	1.26
11	$z_1(0,0,1/2)$	10869.0	10389.0	4.62
12	$z_1(0,Y,1/2)$	−4145.00	−4271.0	2.95
13	$z_1(X,Y,1/2)$	−12811.0	−12761.6	0.39

Т а б л и ц а 2. Переменная вязкость. Неразнесенная сетка. Естественные переменные. Искусственная сжимаемость

№ п/п	Параметр	Сетка $32 \times 32 \times 64$		Err, %
		Chr	Che	
1	Nu	3.03927	3.04469	0.18
2	v_{rms}	35.132	35.0888	0.12
3	$w(0,0,1/2)$	165.91	165.170	0.44
4	$w(0,Y,1/2)$	−26.72	−26.601	0.45
5	$w(X,Y,1/2)$	−58.23	−58.523	0.50
6	$T(0,0,1/2)$	0.90529	0.9062	0.11
7	$T(0,Y,1/2)$	0.49565	0.4996	0.80
8	$T(X,Y,1/2)$	0.23925	0.2409	0.70
9	$T_m(3/4)$	0.56593	0.5649	0.17
10	$T_m(1/2)$	0.58158	0.5831	0.26
11	z_1(0,0,1/2)	10869.0	11070.8	1.82
12	z_1(0,Y,1/2)	−4145.00	−4230.92	2.03
13	z_1(X,Y,1/2)	−12811.0	−13035.0	1.72

Относительная ошибка вычислялась по формуле:

$$\mathrm{Err} = \left| \frac{\mathrm{Che} - \mathrm{Chr}}{\mathrm{Chr}} \right| \cdot 100\,\%.$$

Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена трехмерная численная модель конвекции в мантии Земли, основанная на методе слабой сжимаемости. Продемонстрирована ее достаточно высокая эффективность.

Автор выражает благодарность профессору, д-ру физ.-мат. наук Геннадию Георгиевичу Черных за помощь при постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Busse F.H., Christensen U., Clever R. et al. 3D Convection at infinite Prandtl number in cartesian geometry — a benchmark comparison // Geophiys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1993. Vol. 75. P. 39–59.

[2] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 114–125.

[3] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 85–92.

[4] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 2. С. 248–254.

[5] Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle // Russ. J. Numer. Anal. Modell. 2005. Vol. 20, N. 5. P. 483–500.

[6] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли // Физика Земли. 2005. № 5. С. 48–64.

[7] Червов В.В. Моделирование трехмерной конвекции в мантии Земли с применением неявного метода расщепления по физическим процессам // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 4. С. 73–86.

[8] Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы прикладной и вычислительной математики. Новосибирск,1966. С. 186–192.

[9] Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.

[10] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: М.: Мир,1991. Т. 1, 2.

[11] Черный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н. и др. Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. 202 с.

[12] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г. Глубинная геодинамика. Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1994.

[13] Федорюк М.В. Характеристики течений несжимаемой жидкости в гравитационном поле / Матем. сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12). С. 483–499.

[14] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.

[15] Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1990.

[16] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

[17] Blankenbach B., Busse F. et al. A benchmark comparison for mantle convection codes // Geophys J. 1989. Int. 98. P. 23–38.

Поступила в редакцию 19 ноября 2008 г.,
в переработанном виде — 24 декабря 2008 г.