

Математическое моделирование магнитосферных явлений и их влияния на атмосферу Земли*

В. В. ДЕНИСЕНКО, Н. В. ЕРКАЕВ

Учреждение Российской академии наук

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail: denisen@icm.krasn.ru, erkaev@icm.krasn.ru

Описаны математические модели процессов генерации электрического поля в магнитосфере Земли. Изучены колебания токового слоя магнитосферного хвоста, возникающие при наличии градиентов компонент магнитного поля. Предложена модель электропроводности атмосферы с замыканием токов через ионосферу.

Ключевые слова: магнитосфера, атмосфера, электрическое поле, математическая модель.

В Институте вычислительного моделирования СО РАН с самого его основания большое внимание уделяется исследованиям в области математического моделирования физических процессов, происходящих в околоземном космическом пространстве. Построены модели таких важнейших процессов как обтекание солнечным ветром области геомагнитного поля [1–3] и генерация электрического поля за счет движения плазмы в хвосте магнитосферы [4]. Созданы модели магнитосферного магнитного поля [5] и ионосферных электрических полей и токов [6]. В основном эти модели предназначены для описания крупномасштабных процессов, для которых применимы уравнения магнитной гидродинамики. При рассмотрении отдельных магнитосферных явлений или объектов используются возможные упрощения: квазистатические приближения, выделение пограничных слоев, переход к двумерным моделям. В большинстве случаев приходится строить решения численными методами и иногда создавать новые численные алгоритмы, такие как многосеточный метод для решения двумерных задач переноса в гиротропных и движущихся средах, основанный на энергетических формулировках задач [7, 8].

Состояние высокоширотной ионосферы существенно зависит от физических процессов, протекающих в хвосте магнитосферы. Поэтому математическое моделирование нестационарных процессов в хвосте магнитосферы является важной и актуальной задачей. В работах [9–11] представлена новая модель изгибных магнитогидродинамических колебаний токового слоя магнитосферного хвоста, связанных с градиентами компонент магнитного поля. Такого типа колебания, получившие название флэппинг-колебаний, неоднократно регистрировались космическими аппаратами CLUSTER.

В рамках построенной нами модели [9] проведены детальные исследования модели флэппинг-волн, поведение которых характеризуется производением градиентов тангенциальной и нормальной компонент (по отношению к плоскости токового слоя) магнит-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-05-00135 и 09-06-91000) и Программы РАН № 16.3.

© ИВТ СО РАН, 2009.

ного поля магнитосферного хвоста. Флэппинг-волны распространяются вдоль токового слоя в направлении флангов перпендикулярно магнитному полю. Скорость распространения этих волн монотонно убывает с уменьшением длины волны. На рис. 1 показаны частота, групповая и фазовая скорости в зависимости от волнового числа. Частота колебаний монотонно растет с увеличением волнового числа и асимптотически стремится к величине ω_f , определяемой формулой

$$\omega_f = \sqrt{\frac{1}{4\pi\rho} \frac{B^*}{\Delta} \frac{\partial B_z}{\partial x}}, \quad (1)$$

где ρ — плотность, B^* — максимальная тангенциальная компонента магнитного поля (по отношению к токовому слою), B_z — нормальная компонента невозмущенного магнитного поля, Δ — полутолщина токового слоя, ось x направлена вдоль слоя.

Результаты математического моделирования сравнивались с имеющимися экспериментальными данными спутников CLUSTER. Полученные теоретические значения характерных частот и скоростей распространения флэппинг-колебаний токового слоя магнитосферного хвоста хорошо согласуются с существующими эмпирическими оценками, основанными на данных наблюдений. Расчетные значения скорости распространения изгибных колебаний поперек плазменного слоя магнитосферного хвоста находят-

