Вычислительные технологии **Том 15, № 6, 2010**

Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза*

С. П. Баутин, С. Л. Дерябин
Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
e-mail: SBautin@math.usart.ru, SDeryabin@math.usurt.ru

А. Ф. Соммер
Новосибирский государственный университет, Россия
e-mail: nisei@sibmail.ru

Г. С. Хакимзянов
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: khak@ict.nsc.ru

Для уравнений мелкой воды построены решения начально-краевых задач в виде рядов, локально сходящихся в окрестности подвижной границы вода—суша для произвольного рельефа дна. Определены закон и скорость движения этой границы при различных режимах взаимодействия волны с берегом. Полученные результаты аналитического исследования решений использованы для разработки новых аппроксимаций краевых условий на подвижной линии уреза. Приведены результаты численного решения тестовых задач с помощью явной схемы предиктор-корректор второго порядка аппроксимации на адаптивных сетках, отслеживающих положение границы вода—суша.

Ключевые слова: линия уреза, пологий откос, неровное дно, процесс наката и отката волны, уравнения мелкой воды, аналитическое решение, численное моделирование, конечно-разностная схема, адаптивная сетка.

Введение

Для расчета распространения длинных волн в морских акваториях и наката таких волн на берег широкое распространение получили численные методы, основанные на аппроксимации уравнений мелкой воды. При приближении волны к берегу линия уреза начинает смещаться в сторону суши, поэтому решение задачи приходится отыскивать в области с подвижной границей. Кроме того, на само́й линии уреза полная глубина воды обращается в нуль, а число Фруда становится бесконечным, что создает дополнительные трудности при численном моделировании взаимодействия волн с берегом [1]. Вследствие этих обстоятельств для оценки точности различных численных методов решения задач с подвижной линией уреза, а также для корректной постановки на ней краевых условий необходимы аналитические исследования поведения решения в процессах наката и отката волн.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00052, 09-05-00294 и 10-05-91052-НЦНИ).

Аналитические решения системы одномерных нелинейных уравнений мелкой воды, описывающие накат и откат необрушающихся стоячих волн на плоский откос, получены в работе [2]. Предложенный в ней подход получил дальнейшее развитие в статьях [3, 4], в которых учтено влияние начальной формы волны на поведение траектории точки уреза и ее скорости. В [5] выведена аналитическая формула для вычисления максимума вертикального наката уединенной волны на относительно крутой плоский откос, сопряженный с участком горизонтального дна.

В публикациях [6 – 9] установлено, что для относительно крутых плоских откосов максимальные значения высоты наката необрушающихся волн и глубины отката будут одинаковыми для линейной и нелинейной теорий мелкой воды, что позволяет рассчитывать максимальные заплески или откаты с помощью простых инженерных формул линейной теории, хотя, конечно же, эта теория неверно описывает детали течения. В работах [10 – 12] выполнено подробное исследование влияния формы набегающей волны на максимальные значения высоты и скорости наката на плоский откос, глубины и скорости отката.

