О начальных данных для численного моделирования уединенной волны*

Б. Е. Протопопов
Учреждение Российской академии наук
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева, Новосибирск, Россия
e-mail: boris@hydro.nsc.ru

Посредством вычислительного эксперимента выяснено, каковы должны быть заданные начальные условия, чтобы с высокой точностью численно смоделировать уединенную волну на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что скорость волны и параметр растяжения волнового профиля лучше определять с использованием известных точных соотношений. Предложена модификация формул для вычисления коэффициентов разложения волнового профиля по базисным функциям, еще более повышающая точность численного моделирования уединенной волны.

Ключевые слова: уединенная волна, численное моделирование.

Введение

Уединенная волна на поверхности идеальной несжимаемой жидкости обладает целым рядом замечательных свойств [1], что делает ее привлекательным объектом для численного моделирования. В частности, ее нередко используют в качестве набегающей волны при изучении гидродинамических нагрузок на различные тела и препятствия. При этом может потребоваться высокая точность численного моделирования уединенной волны. Эта точность зависит не только от применяемого численного метода, но и от способа генерации волны, т. е. от того, что и как задается в качестве начальных данных. Выбор начальных условий неоднозначен потому, что в рамках модели потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости или в рамках системы уравнений Эйлера не существует точного явного выражения уединенной волны (т. е. явных формул для задания профиля волны, поля скорости и т. д.). Существуют лишь различные приближения, полученные в предположении малости того или иного параметра уединенной волны. Использование любого из приближений в качестве начальных данных при численном моделировании уединенной волны приводит к тому, что получающаяся волна не вполне стационарна (ее амплитуда, скорость и форма, вообще говоря, меняются со временем) и не вполне уединенна (за волной образуется дисперсионный “хвост”).

Данная работа посвящена выяснению (посредством вычислительного эксперимента) вопроса: что и как лучше задавать в начальный момент времени, чтобы получающаяся

*Работа выполнена в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 2.12, а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-08-00145-а) и программы “Ведущие научные школы РФ” (грант № НШ-2260.2008.1).

(численно) уединенная волна была как можно более точной, т. е. чтобы при последующем движении волны отклонение ее амплитуды от своего начального значения и амплитуда образующегося дисперсионного “хвоста” были как можно более слабыми. Из всех параметров уединенной волны именно амплитуда выбрана для контроля стационарности, потому что она может быть легко и с высокой точностью измерена. Постоянство амплитуды дает надежду на постоянство и других параметров, поскольку уединенная волна, как известно, есть волна однопараметричная.

1. Основные формулы

Поскольку речь идет о численном моделировании уединенной волны, то подразумевается наличие соответствующих вычислительных процедур, в частности процедуры, восстанавливающей поле скорости в каждый момент времени по известной границе жидкой области и условию для потенциала скорости на этой границе. Эта же процедура может быть применена и в начальный момент времени, так что в качестве начальных условий достаточно задать профиль уединенной волны и граничное условие для потенциала на свободной поверхности. Твердые границы жидкой области (горизонтальное дно и вертикальные боковые стенки, удаленные от вершины волны), равно как и условия на них (условия непротекания) затруднений не вызывают.

Далее используются всюду только безразмерные переменные, в которых ускорение тяжести и глубина жидкости на бесконечности равны единице.

1.1. Профиль уединенной волны

Профиль уединенной волны обычно представляют в таком виде:

$$\zeta(t,x) = \zeta_0(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \zeta_i f^i(\xi). \tag{1}$$

Здесь t — время, x — горизонтальная координата,

$$\xi(t,x) \equiv b(x - ct) \tag{2}$$

есть “растянутая бегущая” координата, c — скорость волны, b — параметр растяжения, ζ_i — коэффициенты разложения волнового профиля по степеням функции

$$f(\xi) \equiv \operatorname{ch}^{-2} \xi. \tag{3}$$

Представление волнового профиля в виде (1)–(3) является общепринятым и обоснованным — в [2] доказана полнота системы “базисных” функций $\{f^i(\xi)\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(0,\infty)$. Что касается граничного условия для потенциала, то возможны различные варианты его задания. Ниже указаны некоторые из них.

