Регуляризация дискретной схемы для плоской задачи об эволюции границы раздела различных жидкостей*

Д. Н. Никольский
Орловский государственный университет, Россия
e-mail: nikolskydn@mail.ru

Для численного решения задачи об эволюции границы раздела различных жидкостей построена регуляризованная дискретная схема. Регуляризация проводится методом сглаживания ядра сингулярного интеграла, входящего в дифференциальное уравнение подвижной границы. Схема апробирована на конкретных задачах.

Ключевые слова: регуляризация сингулярного интеграла, эволюция границы раздела жидкостей, совместная фильтрация различных жидкостей.

1. Основная система интегрального и дифференциального уравнений

В работе [1] показано, что решение задачи об эволюции границы Γ_t раздела жидкостей различных вязкостей (μ_1 вне и μ_2 внутри) в однородной безграничной пористой среде состоит в совместном решении уравнений

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в} \quad R^2 \setminus \Gamma_t, \tag{1}$$

$$d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_0 + \left(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-\right)/2 \quad \text{на} \quad \Gamma_t \tag{2}$$

при граничных условиях

$$\mu_1\varphi^+ = \mu_2\varphi^-, \quad v_n^+ = v_n^- \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \tag{3}$$

$$\varphi_* \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{4}$$

и начальном условии

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\theta) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad \theta \text{ — некоторый параметр.} \tag{5}$$

Здесь φ — потенциал скорости фильтрации $\mathbf{v}$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; t — время; знаками “+” и “−” обозначены предельные значения соответствующих функций при подходе к границе Γ_t против и вдоль нормали $\mathbf{n}$; φ_* — потенциал скорости возмущения, вызванного внесением границы раздела жидкостей Γ_t в область протекания процесса. Выражения (1)–(5) записаны в безразмерных величинах.

Используя потенциал двойного слоя, решение задачи (1) и (2) при условиях (3)–(5) сводится к системе интегрального и дифференциального уравнений:

$$g - 2\lambda G_* g = 2\lambda\varphi_0, \quad d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_0 + \nabla G_* g \quad \text{на} \quad \Gamma_t, \tag{6}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (проект МК-491.2008.1).

где $G_*g = \int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)dl_N$ — потенциал двойного слоя плотности g; $\Omega = (\mathbf{F}, \mathbf{n}_N)$; $\mathbf{F} = \nabla_N \Phi(M,N)$; Φ — потенциал нормированного стока, мощность которого равна -1; φ_0 — потенциал скорости $\mathbf{v}_0$ невозмущенного течения, параметр $\lambda = (\mu_2-\mu_1)/(\mu_1+\mu_2)$.

В каждый момент времени t_j, $j = \overline{0,J}$ разобьем границу Γ_{t_j} на n частей и получим множество точек $\{\mathbf{r}^j_m | m = \overline{0,n-1}\}$. Элементы этого множества при $t = 0$ вычисляются по формуле (5). Методом дискретных вихревых пар выполним дискретизацию основной системы (6) [1], в результате получим итерационную последовательность для системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и выражение для вычисления элементарных смещений частиц границы раздела жидкостей:

$$\begin{gathered}
g^{ji}_{m+1/2} = Ag^{j,i-1}_{m+1/2} + f^j_{m+1/2}, \quad f^j_{m+1/2} = 2\lambda\tau\varphi^j_{0\,m+1/2},\\
Ag^{j,i-1}_{m+1/2} = 2\lambda\tau \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n-1} g^{ji}_{k+1/2}\left(\mathbf{F}^j_{m+1/2,k+1/2}, \mathbf{n}^j_{k+1/2}\right)\Delta l^j_{k+1/2} + (1-\tau)g^{ji}_{m+1/2},\\
\Delta\mathbf{r}^j_m/\Delta t_j = \mathbf{v}^j_{0m} + \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n-1} g^j_{k+1/2}\left(\mathbf{V}^j_{\varepsilon mk} - \mathbf{V}^j_{\varepsilon m,k+1}\right), \quad \mathbf{r}^0_m = \mathbf{r}_0(\theta_m),\\
j = \overline{0,J}, \quad m = \overline{0,n-1}, \quad i = \overline{1,I},
\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathbf{n}^j_{k+1/2} = T\boldsymbol{\ell}^j_{k+1/2}/\Delta l^j_{k+1/2}$; $T = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ — матрица поворота на 90° против часовой стрелки (единичные векторы касательной и нормали образуют правую двойку); $\Delta l^j_{k+1/2} = \left|\boldsymbol{\ell}^j_{k+1/2}\right|$, $\boldsymbol{\ell}^j_{k+1/2} = \mathbf{r}^j_{k+1} - \mathbf{r}^j_k$, $\mathbf{r}^j_{k+1/2} = \left(\mathbf{r}^j_k + \mathbf{r}^j_{k+1}\right)/2$, причем $\mathbf{r}^j_n = \mathbf{r}^j_0$; I — число итераций для решения СЛАУ, которое определяется из условия $\|g^I - g^{I-1}\| \le (1-\|A\|)/\|A\|\epsilon$, ϵ — заданная точность; $\mathbf{V}_{\varepsilon mk} = \Theta_\varepsilon \mathbf{V}_{mk}$, $\Theta_\varepsilon(r) = \Theta_1(r/r_\varepsilon)$ — сглаживающая функция [2], удовлетворяющая следующим условиям: $\Theta_1(0) = \Theta_1'(0) = \Theta_1''(0) = 0$, $\Theta_1'''(r) < Cr^2$ для $\forall\ r \in [0,\infty)$, r_ε — эффективный радиус вихря, C — константа, $\Theta_1'''(r) = 1$ при $r \ge 1$; $\Delta\mathbf{r}^j_m = \mathbf{r}^{j+1}_m - \mathbf{r}^j_m$; $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$; $\mathbf{V}$ — скорость нормированного вихря с циркуляцией, равной -1; τ — параметр, подбираемый экспериментально, обеспечивающий выполнение необходимого и достаточного условия сходимости итерационной последовательности $g^i, i = \overline{1,I}$ из (7): $\rho(A) < 1$ [3], здесь $\rho(A)$ — спектральный радиус матрицы A.

Схема (7) отличается от ранее исследованных дискретных схем наличием сглаживающей функции Θ и методикой смещения частиц границы: вследствие регуляризации скорости вихря каждый отрезок $\mathbf{r}_{m,m+1}$ смещается за его концы, а не за центр. Ниже рассмотрены практические задачи, в которых применение данной дискретной схемы позволяет произвести расчет. Для численных расчетов использовался один из возможных вариантов сглаживающей функции $\Theta_\varepsilon = \left(63(r/r_\varepsilon)^5 - 90(r/r_\varepsilon)^7 + 35(r/r_\varepsilon)^9\right)/8$ при $r \le r_\epsilon$.

2. Эволюция в поступательном потоке

Рассмотрим эволюцию границы Γ_t раздела различных жидкостей, представляющей собой в начальный момент времени $t = 0$ окружность радиуса R с центром в точке (x_c, y_c)

выбранной декартовой системы координат xOy. Движение границы раздела происходит под действием поступательного потока, скорость которого на бесконечности равна $u\mathbf{e}_x$. Так как область протекания процесса безгранична, функции φ_0, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{V}$ из дискретной схемы (7) примут вид [4]

$$\varphi_0 = ux, \quad \mathbf{v}_0 = u\mathbf{e}_x, \quad \mathbf{F} = (2\pi)^{-1}\mathbf{r}_{NM}/r_{NM}^2, \quad \mathbf{V} = (2\pi)^{-1}\mathbf{r}_{NM}/r_{NM}^2.$$

В начальный момент времени $t = 0$ можно точно вычислить скорость смещения частиц границы Γ_0. Действительно, применяя теорему об окружности [4], получим потенциалы, описывающие течение вне и внутри окружности:

$$\varphi_1 = (1 + \lambda R^2/(x^2 + y^2))ux, \quad \varphi_2 = (1 - \lambda)ux. \tag{8}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что потенциалы (8) удовлетворяют уравнению Лапласа (1) и граничным условиям (3).