Реальный береговой склон представляет собой криволинейную поверхность, поэтому взаимодействие волн с таким берегом имеет более сложный характер, чем в случае плоского откоса, и для детального описания процессов наката—отката необходимо использование методов численного моделирования [13]. Самым трудным при этом является моделирование движения линии уреза, что подтверждается, в частности, и тем, что небольшие, казалось бы, модификации разностных краевых условий на линии уреза приводят к значительным изменениям величин заплесков или к неустойчивости счета [14]. Результаты аналитических исследований, выполненных в указанных выше работах, позволяют оценивать зоны затопления, максимальные амплитуды колебаний уровня воды вблизи берега, другие интегральные характеристики и могут служить в качестве тестов для проверки качества численных алгоритмов по глобальным характеристикам (за весь временно́й промежуток взаимодействия волны с берегом). Однако эти результаты не дают (в общем случае криволинейного дна) ответа на вопрос: как, зная положение линии уреза и скорость ее точек на текущем временно́м слое, сделать правильные вычисления этих характеристик на следующем слое. Поэтому необходимы теоретические исследования решения в малом по времени (на интервалах порядка временно́го шага схемы) и исследования локальных свойств решения в окрестности линии уреза (см. работу [15] и библиографию к ней), на основе которых можно было бы конструировать на этой линии корректные численные краевые условия с заданной точностью. Данным вопросам и посвящена настоящая работа. Авторами выполнено аналитическое исследование решений нелинейных уравнений мелкой воды в окрестности границы вода—суша не только для плоского откоса, но и для произвольного рельефа дна и прилегающей суши. Рассмотрены три различных режима взаимодействия волны с берегом: накат необрушающейся волны в общем случае, накат необрушающейся волны в частном случае совпадения в начальный момент времени касательных в точке уреза к свободной границе и рельефу дна и накат с обрушением. Решения поставленных начально-краевых задач построены по методологии [16] в виде локально сходящихся рядов. Получен закон движения точки уреза, и найдены условия и моменты времени, когда один режим течения переходит в другой.

Вторая часть работы посвящена использованию полученных теоретических результатов при постановке разностных краевых условий на подвижной линии уреза. Отметим, что наибольшее распространение для расчета взаимодействия волн с берегом получили конечно-разностные методы сквозного счета, в которых нестационарная область течения с подвижной линией уреза вкладывается в бóльшую область простой формы, например в прямоугольник, содержащий акваторию, линию уреза и прилегающую к берегу часть суши. В этой области с неподвижной границей решаются те же уравнения гидродинамики, что и в исходной области течения, при этом суша либо покрывается тонкой пленкой воды, удерживаемой силой трения, либо заменяется мелкой акваторией с горизонтальным дном, либо в точках суши скорость и полная глубина воды полагаются равными нулю. Для приближенного нахождения положения подвижной линии уреза проводится анализ вычисленных значений полной глубины воды на каждом шаге по времени [15] и линия уреза определяется, например, как граница области, в узлах которой полная глубина равна нулю [17] или не превышает заранее заданной малой величины [18], либо каким-то иным образом.

Есть и другой подход, предложенный в [19], которого мы и придерживаемся в настоящей работе, — счет с выделением линии уреза, т. е. в области с подвижной границей. В этом случае для решения одномерных задач область течения покрывается равномерной подвижной сеткой, один из крайних узлов которой совпадает с подвижной точкой уреза. Дальнейшее развитие данный подход получил в работе [14], где, в частности, указано, что разностные краевые условия в точке уреза следует конструировать на основе аппроксимации уравнения движения, записанного в подвижной системе координат. Во многих работах (см., например, [20]) использовались лагранжевы координаты, “привязанные” к точке уреза, движущейся по плоскому откосу. Общим недостатком этих публикаций является отсутствие описания используемых в точке уреза разностных краевых условий.

В настоящей работе приведены аппроксимации краевых условий на подвижной линии уреза, основанные на результатах аналитического исследования решений в окрестности этой линии. Проведенные расчеты тестовых задач наката волн на берег с использованием явной схемы предиктор-корректор второго порядка аппроксимации на адаптивных неравномерных сетках, отслеживающих положение границы вода—суша [21], показали существенное преимущество предложенных аппроксимаций перед известными используемыми аппроксимациями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоский слой жидкости, ограниченный свободной поверхностью и непроницаемым дном. Предполагается, что жидкость находится в гравитационном поле, является несжимаемой и невязкой. Декартова система координат Oxy выбирается так, что уравнение свободной поверхности покоящейся жидкости имеет вид $y = 0$, при этом $y = -h(x)$ — известная функция, задающая рельеф дна и прилегающей суши. Будем считать, что поверхностные волны являются длинными и распространяются по нормали к прямолинейной береговой линии. При указанных допущениях задача наката волн на берег может решаться [22] в рамках нелинейной модели мелкой воды первого приближения, уравнения которой имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \mathbf{G}, \quad x > x_0(t),\ t > 0. \tag{1}$$