1.2. Условие второго рода для потенциала

В начальный момент времени на свободной поверхности $z = \zeta(0,x)$ (z — вертикальная координата) можно поставить условие второго рода для потенциала скорости $\Phi(t,x,z)$.

Оно получается непосредственно из кинематического условия (нижние буквенные индексы обозначают частное дифференцирование по t, x или z):

$$\zeta_t + \zeta_x \Phi_x - \Phi_z = 0. \tag{4}$$

Действительно,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} = \frac{\Phi_z - \Phi_x \zeta_x}{\sqrt{1+\zeta_x^2}} = \frac{\zeta_t}{\sqrt{1+\zeta_x^2}} = -\frac{c\zeta_x}{\sqrt{1+\zeta_x^2}} = -\frac{bc\zeta_0'}{\sqrt{1+b^2(\zeta_0')^2}}.$$

В этом случае для потенциала скорости получается задача Неймана в чистом виде (на всей границе жидкой области — условия второго рода). Заметим, что во все последующие моменты времени рассчитываются задачи со смешанными условиями (второго рода — на твердых границах и первого — на свободной поверхности). Таким образом, для расчета задачи Неймана в момент $t = 0$ требуются дополнительные вычислительные процедуры (ненужные для последующего счета). Кроме того, сама задача Неймана представляется более сложной для расчета (чем смешанная задача) хотя бы потому, что ее решение существует лишь при выполнении необходимого условия: суммарный поток жидкости через всю границу области должен быть нулевым. Добиться на практике строгого выполнения этого условия бывает нелегко как из-за ошибок округления, так и из-за наличия разных способов вычисления интеграла по границе: из них нужно выбрать именно тот, который согласуется с используемым методом расчета задачи Неймана.

Указанные затруднения в принципе можно преодолеть. Например, в работах [3, 4] использовано именно условие второго рода. Тем не менее в начальный момент времени на свободной поверхности лучше знать значение самого потенциала, а не его нормальной производной.

1.3. Условие первого рода с численным интегрированием

Для получения начального значения потенциала на свободной границе, т. е. функции

$$\varphi(x) \equiv \Phi(0, x, \zeta(0, x)), \tag{5}$$

нужно использовать как кинематическое условие (4), так и динамическое

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\left(\Phi_x^2 + \Phi_z^2\right) + \zeta = 0.$$

Вычисляя производную Φ_x дифференцированием тождества (5), производную Φ_z — из кинематического условия (4) и выражая производные по t через производные по x (волна *бегущая*), можно получить следующее уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(\varphi_x - c\right)^2 = \left(1 + \zeta_x^2\right)\left(\frac{1}{2}c^2 - \zeta\right), \tag{6}$$

откуда

$$\varphi = c\left(x - \int\limits_{x_*}^{x} \sqrt{(1+\zeta_x^2)\left(1 - \frac{2\zeta}{c^2}\right)} d\tilde{x}\right). \tag{7}$$

Здесь x_* — константа интегрирования (произвольная), а знак перед корнем выбран согласно очевидному условию: $\varphi_x \to 0$ при $x \to \pm\infty$, т. е. при $\zeta \to 0$ и $\zeta_x \to 0$.

Интеграл в формуле (7) может быть найден численно (как и производная ζ_x в подынтегральном выражении).