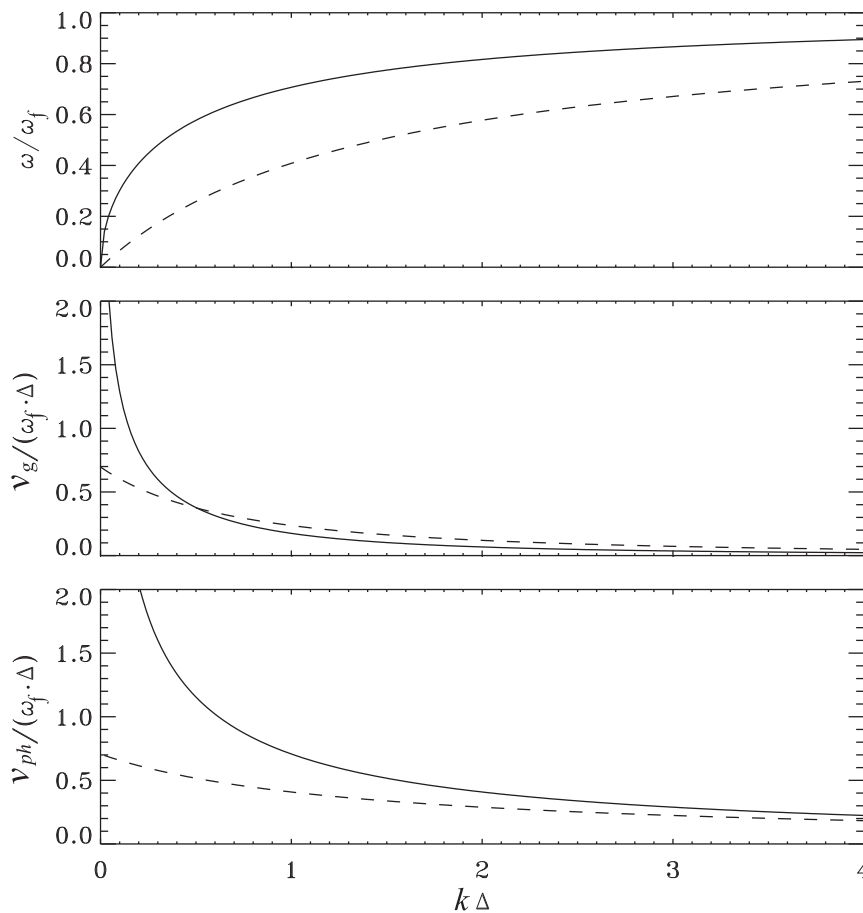


Рис. 1. Частота, групповая и фазовая скорость флэппинг-колебаний в зависимости от волнового числа для изгибной (kink — сплошная линия) и симметричной (sausage — штриховая линия) мод колебаний

ся в пределах нескольких десятков километров в секунду. Показано, что токовый слой магнитосферного хвоста становится неустойчивым относительно изгибных деформаций в области локального уменьшения толщины слоя. В этом случае возмущения токового слоя никуда не распространяются, а лишь экспоненциально растут по амплитуде, достигая нелинейной стадии. Такие локальные перетяжки в токовом слое обычно предваряют появление импульсов магнитного пересоединения в хвосте магнитосферы. Нестационарные изгибные деформации плазменного слоя создают альфвеновские волны, которые распространяются вдоль магнитных силовых линий и приносят электромагнитные возмущения в ионосферу Земли. Для описания этих волн разработана соответствующая модель магнитной струны [12].

Флэппинг-колебания токового слоя инициируются ускоренными потоками плазмы, возникающими вследствие импульсных процессов пересоединения магнитных полей в хвосте магнитосферы Земли. Существуют многочисленные экспериментальные подтверждения существования таких потоков. Скорость этих потоков может достигать нескольких сотен километров в секунду. Движущиеся к Земле с большой скоростью плазменные образования возбуждают магнитогидродинамические колебания плазменного слоя большой амплитуды и порождают флэппинг-колебания. В работе [13] представлена аналитико-численная модель пересоединения магнитных полей с учетом эффектов Холла. Показано, что эффекты Холла играют ключевую роль в процессах магнитного пересоединения. Проведено детальное сравнение результатов аналитического магнитогидродинамического моделирования с результатами двумерного численного эксперимента методом “частиц в ячейках”, основанным на прямых расчетах движения частиц совместно с решением уравнений Максвелла. Сравнение показало хорошее согласие распределений токов и магнитных полей, полученных на основе обеих моделей.

Принято считать, что магнитное пересоединение инициируется кинетическими плазменными неустойчивостями в токовом слое. Развитие неустойчивостей существенно зависит от вида начальной функции распределения частиц по скоростям. Обычно в теориях неустойчивостей в качестве начальных функции рассматривались распределения Максвелла, являющиеся равновесными для столкновительной плазмы. Однако в последние годы активно развивается теория так называемых каппа-распределений частиц по скоростям, которые более адекватны космической плазме, чем распределения Максвелла. В связи с этим в работе [14] была рассмотрена двухпотоковая плазменная неустойчивость в предположении каппа-функции распределения протонов по скоростям. Изучение влияния плазменных неустойчивостей на процессы магнитного пересоединения, формирование ускоренных потоков плазмы и возбуждение флэппинг-колебаний является предметом дальнейших исследований.