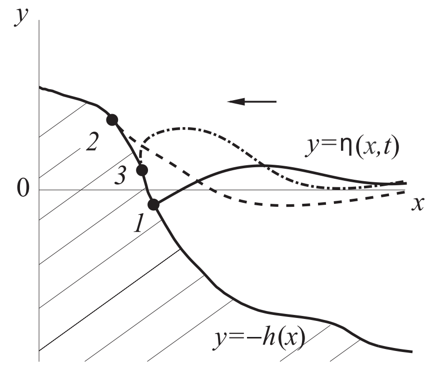


Рис. 1. Свободная граница $y = \eta(x,t)$ и соответствующая ей точка уреза $x_0(t)$ ($\bullet$) при $H_x(x_0(t)) \neq 0$ (*1*), $H_x(x_0(t)) = 0$ (*2*), $H_x(x_0(t)) = \infty$ (*3*)

Здесь

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ Hu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} Hu \\ Hu^2 + gH^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gHh_x \end{pmatrix},$$

t — время; $u(x,t)$ — усредненная по глубине горизонтальная составляющая вектора скорости; $H = \eta + h$ — полная глубина; $\eta(x,t)$ — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня $y = 0$; g — ускорение свободного падения; $x_0(t)$ — подвижная левая граница области решения (подвижная точка уреза).

Уравнения (1) дополняются краевым

$$H(x_0(t), t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

и начальными

$$H(x,0) = H_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \geq x_{00}, \tag{3}$$

условиями, где $x_0(t)$ — искомая координата точки уреза (рис. 1), $x_{00} = x_0(0)$ — положение этой точки в начальный момент времени, при этом предполагается, что волна движется справа налево. В численных расчетах область решения ограничивалась справа достаточно удаленной границей $x = L$, на которой ставились неотражающие граничные условия [21].

Уравнения (1) можно переписать в недивергентной форме

$$\mathbf{u}_t + \mathcal{A}\mathbf{u}_x = \mathbf{G}, \tag{4}$$

где $\mathcal{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}$ — матрица Якоби. Ее собственные значения $\lambda_{1,2}$ вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gH}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gH}. \tag{5}$$

Предполагается, что при $x > x_0(t)$ полная глубина положительна ($H(x,t) > 0$). Тогда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и система уравнений (4) имеет гиперболический тип. В точке уреза $x_0(t)$ собственные значения (5) одинаковы (в силу условия $H(x_0(t),t) = 0$), поэтому линия $x = x_0(t)$ является характеристикой кратности, равной двум [15], аналогично тому, как в задаче об истечении идеального газа в вакуум разделяющая их граница является кратной характеристикой. Отмеченная аналогия позволяет использовать в случае уравнений мелкой воды разработанный ранее [16] метод получения аналитических решений уравнений идеального газа в окрестности границы газ—вакуум.

2. Аналитическое решение уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза

Для системы уравнений (1), переписанной в виде

$$H_t + H_x u + H u_x = 0, \quad u_t + u_x u + g H_x = g f(x), \tag{6}$$

рассмотрим задачу Коши с начальными условиями, заданными в некоторый момент времени $t = t_0$:

$$H(x, t_0) = H_0(x), \quad u(x, t_0) = u_0(x). \tag{7}$$

Здесь $f(x) = h'(x)$. В частном случае плоского откоса, заданного функцией

$$y = -h(x) = -k\left(x - x_{00}\right), \tag{8}$$

где x_{00} — точка уреза в начальный момент времени $t = t_0$, имеем $f(x) = k = \mathrm{const} > 0$.