1.4. Условие первого рода с усеченными рядами

Можно также построить приближенное аналитическое решение уравнения (6). Приведем последнее к виду

$$cu - \frac{1}{2}u^2 = \zeta - \frac{1}{2}c^2\zeta_x^2 + \zeta\zeta_x^2, \tag{8}$$

где использовано обозначение

$$u \equiv \varphi_x. \tag{9}$$

Из представления профиля уединенной волны в виде (1) нетрудно получить следующие разложения:

$$\zeta_x^2 = \sum_{i=2}^{2m+1} \lambda_i f^i, \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left[4b^2 j(i-j)\zeta_j\zeta_{i-j} - \lambda_j\right]; \tag{10}$$

$$\zeta\zeta_x^2 = \sum_{i=3}^{3m+1} \mu_i f^i, \quad \mu_i = \sum_{j=1}^{i-1} \zeta_j \lambda_{i-j}. \tag{11}$$

Решение уравнения (8) ищется в виде

$$u = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{l} u_i f^i. \tag{12}$$

Тогда

$$u^2 = \frac{1}{c^2}\sum_{i=2}^{2l} v_i f^i, \quad v_i = \sum_{j=1}^{i-1} u_j u_{i-j}. \tag{13}$$

Подстановка разложений (10)–(13) в уравнение (8) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях функции f (слева и справа) приводят к последовательности формул

$$u_i = \zeta_i + \frac{1}{2c^2}v_i - \frac{1}{2}c^2\lambda_i + \mu_i. \tag{14}$$

Коэффициент v_i стоит в правой части, поскольку может считаться известным. Он зависит от уже вычисленных u_j $(j < i)$, но не зависит от u_i.

Из формул (9), (12) вытекает, что потенциал следует искать в виде

$$\varphi = \frac{1}{bc}\,\mathrm{th}\,\xi \sum_{i=1}^{l} \varphi_i f^{i-1}. \tag{15}$$

Подстановка этого разложения в (9) дает такую последовательность формул:

$$\varphi_l = \frac{1}{2l-1}u_l, \quad \varphi_i = \left(1 + \frac{1}{2i-1}\right)\varphi_{i+1} + \frac{1}{2i-1}u_i \quad (i = l-1, l-2, ..., 1). \tag{16}$$

Что касается количества слагаемых в разложениях (12) и (15), то в расчетах оно выбиралось равным максимальному числу членов в разложениях слагаемых из правой части уравнения (8), т. е.

$$l = 3m + 1. \tag{17}$$

Заметим, что искомая функция u входит в уравнение (8) одновременно в первой и второй степенях, из-за чего это уравнение невозможно выполнить точно — всегда будет невязка вида

$$r = \sum_{i=l+1}^{2l} r_i f^i.$$

Выбор числа l согласно формуле (17) позволяет хотя бы "сдвинуть" невязку на более высокие степени функции f.

Последовательность *явных* формул (10), (11), (13)–(17) дает искомое граничное значение потенциала. В формулах (10), (11), (13) индексы могут выходить за границы отрезка допустимых значений, в этом случае величина с таким "запредельным" номером полагается равной нулю ($\zeta_{m+1} = 0$ и т. п.)

Как показали пробные расчеты, все три предложенных способа постановки граничного условия для потенциала являются "рабочими". Предпочтение отдано второму способу как оптимально сочетающему точность и простоту.

2. Численная апробация известных разложений

Как видно из формул предыдущего раздела, для задания уединенной волны необходимы параметр растяжения b, скорость волны c, коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_m$ разложения волнового профиля, а также число m удерживаемых членов этого разложения. На самом деле достаточно задать всего лишь один параметр ε уединенной волны, а остальные (кроме m) через него выражаются в виде (усеченных) рядов, например:

$$\zeta_i = \sum_{j=i}^{n} \zeta_{ij} \varepsilon^j. \tag{18}$$

Из множества работ, в которых построены разложения вида (18), для численной апробации были выбраны [2, 5] как содержащие разложения высокого порядка (а именно $m = n = 9$ в [5] и $m = n = 17$ в [2]). Работы отличаются не только порядками построенных разложений, но и использованными методами и (в частности) выбором параметра ε уединенной волны: в [5] — это амплитуда, определяемая как

$$\alpha \equiv \max \zeta_0(\xi), \tag{19}$$

в [2] — величина σ, связанная с параметром растяжения следующей зависимостью:

$$\sigma \equiv \sin^2(2b).$$

С использованием разложений из [2, 5] была выполнена серия расчетов. Численный метод подробно описан в [4, 6] и здесь не приводится. Расчеты выполнены на сетке с числом ячеек 200×10 и шагом по времени $\Delta t = 0.01$. В расчетах граничное значение потенциала вычислялось по формуле (7). Генерируемой волне предоставлялась возможность свободного прохождения расстояния от 12.6 до 16.3 единицы (глубин жидкости) в зависимости от амплитуды (точное число N шагов по времени указано в табл. 1), причем эта зависимость оказалась немонотонной по следующей причине. Расчетная область была ограничена слева и справа твердыми вертикальными стенками, расстояние между которыми было неизменным для всех амплитуд. Таким образом, продолжительность свободного (без влияния боковых границ) пробега волны определялась ее скоростью и длиной (формально уединенная волна бесконечно длинная, но можно ввести понятие эффективной длины как отношение массы к амплитуде; определение массы уединенной волны приведено ниже). Поскольку с уменьшением амплитуды скорость волны снижается, а ее длина растет (начиная с какого-то значения α) [1], это и приводит к немонотонной зависимости N от α. Проще говоря, волна малой амплитуды ($\alpha = 0.1$), хотя и медленнее, приближается к боковой стенке, однако начинает ее "чувствовать" несколько раньше из-за того, что существенно длиннее других, более высоких волн.

В процессе движения уединенной волны отслеживалось относительное отклонение $\delta^{(a)}(t)$ ее амплитуды от своего начального значения, а также измерялось отношение $\delta^{(d)}(t)$ амплитуды дисперсионного "хвоста" к начальной амплитуде головной волны, т. е.

$$\delta^{(a)}(t) \equiv \frac{a(t) - a(0)}{a(0)}, \quad \delta^{(d)}(t) \equiv \frac{a^{(d)}(t)}{a(0)}.$$

Здесь текущее значение амплитуды волны $a(t)$ и амплитуда дисперсионного "хвоста" $a^{(d)}(t)$ определяются аналогично (19):

$$a(t) \equiv \max_x \zeta(t,x), \quad a^{(d)}(t) \equiv \max_{x:x>x_0(t)} |\zeta(t,x)|.$$

В последней формуле максимум ищется не на всем интервале изменения x, а только за волной, точнее за $x_0(t)$ — ближайшей к вершине головной волны точкой, в которой $\zeta(t,x) = 0$ (в расчетах волна распространялась справа налево). Начальное значение амплитуды $a(0)$ совпадает с α (формула (19)). В дальнейшем функции $\delta^{(a)}(t)$ и $\delta^{(d)}(t)$ для краткости называются амплитудной невязкой и дисперсионной невязкой соответственно.

В первой строке табл. 1 указаны использованные в расчетах (начальные) значения амплитуды α уединенной волны, во второй — значения числа N шагов по времени. В последующих строках приведены значения норм амплитудной и дисперсионной невязок, получающиеся при использовании разложений из [2, 5]. Нормы вычислялись согласно формулам

$$\| \delta^{(a)}(t) \|_{L^2} \equiv \sqrt{\sum_{k=0}^{N} \left(\delta^{(a)}(t_k)\right)^2}, \quad \| \delta^{(d)}(t) \|_C \equiv \max_k \left|\delta^{(d)}(t_k)\right|,$$

где $t_k = k\Delta t$ ($k = 0, 1, ..., N$) — узловые значения времени.

Из табл. 1 видно, что формулы из [5] во всех рассмотренных случаях дают меньшую (или равную) амплитуду дисперсионного хвоста и в большинстве случаев — меньшее отклонение амплитуды уединенной волны от своего начального значения. Этот результат представляется неожиданным, поскольку формулы из [2] выглядят предпочтительнее,