После дифференцирования (8) получим точное значение скорости смещения частиц границы Γ_0:

$$\mathbf{v}_a = \left(1 - \lambda x^2/R^2\right) u\mathbf{e}_x - \lambda uxy/R^2\mathbf{e}_y \quad \text{на} \quad \Gamma_0. \tag{9}$$

Множество точек, моделирующее окружность Γ_0, получим, используя ее параметрические уравнения:

$$\begin{gathered} x_m^0 = x_c + R\cos t_m, \quad y_m^0 = y_c + R\sin t_m, \quad m = \overline{0, n-1}, \\ t = \left\{\pi(m/c)^p | \, m = \overline{0, c-1}\right\} \cup \left\{-\pi(m/c)^p | \, m = \overline{c-1, 0}\right\}, \quad c = n/2. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь параметр p характеризует неравномерность разбиения окружности. При $p = 1$ и $p \neq 1$ имеем систему точек, разбивающую окружность Γ_0 соответственно на равные и неравные по длине части.

Введем погрешность $\eta_n = |1 - v/v_a|\, 100\%$, где v — модуль скорости смещения частиц границы Γ_0, полученный численно из системы (7), v_a — модуль вектора скорости, вычисленный по точной формуле (9). Для определенности выберем $R = 1$, $u = 1$, $\lambda = 0.5$, $x_c = 0$ и $y_c = 0$.

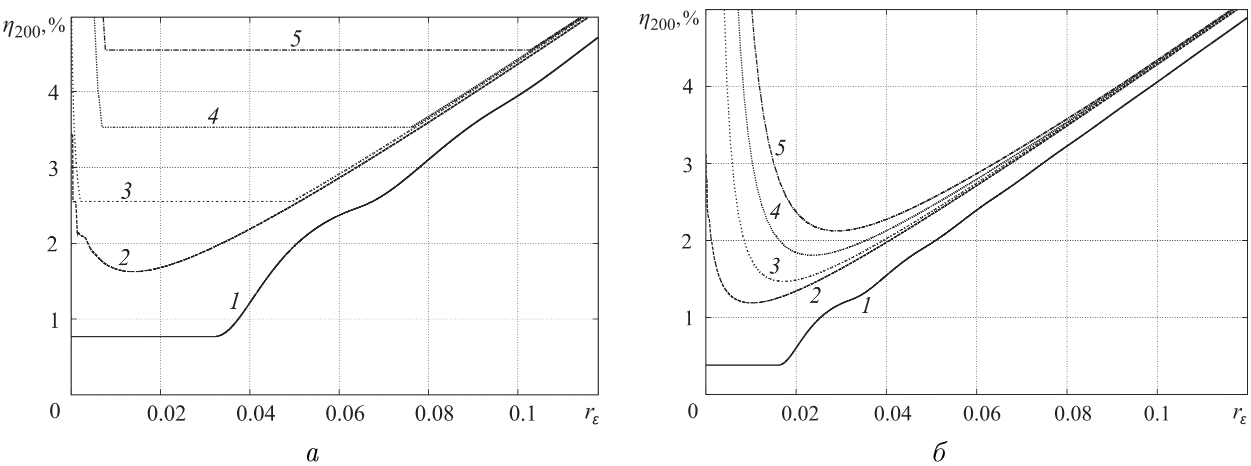


Рис. 1. Зависимость погрешности η_{200} (*а*) и η_{400} (*б*) от радиуса вихря r_ε; $p = 1$ (*1*), 2 (*2*), 3 (*3*), 4 (*4*), 5 (*5*)