В последние годы в соответствии с общемировой тенденцией мы уделяем большее внимание процессам взаимодействия ионосферы с атмосферой и литосферой. Прикладная направленность моделирования этих процессов обусловлена желанием использовать космические средства для обнаружения предвестников землетрясений. Имеются экспериментальные данные об изменениях электрического поля в приземной атмосфере накануне землетрясений. Покрыть Землю сетью наземных датчиков проблематично, поэтому возник вопрос о возможности судить об этих полях на основе спутниковых измерений в верхних слоях ионосферы.

В ионосфере среда гиротропна, поскольку вектор магнитного поля задает выделенное направление вращения, и проводимость является тензором $\hat{\sigma}$. Закон Ома может быть записан отдельно для направления, параллельного вектору магнитной индук-

ции \mathbf{V} , и для перпендикулярных компонент векторов плотности тока \mathbf{j} и напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$j_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}, \tag{2}$$

$$\mathbf{j}_{\perp} = \sigma_P \mathbf{E}_{\perp} - \sigma_H [\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{V}] / V, \tag{3}$$

где $\sigma_P, \sigma_H, \sigma_{\parallel}$ — педерсеновская, холловская и продольная проводимости. Для вычисления значений этих компонент тензора проводимости создана модель, представленная в работе [15]. В качестве ее элементов использованы известные, свободно распространяемые эмпирические модели, которые дают пространственные распределения электронной и ионных концентраций IRI, газового состава и температуры MSISE и геомагнитного поля IGRF-10. Реализующие их программы на языке Фортран были взяты на сайте НАСА [16]. На рис. 2 показаны полученные высотные распределения компонент тензора проводимости, типичные для среднеширотной ионосферы выше 90 км.

В атмосфере среда изотропна, поэтому проводимость является скаляром: $\sigma_P = \sigma_{\parallel}$, $\sigma_H = 0$. Ее высотный профиль построен на рис. 2 ниже 60 км в соответствии с эмпирической моделью [17]. В области высот от 60 до 90 км использовались интерполяционные формулы, позволяющие гладко сшить атмосферную и ионосферную модели.

Как видно из рис. 2, в ионосфере проводимость в направлении магнитного поля σ_{\parallel} на несколько порядков превышает проводимости в перпендикулярных направлениях. Поэтому, как и во многих ионосферных моделях крупномасштабных электрических полей, мы приближенно считаем магнитные силовые линии эквипотенциальными. В таком