Т а б л и ц а 1. Результаты расчетов

	α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
	N	1200	1400	1420	1380	1340	1300	1260
[5]	$\| \delta^{(a)} \|_{L^2}$	0.000251	0.000307	0.000636	0.003194	0.022115	0.155249	1.207103
	$\| \delta^{(d)} \|_C$	0.009956	0.006037	0.003358	0.002456	0.001995	0.001699	0.009797
[2]	$\| \delta^{(a)} \|_{L^2}$	0.000252	0.000605	0.000619	0.015194	0.106980	0.404379	0.941209
	$\| \delta^{(d)} \|_C$	0.009956	0.006037	0.003358	0.002456	0.001996	0.003983	0.011162

и не только потому, что более высокого порядка, но и главным образом из-за использования другого параметра разложения, благодаря чему коэффициенты ζ_{ij} меняются существенно более плавно (с ростом каждого из индексов), а последовательности частичных сумм (вида (18)) больше похожи на сходящиеся.

3. Уточнение известных разложений

Далее разложения из [5] берутся за основу и рассматривается, что и как можно в этих формулах изменить, чтобы повысить точность численного моделирования уединенной волны.

3.1. Привлечение точных соотношений

Оказывается, что результаты, представленные в табл. 1, можно заметно улучшить, если использовать следующие *точные* соотношения, связывающие различные параметры уединенной волны.

1. Масса M и потенциальная энергия P уединенной волны, определяемые как

$$M \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta(t,x)dx, \qquad P \equiv \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \zeta^2(t,x)dx,$$

связаны соотношением Старра:

$$\left(c^2-1\right)M = 3P.$$

Доказательство можно найти в [7, 8]. На практике вместо этого соотношения удобнее использовать ему равносильное:

$$\left(c^2-1\right)M_0 = 3P_0, \tag{20}$$

где

$$M_0 \equiv \int\limits_0^{\infty} \zeta_0(\xi)d\xi = \frac{b}{2}M, \quad P_0 \equiv \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \zeta_0^2(\xi)d\xi = \frac{b}{2}P.$$

Соотношение (20) можно применить для нахождения скорости:

$$c^2 = 1 + 3\frac{P_0}{M_0}. \tag{21}$$

Последняя формула хороша тем, что в ее правой части оба интеграла, M_0 и P_0, не зависят от параметра растяжения b и легко вычисляются точно:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{m}\zeta_i I_i, \quad P_0 = \sum_{i=2}^{2m} p_i I_i, \quad p_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\zeta_j\zeta_{i-j}, \quad I_i \equiv \int\limits_0^{\infty} f^i(\xi)d\xi. \tag{22}$$

Для интегралов I_i можно написать общие формулы, однако более удобными представляются рекуррентные соотношения

$$I_1 = 1, \quad I_{i+1} = \frac{2i}{2i+1}I_i. \tag{23}$$

2. Скорость c и параметр растяжения b уединенной волны связаны соотношением Стокса:

$$c^2 = \frac{\operatorname{tg}(2b)}{2b}. \tag{24}$$

Доказательство этого соотношения можно посмотреть, например, в [9]. Формула (24) выводится по сути точно так же, как и дисперсионное соотношение для бесконечно малой синусоидальной волны.

Соотношение Стокса, в котором скорость c теперь известна, можно использовать для нахождения параметра b. Соотношение нелинейно, но легко разрешается итерациями. "Напрашивается" следующий итерационный процесс (здесь верхний индекс в скобочках — номер итерации):

$$b^{(0)} = \frac{1}{2}, \quad b^{(k+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left\{2c^2 b^{(k)}\right\}. \tag{25}$$

Сходимость этого итерационного процесса несложно доказать, опираясь на такие свойства функции arctg, как строгая монотонность и ограниченность.