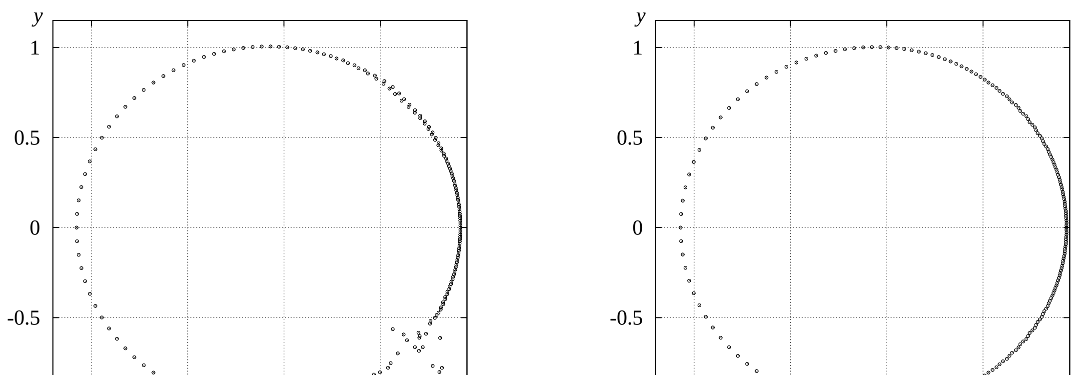
На рис. 1 представлены зависимости погрешности вычислений η_n от радиуса вихря r_ε для $n = 200$ и $n = 400$. Анализируя рисунки, видим, что при разбиении границы раздела жидкостей Γ_t на неравные по длине части результаты численных расчетов имеют большую погрешность. Однако эта погрешность может быть устранена путем использования сглаживающей функции Θ_ε из (7) и подбора оптимального значения радиуса вихря r_ε.

В табл. 1 представлена зависимость погрешности η_n от степени неравномерности разбиения окружности p при оптимальном значении радиуса вихря r_ε для числа точек разбиения $n = 200, 400, 600, 800$. Видно, что с увеличением n при оптимальном значении эффективного радиуса вихря r_ε погрешность численного решения задачи уменьшается при $p = 1$ и 2 для всех n, а при $p = 3, 4$ и 5 для $n = 200$ и 400.

На рис. 2 показаны положения границы раздела жидкостей Γ_t при $t = 1.8$ для случаев $r_\varepsilon = 0$ (без сглаживания) и $r_\varepsilon = 0.064$ (со сглаживанием). В начальный момент времени множество точек границы раздела жидкостей Γ_0 было получено из (10) при $p = 1$, т. е. при $t = 0$ точки разбивали границу раздела жидкостей на равные по длине дуги части. Затем, с течением времени, в силу касательных смещений частиц границы это множество стало образовывать неравные по длине отрезки, что при $r_\varepsilon = 0$ привело к неустойчивым численным расчетам и не физическому разрыву границы раздела жидкостей (рис. 2, *а*).

Т а б л и ц а 1. Погрешность η_n при оптимальном значении радиуса вихря r_ε

p	1	2	3	4	5
$r_{\varepsilon\ 200}$	0	0.0137	0.0021	0.0069	0.0077
$\eta_{200}, \%$	0.7682	1.6253	2.5511	3.5296	4.5476
$r_{\varepsilon\ 400}$	0	0.0102	0.017	0.0227	0.0028
$\eta_{400}, \%$	0.3796	1.1885	1.4668	1.8086	2.1244
$r_{\varepsilon\ 600}$	0	0.0082	0.0204	0.0291	0.0330
$\eta_{600}, \%$	0.2520	0.9601	1.5486	1.9858	2.2762
$r_{\varepsilon\ 800}$	0	0.0071	0.0234	0.0306	0.0357
$\eta_{800}, \%$	0.1886	0.8179	1.6049	2.0945	2.3675



а *б*

Рис. 2. Граница раздела жидкостей при $r_\varepsilon = 0$ (*а*) и $r_\varepsilon = 0.064$ (*б*)

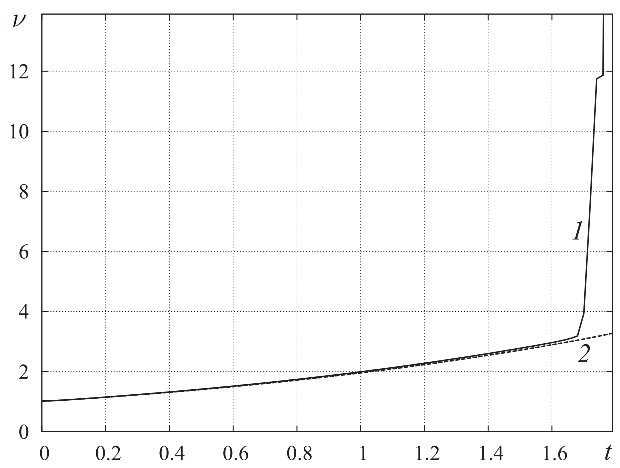


Рис. 3. Изменение числа обусловленности ν с течением времени t; $r_\varepsilon = 0$ (*1*), 0.064 (*2*)