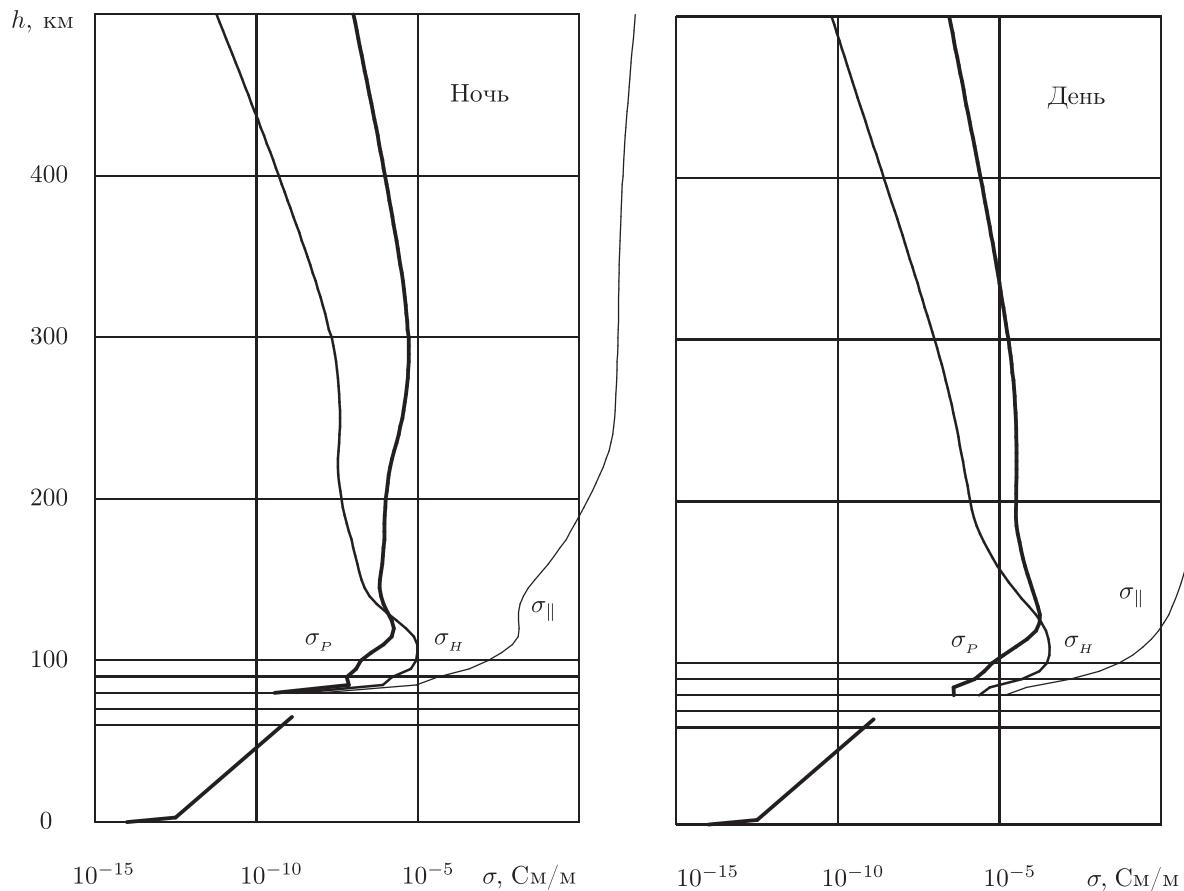


Рис. 2. Распределения компонент тензора; проводимости в атмосфере и в ионосфере

случае получается двумерная модель, в которой каждая точка представляет целую силовую линию. Такая ионосфера эквивалентна тонкой проводящей пленке с двумерным законом Ома

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \Sigma_P & -\Sigma_H \\ \Sigma_H & \Sigma_P \end{pmatrix} \mathbf{E}, \quad (4)$$

где интегральные педерсеновская и холловская проводимости получаются из локальных интегрированием вдоль силовой линии. Если магнитное поле не вертикально, закон Ома сохраняет этот вид в специальных координатах [15].

Используемая упрощенная модель ионосферы позволяет сформулировать для верхней границы атмосферы условие, соответствующее закону сохранения заряда: приходящий из атмосферы ток растекается по ионосфере. Если такой границей считать сферу радиуса r_1 , то

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = j_r|_{r=r_1}. \quad (5)$$

В отличие от этого естественного условия в известной модели, обзор развития которой дан в [18], без обоснований полагается

$$j_r|_{r=r_1} = 0, \quad (6)$$

и r_1 соответствует высоте 90 км над землей. Точнее говоря, поставлено эквивалентное условие

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{r=r_1} = 0,$$

где Φ — электрический потенциал такой, что напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi. \quad (7)$$

Сравнение с (5) показывает, что условие (6) соответствует нулевым токам в ионосфере, т. е. ионосфере — изолятору, что явно противоречит обратному соотношению проводимостей ионосферы и атмосферы, показанному на рис. 2.

В обсуждаемой модели было предсказано проникновение в ионосферу электрических полей напряженностью до 1 мВ/м, которые сравнимы с обычно существующими полями иного происхождения.

В другой известной модели [19] предложено условие

$$\Phi|_{r=r_2} = 0$$

и в качестве граничной сферы радиуса r_2 выбрана поверхность, лежащая внутри ионосферы на высоте более 150 км над землей. Это условие в силу (7) эквивалентно обращению в нуль касательных к границе компонент электрического поля и описывает границу с идеальным проводником, т. е. проводимость ионосферы выше 150 км полагается бесконечной. Авторами [19] адекватность такого приближения не проанализирована. Наши оценки показывают, что для замыкания полученного ими тока из атмосферы в ионосферу при полученных в области выше 100 км горизонтальных электрических полях проводимость ночной ионосферы должна быть в сотни раз больше, чем она есть.

Таким образом, две известные модели проникновения электрического поля от поверхности Земли до ионосферы приходится считать неудовлетворительными.