3.2. Модификация формул для коэффициентов ζ_i

Точность численного моделирования уединенной волны можно еще более повысить путем модификации формул для вычисления коэффициентов ζ_i. Эти модифицированные формулы выглядят следующим образом:

$$\zeta_1 = \alpha - 0.75\alpha^2 + 0.6250\alpha^3 - 1.368170\alpha^4 + 1.86058\alpha^5 -$$

$$-2.57419\alpha^6 + 3.4574\alpha^7 - 4.6857\alpha^8 + 2.4632\alpha^9 + 1.6375\alpha^{10}, \tag{26}$$

$$\zeta_2 = 0.75\alpha^2 - 1.8875\alpha^3 + 3.880335\alpha^4 - 7.45135\alpha^5 +$$

$$+13.28562\alpha^6 - 22.7821\alpha^7 + 37.6701\alpha^8 - 24.0901\alpha^9 - 16.0148\alpha^{10}, \tag{27}$$

$$\zeta_3 = 1.2625\alpha^3 - 4.683036\alpha^4 + 12.76374\alpha^5 - 31.11896\alpha^6 +$$

$$+68.2573\alpha^7 - 139.2777\alpha^8 + 107.3183\alpha^9 + 71.3440\alpha^{10}, \tag{28}$$

$$\zeta_4 = 2.170871\alpha^4 - 11.41984\alpha^5 + 40.10669\alpha^6 -$$

$$-116.9734\alpha^7 + 301.4404\alpha^8 - 283.2248\alpha^9 - 188.2848\alpha^{10}, \tag{29}$$

$$\zeta_5 = 4.24687\alpha^5 - 28.42718\alpha^6 + 120.4900\alpha^7 -$$

$$-411.4160\alpha^8 + 484.4142\alpha^9 + 322.0334\alpha^{10}, \tag{30}$$

$$\zeta_6 = 8.72802\alpha^6 - 71.0571\alpha^7 + 355.0689\alpha^8 - 550.5926\alpha^9 - 366.0281\alpha^{10}, \tag{31}$$

$$\zeta_7 = 18.6079\alpha^7 - 180.2121\alpha^8 + 406.8956\alpha^9 + 270.4999\alpha^{10}, \tag{32}$$

$$\zeta_8 = 41.4121\alpha^8 - 179.0896\alpha^9 - 119.0568\alpha^{10}, \tag{33}$$

$$\zeta_9 = 35.9058\alpha^9 + 23.8698\alpha^{10}. \tag{34}$$

Т а б л и ц а 2. Результаты расчетов

	α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
[5]	$\Vert\, \delta^{(a)} \Vert_{L^2}$	0.000251	0.000307	0.000636	0.003194	0.022115	0.155249	1.207103
	$\Vert\, \delta^{(d)} \Vert_{C}$	0.009956	0.006037	0.003358	0.002456	0.001995	0.001699	0.009797
	$\Vert\, \delta^{(a)} \Vert_{L^2}$	0.000251	0.000305	0.000511	0.001295	0.008084	0.074108	0.800902
		(1.00)	(1.01)	(1.25)	(2.47)	(2.74)	(2.09)	(1.51)
	$\Vert\, \delta^{(d)} \Vert_{C}$	0.009956	0.006037	0.003358	0.002456	0.001996	0.001701	0.006493
	$\Vert\, \delta^{(a)} \Vert_{L^2}$	0.000251	0.000303	0.000424	0.000474	0.005694	0.057352	0.754567
		(1.00)	(1.01)	(1.50)	(6.74)	(3.88)	(2.71)	(1.60)
	$\Vert\, \delta^{(d)} \Vert_{C}$	0.009956	0.006037	0.003358	0.002456	0.001995	0.001698	0.006035

Вышеприведенные формулы отличаются от оригинальных [5] тем, что ослаблены (умножены примерно на 0.4) все коэффициенты при девятых степенях α и добавлены слагаемые десятого порядка. Коэффициенты при десятых степенях пропорциональны коэффициентам (уже ослабленным) при девятых с множителем, примерно равным 2/3. Указанные значения множителей были получены следующим образом. В результате пробных расчетов было обнаружено, что при использовании разложений восьмого порядка амплитуда волны отклоняется в противоположную сторону по сравнению с использованием разложений девятого порядка. Возникла естественная идея линейно скомбинировать разложения восьмого и девятого порядков. А поскольку первые отличаются от вторых только отсутствием слагаемых девятого порядка, то и указанная комбинация отличается от разложений девятого порядка только ослабленными (умноженными на число от 0 до 1) коэффициентами при α^9. Оптимальные значения этого ослабляющего множителя были найдены эмпирически (в результате расчетов) и оказались разными для разных амплитуд. Линейная аппроксимация (по методу наименьших квадратов) этой зависимости множителя от амплитуды и привела к упомянутым значениям коэффициентов.