Для наглядности выбрано $n = 200$. Оптимальное значение параметра $\tau = 0.8$. На каждом временном шаге для решения СЛАУ из системы (7) с точностью $\epsilon = 10^{-6}$ выполнялось 13–14 итераций. Расчет для случая $r_\varepsilon = 0$ был выполнен с приближенным условием остановки итерационного процесса из (7): $\|g^I - g^{I-1}\| < \epsilon$.

На рис. 3 показано изменение числа обусловленности ν матрицы СЛАУ из (7) с течением времени t. Линия *1* на рисунке соответствует расчету без сглаживания при $r_\varepsilon = 0$, линия *2* — расчету со сглаживанием при $r_\varepsilon = 0.064$. Видно, что при достижении некоторой степени неравномерности, в случае, когда сглаживание не выполняется, число обусловленности ν резко возрастает. Последнее не позволяет считать результаты расчетов достоверными и объясняет отсутствие физического смысла у результатов расчета, представленных на рис. 2, *а*. Применение регуляризации позволило избежать резкого возрастания числа обусловленности ν и неустойчивости численного счета. Аналогичные выводы при исследовании задачи Лейбензона получены в [5].

Отметим, что согласно (8) скорость движения частиц жидкости, находящихся внутри границы раздела жидкостей, постоянна и равна $\mathbf{v}_2 = (1-\lambda)u\mathbf{e}_x$. В исследованной задаче модуль средней скорости движения частицы жидкости, имеющей в начальный момент времени координату $(0,1)$, равен 0.513 и превышает $v_2 = 0.5$ на несколько процентов, что согласуется с данными [6].

3. Эволюция к стоку

Центр первоначальной окружности Γ_0 радиуса R поместим в точке $(a,0)$. Невозмущенное течение моделируем стоком, расположенным в начале координат. Его потенциал φ_0 и скорость $\mathbf{v}_0$ равны

$$\varphi_0 = q(2\pi)^{-1}\ln r_M, \quad \mathbf{v}_0 = q(2\pi)^{-1}\mathbf{r}_M/r_M^2,$$

где q — дебит скважины (соответствует стоку при $q < 0$).

При параметре $\lambda = 1$ задача об эволюции стока к окружности имеет точное решение в виде отображения единичного круга с центром в точке $(a,0)$ на область, занятую жидкостью в момент времени t [7]:

$$f_t(\zeta) = \beta_t\zeta/(1-\alpha_t\zeta) + \gamma_t\zeta, \tag{11}$$

причем коэффициенты α_t, β_t и γ_t определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} \left(R^2 - qt/\pi\right)^2 w^3 - \left(2a^2R^2 + 2a^2qt/\pi + a^4\right) w + 2a^4 = 0, \quad \alpha_t = \pm\sqrt{w}, \\ \beta_t = \left(1-\alpha_t^2\right)\left(a/\alpha_t + \alpha_t/a\left(R^2 - qt/\pi\right)\right)/2, \\ \gamma_t = \left(a/\alpha_t - \alpha_t/a\left(R^2 - qt/\pi\right)\right)/2. \end{aligned} \tag{12}$$

Полагаем $R = 1$, $a = 0.5$, $q = -\pi$, $t = 0.1$. Численно решая систему (12), получим параметры $\alpha_{0.1} = 0.56991$, $\beta_{0.1} = 0.71947$, $\gamma_{0.1} = -0.18824$. При решении кубического уравнения был выбран корень, имеющий физический смысл. Подставляя найденные параметры в (11), находим координаты частицы, смещающейся вдоль направления прорыва воды в скважину в момент времени $t_a = 0.1$ — $(-0.27004, 0.0)$.