В созданной нами модели [20] учтена проводимость ионосферы. При этом использовалась та же модель электропроводности атмосферы, т. е. закон сохранения заряда, который с учетом (2), (3), (7) в изотропной среде имеет вид

$$-\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \Phi) = 0. \quad (8)$$

На нижней границе атмосферы во всех трех моделях задается вертикальная компонента электрического поля, для чего используются некоторые представления, основанные на результатах измерений:

$$-\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{r=r_0} = E_r^0(\theta, \varphi). \quad (9)$$

В локальных задачах сферичность не существенна, и задача формулируется для плоского слоя с дополнительным условием убывания решения на больших расстояниях.

При тех же наземных полях напряженностью до 100 В/м, что и в модели [18], мы получили на порядки меньшие поля — не более 10 мкВ/м в ночной ионосфере, и еще в сто раз меньшие — в дневной. Величина проникающего поля оказывается примерно обратно пропорциональной интегральной проводимости ионосферы, а днем она на два порядка повышается от ночного уровня.

В настоящее время модель [20] усовершенствована для учета реального распределения проводимости в атмосфере, приведенного в [17], тогда как ранее мы задавали экспоненциальный рост с высотой. Рассмотрена и более реалистичная модель распределения $E_r^0(\theta, \varphi)$. По сути эта функция описывает подземный генератор тока, поскольку нормальная компонента плотности тока $\sigma E_r^0(\theta, \varphi)$ сохраняет свое значение ниже поверхности Земли. Для локальных явлений, естественно, оба полюса такого генератора должны быть в области, где эти явления происходят, и ни один из них не может быть вынесен на бесконечность. В такой усовершенствованной модели для ионосферы получены еще в несколько раз меньшие электрические поля, проникающие в ионосферу.

На рис. 3 приведены линии тока в атмосфере. Часть тока, замыкающегося через ионосферу, существенно убывает с уменьшением горизонтального размера участка земной поверхности, на котором возникает электрическое поле. В приведенном на рис. 2 случае до ионосферы доходит около 30 % тока, выходящего из-под земли. При увеличении горизонтального размера источника тока четверо уже почти весь ток (97 %) течет через атмосферу вверх, где замыкается через хороший проводник, которым является ионосфера. В последнем случае мы получили в ночной ионосфере ионосферные поля не более 2 мкВ/м.

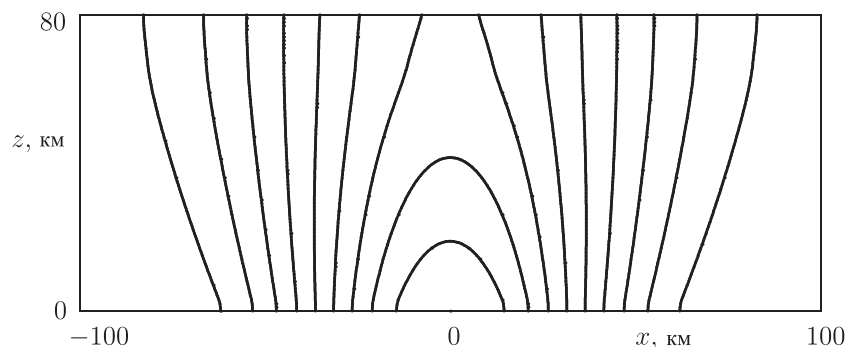


Рис. 3. Линии тока в атмосфере

Выделение полей полученного нами масштаба на фоне всегда существующих в ионосфере полей более 1 мВ/м невозможно. Таким образом, к сожалению, исключена возможность использования спутниковых измерений для оценки наземных электрических полей. Разумеется, это не относится к другим известным механизмам связи приземной атмосферы с ионосферой, которые можно было бы использовать для обнаружения предвестников землетрясений [17].