В табл. 2 представлены результаты расчетов с использованием как точных соотношений, так и модифицированных формул для коэффициентов ζ_i.

Первая двойная строка табл. 2 повторяет соответствующую строку из табл. 1 и приведена здесь для сравнения. Следующая двойная строка — результаты расчетов с использованием разложений [5] для коэффициентов ζ_i и точных соотношений Старра и Стокса (формул (21)–(23), (25)) для параметров b и c. Последняя двойная строка — результаты расчетов с использованием формул (26)–(34) для коэффициентов ζ_i и формул (21)–(23), (25) для параметров b и c. В скобках под значениями нормы амплитудной невязки указано, во сколько раз это число меньше соответствующего числа из первой (двойной) строки.

Можно видеть, что использование точных соотношений для нахождения параметров b и c приводит к заметному уменьшению амплитудной невязки во всем рассмотренном диапазоне амплитуд (кроме самой малой). Применение, наряду с формулами (21)–(23), (25), модифицированных формул (26)–(34) для коэффициентов еще больше повышает точность опять же во всем рассмотренном диапазоне амплитуд. Что касается дисперсионной невязки, то ее удается уменьшить лишь в случае самой большой из рассмотренных амплитуд. По-видимому, основной вклад в эту невязку дает *численная дисперсия*, величина которой определяется размерами шагов расчетной сетки и не зависит от начальных данных.

Заключение

В заключение кратко перечислим основные полученные результаты.

1. Для решения типа уединенной волны указаны три способа постановки граничного условия для потенциала скорости на свободной поверхности. Второй из указанных способов представляется предпочтительным как наиболее простой и точный.

2. Выполнены сравнительные расчеты с использованием разложений высокого порядка из [2, 5]. Обнаружено, что разложения [5] приводят к лучшим характеристикам генерируемой (численно) уединенной волны, чем разложения [2].

3. Показано, что точность численного моделирования уединенной волны может быть существенно повышена, если скорость волны c и параметр растяжения b определять не по разложениям из [5], а с использованием известных точных соотношений, связывающих различные параметры волны. Максимальный эффект — уменьшение амплитудной невязки в 2.74 раза в случае $\alpha = 0.5$.

4. Предложена модификация формул для вычисления коэффициентов ζ_i, еще более повышающая точность численного моделирования уединенной волны. Максимальный эффект — в случае $\alpha = 0.4$ амплитудная невязка уменьшена в 6.74 раза (по сравнению с оригинальными формулами из [5]).

Список литературы

[1] Miles J.W. Solitary waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 1980. Vol. 12. P. 11–43.

[2] Pennell S.A. & Su C.H. A seventeenth-order series expansion for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1984. Vol. 149. P. 431–443.

[3] Протопопов Б.Е. Численный анализ трансформации уединенной волны при отражении от вертикальной преграды // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1990. № 5. С. 115–123.

[4] Protopopov B.E. An efficient numerical method for calculation of strongly nonlinear water waves // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 3. С. 55–71.

[5] Fenton J. A ninth-order solution for the solitary wave // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 53. P. 257–271.

[6] Протопопов Б.Е. Расчет волновых движений жидкости на основе уравнений Эйлера // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12, № 1. С. 82–92.

[7] Starr V.T. Momentum and energy integrals for gravity waves of finite height // J. Mar. Res. 1947. Vol. 6. P. 175–193.

[8] Longuet–Higgins M.S. On the mass, momentum, energy and circulation of a solitary wave // Proc. R. Soc. Lond. A. 1974. Vol. 337. P. 1–13.

[9] Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1947. 928 с.

Поступила в редакцию 30 апреля 2009 г.,
в переработанном виде — 30 июня 2009 г.