Определим время достижения границей раздела жидкостей Γ_t точки $(-0.27004, 0.0)$ численно путем решения системы (7) при $\lambda = 1$. Первоначальную границу раздела жидкостей Γ_0 моделируем системой точек, вычисленной из (10) при $x_c = 0.5$ и $y_c = 0.0$. В табл. 2 приведена зависимость величины $\eta_n = |1 - t/t_a|100\%$ от неравномерности разбиения первоначальной окружности p. При подборе r_ε выполнялся визуальный контроль за границей раздела жидкостей. При этом значения r_ε, соответствующие деформации границы раздела жидкостей, не имеющие физического смысла и не совпадающие с аналитическим решением, были отброшены.

Анализируя табл. 2, видим, что при разбиении начальной границы раздела жидкостей на равные по длине части ($p = 1$) регуляризация для исследуемой задачи не требуется и численное решение сходится к точному с ростом числа n, при разбиении

Т а б л и ц а 2. Влияние неравномерности разбиения на погрешность η_n при $dt = 0.002$ и 0.001

p	1	2	3
	$dt = 0.002$		
$r_{\varepsilon\ 200}$	0	0.038	0.036
$\eta_{200}, \%$	3.7223	5.1999	5.1855
$r_{\varepsilon\ 400}$	0	0.030	0.031
$\eta_{400}, \%$	2.9215	4.4799	4.5013
$r_{\varepsilon\ 600}$	0	0.028	0.028
$\eta_{600}, \%$	2.2861	4.4199	4.4509
$r_{\varepsilon\ 800}$	0	0.026	0.028
$\eta_{800}, \%$	1.6953	4.3746	4.4307
	$dt = 0.001$		
$r_{\varepsilon\ 200}$	0	0.037	0.036
$\eta_{200}, \%$	3.58345	5.0499	5.0468
$r_{\varepsilon\ 400}$	0	0.030	0.031
$\eta_{400}, \%$	2.23943	4.3413	4.3626
$r_{\varepsilon\ 600}$	0	0.028	0.028
$\eta_{600}, \%$	1.87199	4.0107	4.3047
$r_{\varepsilon\ 800}$	0	0.026	0.028
$\eta_{800}, \%$	1.55051	3.9655	4.2922

на неравные по длине части регуляризация необходима и позволяет добиться практической сходимости численного решения к точному.

Из проведенных вычислительных экспериментов следует, что при численном решении задач об эволюции границы раздела различных жидкостей методом дискретных особенностей в случае разбиения подвижной границы на неравные по длине части в силу отсутствия в дискретной схеме механизмов саморегуляризации возникает и быстро нарастает численная неустойчивость, приводящая к результатам, не имеющим физического смысла. Эта численная неустойчивость устраняется методом сглаживания ядра сингулярного интеграла в дифференциальном уравнении движения границы раздела жидкостей. Необходимость сглаживания, а также ее параметры (в нашем случае вид функции Θ_ε и радиус вихря r_ε) предлагается устанавливать в ходе численного эксперимента путем визуального наблюдения за подвижной границей и контроля характеристик дискретной схемы (7), например, числа обусловленности СЛАУ.

Список литературы

[1] Никольский Д.Н. К вопросу построения дискретной схемы для плоской задачи эволюции границы раздела различных жидкостей // Вычисл. технологии. 2008. Т. 14, № 4. С. 89–94.

[2] Кирякин В.Ю., Сетуха А.В. О сходимости вихревого численного метода решения трехмерного уравнения Эйлера в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 9. С. 1263–1276.

[3] Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2006. 400 с.

[4] Голубева О.В. Курс механики сплошных сред. М.: Наука, 1971. 368 с.

[5] Никольский Д.Н., Дорофеева В.И. Исследование дискретных схем для задачи об эволюции границы раздела жидкостей в постановке Лейбензона // Сб. Междунар. школы-семинара "МДОЗМФ-2008". Вып. 6. Орел: Картуш, 2008. С. 73–77.

[6] Воинов В.В. О точных решениях задачи движения границы раздела несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Прикл. механика и техн. физика. 1991. № 1. С. 68–71.

[7] Варченко А.Н., Этингоф П.И. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса. М.: Наука, 1995. 80 с.

Поступила в редакцию 20 апреля 2009 г.,
в переработанном виде — 18 августа 2009 г.