В рамках рассматриваемого прикладного направления необходим также анализ обратного явления — проникновения ионосферных электрических полей до поверхности Земли, поскольку эти поля могут объяснять часть измеряемых наземных вариаций и после их исключения упростится выделение предвестников землетрясений. Поэтому мы создали комплекс программ для численного решения трехмерной стационарной задачи электропроводности атмосферы [21]. Пространственное распределение электрического потенциала получается как решение смешанной краевой задачи для эллиптического уравнения. Основная сложность задачи обусловлена изменением проводимости в расчетной области в миллионы раз. Для решения этой задачи была построена вариационно-разностная схема, которая получается стандартным образом из условия минимальности значения функционала энергии по узловым значениям кусочно-линейных функций, используемых для аппроксимации энергетического пространства. В созданном алгоритме применяются блочно-структурированные сетки с такой же нумерацией узлов в каждом блоке, как и в параллелепипеде. Каждая ячейка сетки, имеющая восемь вершин, после определения центра ячейки и центров ее шести граней делится естественным способом на 24 тетраэдра. Для решения возникающей системы линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей применяем многосеточный метод Федоренко. Потенциал на верхней границе атмосферы задается как потенциал в ионосфере. Для этого мы использовали модели ионосферных электрических полей, ранее созданные для различных геомагнитных условий [6]. Земля приближенно рассматривалась как идеальный проводник, поскольку проводимости морской воды и влажной почвы существенно превышают проводимость воздуха в приземном слое. Комплекс программ позволяет также решать задачи с иными граничными условиями. Для задания пространственного распределения проводимости были использованы существующие эмпирические модели [17].

В результате моделирования показано, что ионосферные разности потенциалов до 100 кВ, характерные для магнитосферных суббурь, приводят к наземным вариациям вертикальной компоненты электрического поля до 60 В/м. Это весьма существенная поправка к наблюдаемому при хорошей погоде среднему полю около 130 В/м, которое соответствует постоянной разности потенциалов между землей и ионосферой, обусловленной глобальной грозовой активностью. Методическим результатом моделирования является обоснование обычного способа построения вертикального приземного электрического поля в рамках одномерной модели электропроводности атмосферы для полей с достаточно большим горизонтальным масштабом поля. Одномерное приближение можно использовать до высоты 20 км, если горизонтальный масштаб превышает 50 км, и до высоты 50 км при горизонтальном масштабе более 500 км. Масштаб мы понимаем в том же смысле, в котором для функции $\sin(x)$ характерным является изменение аргумента на единицу. Для построения полей в верхней атмосфере решение существенно трехмерной задачи является необходимым, и созданный комплекс программ позволяет это делать. Кроме того, описанный комплекс дает возможность учесть рельеф местности и сложные распределения проводимости в пространстве.

Главным недостатком созданной модели является упрощенный учет слоя, обычно занимающего высоту 80–100 км, где проводимость уже не является изотропной, как в атмосфере, но еще нет подавляющего преобладания проводимости вдоль магнитного поля, характерного для расположенной выше данного слоя основной части ионосферы. Для этого слоя необходимо решать следующие уравнения электропроводности с несимметричным тензором проводимости (2), (3):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{j} &= Q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{G}, \\ j_n |_{\Gamma} &= q. \end{aligned} \quad (10)$$

Ненулевая правая часть Q в законе сохранения заряда возникает, если учесть заданную скорость движения проводника \mathbf{v} , поскольку в законе Ома (3) добавится член, соответствующий переходу в движущуюся систему отсчета проводника и $Q = -\operatorname{div}(\hat{\sigma}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}])$. Для ионосферы этот эффект важен, так как именно ветрами в рамках динамотеории объясняются основные токи, наблюдаемые в спокойных геомагнитных условиях.

Ненулевая правая часть в уравнении индукции \mathbf{G} возникает при решении квазистационарных задач, когда магнитное поле заданным образом изменяется со временем. В этом случае $\mathbf{G} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$.

Граничное условие (3) эквивалентно (9), поскольку отличается лишь умножением на строго положительную проводимость, но является более содержательным, так как именно нормальная компонента плотности тока \mathbf{j} непрерывна при переходе за границу. Вторым основным условием из возможных краевых условий является задание касательных компонент напряженности электрического поля вместо (4):

$$\mathbf{E}_\tau |_{\Gamma} = \mathbf{g}_\tau,$$

поскольку они тоже непрерывны при переходе за границу.