В зависимости от начальных условий возможны три случая, которые будут исследованы отдельно, а именно: $H_0'(x_{00}) \neq 0$, $H_0'(x_{00}) = 0$ и $H_0'(x_{00}) = \infty$, при этом всегда

$$H_0(x_{00}) = 0. \tag{9}$$

2.1. Случай $H_0'(x_{00}) \neq 0$

Будем предполагать, что функции $u_0(x)$, $H_0(x)$, $f(x)$ являются аналитическими. Тогда по теореме Ковалевской [23] задача (6), (7) имеет единственное аналитическое решение. Представим это решение в виде ряда по степеням $(t - t_0)$

$$\mathbf{q}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(x) \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = (H, u)\,, \tag{10}$$

и найдем его коэффициенты. Из начальных условий (7) получаем, что

$$\mathbf{q}_0(x) = \left(H_0(x), u_0(x)\right),$$

а из уравнений (6) при $t = t_0$ следует, что

$$H_1(x) = -H_0' u_0 - H_0 u_0', \quad u_1(x) = gf - gH_0' - u_0' u_0. \tag{11}$$

Последующее дифференцирование системы (6) по t, подстановка $t = t_0$ и уже найденных коэффициентов ряда (10) дают следующие соотношения:

$$H_2(x) = -H_0' u_1 - H_0 u_1' - H_1' u_0 - H_1 u_0', \quad u_2(x) = -gH_1' - u_0' u_1 - u_1' u_0;$$
$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$
$$H_{k+1}(x) = -\sum_{n=0}^{k} C_k^n (H_n' u_{k-n} + H_n u_{k-n}'), \quad u_{k+1}(x) = -gH_k' - \sum_{n=0}^{k} C_k^n u_n' u_{k-n}. \tag{12}$$

Таким образом, решение задачи Коши (6), (7) построено в виде сходящегося ряда (10). Теперь можно определить закон движения точки уреза и ее скорость. Зная решение (10), перепишем краевое условие

$$H(x_0(t), t) = 0 \tag{13}$$

в виде

$$H_0(x_0(t)) + H_1(x_0(t))(t-t_0) + H_2(x_0(t))\frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots + H_k(x_0(t))\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \dots \equiv 0. \quad (14)$$

Поскольку при исследовании данного случая предполагалось, что $H_0'(x_{00}) \neq 0$, то согласно теореме о неявной функции существует единственная локально-аналитическая функция $x = x_0(t)$, проходящая через точку (x_{00}, t_0). Найдем эту функцию, представив закон движения точки уреза в виде ряда по степеням $(t - t_0)$:

$$x_0(t) = x_{00} + x_{01}(t-t_0) + x_{02}\frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots + x_{0k}\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \dots \quad (15)$$

Чтобы найти коэффициент x_{01} ряда (15), продифференцируем равенство (14) по t:

$$H_0'(x_0(t))x_0'(t) + H_1(x_0(t)) + H_1'(x_0(t))x_0'(t)(t-t_0) + H_2(x_0(t))(t-t_0)+$$

$$+H_2'(x_0(t))x_0'(t)\frac{(t-t_0)^2}{2} + \dots + H_k(x_0(t))\frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} + H_k'(x_0(t))x_0'(t)\frac{(t-t_0)^k}{k!} + \dots = 0, \quad (16)$$

и положим в соотношении (16) $t = t_0$:

$$H_0'(x_{00})x_{01} + H_1(x_{00}) = 0.$$

Из последнего равенства находим

$$x_{01} = -\frac{H_1(x_{00})}{H_0'(x_{00})}. \quad (17)$$

Дифференцируя равенство (16) по t и полагая затем $t = t_0$, получаем коэффициент

$$x_{02} = -\frac{1}{H_0'(x_{00})}\Big[H_2(x_{00}) + 2H_1'(x_{00})x_{01} + H_0''(x_{00})x_{01}^2\Big]. \quad (18)$$