Чтобы избежать решения задач с несамосопряженными операторами, которые традиционно получаются для электрического потенциала, задачу (2), (3), (11) целесообразно решать в рамках энергетической формулировки [7]. В соответствии с энергетическим методом [22] в [7] был построен функционал энергии

$$W(F, P) = \frac{1}{2} \left[\left(\begin{array}{c} F \\ \mathbf{P} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} F \\ \mathbf{P} \end{array} \right) \right] - \int (FQ/\sigma_0 + \mathbf{P}^* \mathbf{G}) d\Omega + \int Fq/\sigma_0 d\Gamma, \quad (11)$$

который рассматривается на множестве пар гладких функций F, \mathbf{P} , удовлетворяющих условиям

$$\int F d\Omega = 0, \quad \mathbf{P}_t |_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Квадратными скобками в (11) и ниже обозначена симметричная билинейная форма, определяющая энергетическое скалярное произведение:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\begin{array}{c} u \\ \mathbf{v} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} F \\ \mathbf{P} \end{array} \right) \right] = \\ & = \int \left(\left(\begin{array}{c} \operatorname{grad} u \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} \end{array} \right)^* \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sigma_0^2} \sigma S \sigma^* & -\frac{1}{\sigma_0} \sigma S \\ -\frac{1}{\sigma_0} S \sigma^* & S \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \operatorname{grad} F \\ \operatorname{rot} \mathbf{P} \end{array} \right) + \operatorname{div} \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{P} \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь положительная константа σ_0 и симметричная равномерно положительно определенная матричная функция S используются для улучшения обусловленности возникающих при численном решении задачи систем линейных алгебраических уравнений.

Полученные в результате минимизации функционала энергии функции F , \mathbf{P} позволяют построить решение исходной задачи по формуле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma_0} S \sigma^* \text{grad } F + S \text{rot } \mathbf{P}.$$

Условием минимума является выполнение уравнений

$$\begin{aligned} \text{div} \left(-\frac{1}{\sigma_0^2} \sigma S \sigma^* \text{grad } F + \frac{1}{\sigma_0} S \text{rot } \mathbf{P} \right) &= Q / \sigma_0, \\ \text{rot} \left(-\frac{1}{\sigma_0} S \sigma^* \text{grad } F + S \text{rot } \mathbf{P} \right) &= \mathbf{G}. \end{aligned} \tag{13}$$

Еще одно следствие минимальности значения функционала энергии —

$$\text{div } \mathbf{P} = 0.$$

В пространстве функций, удовлетворяющих этому условию и (12), оператор системы (14) является симметричным, положительно определенным и сопряженно факторизованным, что существенно упрощает численное решение задачи по сравнению с традиционной формулировкой задач с несамосопряженными операторами для электрического потенциала.

Для задания проводимости в рассматриваемом слое нижней ионосферы, где существенна гиротропия, может быть использована модель [15], основанная на известных эмпирических моделях пространственно-временных распределений параметров ионосферы. Модель электропроводности этого слоя нижней части ионосферы будет частью общей модели, поскольку целесообразно провести декомпозицию всей области на три части, в двух из которых возможны существенные упрощения: за счет изотропии — в атмосфере, и за счет подавляющего преобладания проводимости вдоль магнитного поля — в основной части ионосферы. Достаточно эффективные численные реализации этих двух упрощенных моделей нами уже созданы.

Атмосферная часть задачи существенно проще, поскольку тензор проводимости $\hat{\sigma}$ становится изотропным. Достаточно его симметрии, чтобы задача расщепилась на две независимые задачи для F и \mathbf{P} . При нулевой правой части \mathbf{G} решением второй задачи является $\mathbf{P} = 0$. Функция F становится электрическим потенциалом, и получающееся из (14) уравнение для F совпадает с (8). Соответственно и используемый для решения этой задачи энергетический метод, кратко описанный выше, является частным и существенно более простым случаем минимизации функционала энергии (11).

Задача для основной части ионосферы сводится к двумерной и для нее энергетический подход реализуется в виде многосеточного метода [8].

Список литературы

- [1] ДЕНИСЕНКО В.В., ЕРКАЕВ Н.В., КИТАЕВ А.В., МАТВЕЕНКОВ И.Т. Математическое моделирование магнитосферных процессов. Новосибирск: Наука, 1992.

- [2] ЕРКАЕВ Н.В. Обтекание солнечным ветром магнитосферы. М.: Междугос. геопфиз. комитет АН СССР, 1989. 127 с.
- [3] ERKAEV N.V., MEZENTSEV A.V., BIERNAT H.K. Influence of the interplanetary magnetic field on the solar wind flow about planetary obstacles // *Space Science Rev.* 2006. Vol. 122. P. 209–219.
- [4] ДЕНИСЕНКО В.В., ЗАМАЙ С.С., КИТАЕВ А.В. Влияние вязкого трения между солнечным ветром и плазменным слоем на генерацию электрического поля в магнитосфере // *Геомагнетизм и аэрономия.* 2003. Т. 43, № 6. С. 730–736.
- [5] DENISENKO V.V., BIERNAT H.K., ERKAEV N.V., SEMENOV V.S. Mathematical model of magnetic field perturbations by currents in the Earth's magnetosphere // *Planetary Radio Emissions VI* / Eds. H.O. Rucker, W.S. Kurth, G. Mann. Vienna: Austrian Acad. Sci. Press, 2006. P. 309–316.
- [6] DENISENKO V.V., ZAMAY S.S. Electric field in the equatorial ionosphere // *Planetary and Space Science.* 1992. Vol. 40, N 7. P. 941–952.
- [7] ДЕНИСЕНКО В.В. Энергетический метод для трехмерных эллиптических уравнений с несимметричными тензорными коэффициентами // *Сиб. мат. журн.* 1997. Т. 38, № 6. С. 1267–1281.
- [8] ДЕНИСЕНКО В.В. Энергетические методы для эллиптических уравнений с несимметричными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1995. 204 с.
- [9] ERKAEV N.V., SEMENOV V.S., BIERNAT H.K. Magnetic double-gradient instability and flapping waves in a current sheet // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99. P. 235003.
- [10] ERKAEV N.V., SEMENOV V.S., BIERNAT H.K. Magnetic double gradient mechanism for flapping oscillations of a current sheet // *Geophys. Res. Lett.* 2008. Vol. 35, N L02111. doi:10.1029/2007GL032277.
- [11] ERKAEV N.V., SEMENOV V.S., KUBYSHKIN I.V. ET AL. MHD aspect of current sheet oscillations related to magnetic field gradients // *Ann. Geophys.* 2009. Vol. 27. P. 417–425.
- [12] ЕРКАЕВ Н.В., ШАЙДУРОВ А.В. Модель магнитной струны для расчета колебаний тонких магнитных трубок // *Вычисл. технологии.* 2006. Т. 11, № 3. С. 73–89.
- [13] SEMENOV V., KOROVINSKIY D., DIVIN A. ET AL. Collisionless magnetic reconnection: analytical model and PIC simulation comparison // *Ann. Geophys.* 2009. Vol. 27. P. 905–911.
- [14] LANGMAYR D., BIERNAT H.K., ERKAEV N.V. Influence of kappa-distributed ions on the two-stream instability // *Phys. Plasmas.* 2005. Vol. 12. P. 102103.
- [15] DENISENKO V.V., BIERNAT H.K., MEZENTSEV A.V. ET AL. Modification of conductivity due to acceleration of the ionospheric medium // *Ann. Geophys.* 2008. Vol. 26. P. 2111–2130.
- [16] MODELS Distribution and Staging Directory. National Space Science Data Center. NASA. <http://nssdcftp.gsfc.nasa.gov>
- [17] MOLCHANOV O., HAYAKAWA M. *Seismo-electromagnetics and Related Phenomena: History and Latest Results.* Tokyo: TERRAPUB, 2008.
- [18] PULINETS S.A., LEGEN'KA A.D., GAIVORONSKAYA T.V., DEPUEV V.KH. Main phenomenological features of ionospheric precursors of strong Earthquakes // *J. Atmosph. and Solar-Terrestrial Phys.* 2003. Vol. 65. P. 1337–1347.
- [19] GRIMALSKY V.V., HAYAKAWA M., IVCHENKO V.N. ET AL. Penetration of an electrostatic field from the lithosphere into the ionosphere and its effect on the D-region before earthquakes // *Ibid.* 2003. Vol. 65. P. 391–407.

- [20] DENISENKO V.V., BOUDJADA M.Y., HORN M. ET AL. Ionospheric conductivity effects on electrostatic field penetration into the ionosphere. // *Natural Hazards and Earth System Sci. J.* 2008. Vol. 8. P. 1009–1017.
- [21] ДЕНИСЕНКО В.В., БЫЧКОВ В.В., ПОМОЗОВ Е.В. Расчет атмосферных электрических полей, проникающих из ионосферы // *Солнечно-земная физика: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т солнечно-земной физики.* 2008. Т. 2, вып. 12. С. 281–283.
- [22] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Гостехиздат. 1957.

Поступила в редакцию 9 ноября 2009 г.