Для нахождения остальных коэффициентов ряда (15) продифференцируем равенство (14) k раз по t ($k > 2$) и положим $t = t_0$. В результате будем иметь

$$x_{03} = -\frac{1}{H_0'(x_{00})}\Big[H_3(x_{00}) + 3\left(H_1'x_{02} + H_2'x_{01}\right) + 3\left(H_0''x_{01}x_{02} + H_1''x_{01}^2 + H_0'''x_{01}^3\right)\Big],$$

$$\dots$$

$$x_{0k} = -\frac{1}{H_0'(x_{00})}\Big[H_k(x_{00}) + F_k\Big]. \quad (19)$$

Здесь F_k — функции, известным образом зависящие от $H_\ell^{(m)}(x_{00})$ и x_{0n}, где $1 \le m \le k$, $0 \le \ell \le k-1$, $1 \le n \le k-1$.

Подставляя построенный ряд (15) в решение (10), получим значение скорости жидкости в точке уреза

$$u\big|_{x=x_0(t)} = u(x_0(t), t) \equiv u^o(t). \quad (20)$$

Для исследования свойств функций (15), (20) введем новую независимую переменную

$$z = x - x_0(t). \quad (21)$$

Тогда во все моменты времени точка уреза будет иметь одну и ту же координату $z = 0$, а система уравнений (6) примет вид

$$H_t + (u - x_{0t}(t))H_z + Hu_z = 0, \quad u_t + (u - x_{0t}(t))u_z + gH_z = gf(z + x_0(t)).$$

Положив в этой системе $z = 0$ и соответственно $H(0,t) = 0$, получим

$$x_{0t} = u^o, \quad x_0(t_0) = x_{00},$$

$$u^o_t + g\left(H_z|_{z=0}\right) = gf(x_0(t)), \quad u^o(t_0) = u_{00}, \tag{22}$$

где $u^o(t) = u(t,z)\big|_{z=0}$, $u_{00} = u_0(x_{00})$.

В силу того что построенные функции (15), (20) определяются единственным образом, они одновременно являются решениями задачи (22). Анализ этой задачи показывает следующее:

1 — зная функции (15), (20), из второго уравнения системы (22) получаем значение выводящей с поверхности уреза производной функции $H(z,t)$:

$$H_z|_{z=0} = f(x_0(t)) - \frac{1}{g}u^o_t; \tag{23}$$

2 — закон движения границы уреза (15) сохраняется до того момента времени $t = t_*$, когда выводящая с поверхности уреза производная функции $H(z,t)$ становится равной бесконечности ($H_z(0,t_*) = \infty$).

2.2. Случай $H_0'(x_{00}) = 0$

Равенство $H_0'(x_{00}) = 0$ означает совпадение в начальный момент времени $t = t_0$ касательных, проведенных к поверхности дна и к поверхности воды в точке уреза (см. рис. 1).

Пусть все производные $H_0^{(l)}(x_{00}) = 0$ при $0 < l < p$, а производная $H_0^{(p)}(x_{00}) \neq 0$. Тогда в системе (6) сделаем вырожденную замену переменных: вместо функции $H(x,t)$ введем функцию $\theta(x,t)$ по формуле $H = \theta^p$. В результате система (6) перепишется в виде

$$\theta_t + \theta_x u + \frac{1}{p}\theta u_x = 0, \quad u_t + u_x u + pg\theta^{p-1}\theta_x = gf(x). \tag{24}$$

Поскольку $H_0^{(l)}(x_{00}) = 0$ для $0 < l < p$, то

$$H_0(x) = (x - x_{00})^p\, H^o(x), \tag{25}$$

причем $H^o(x_{00}) \neq 0$. Тогда $\theta_0(x) = (x - x_{00})\sqrt[p]{H^o(x)}$ и, следовательно, $\theta_0'(x_{00}) \neq 0$.

Введем новую независимую переменную (21), где $x = x_0(t)$ — неизвестный пока закон движения точки уреза. Тогда в переменных z, t система (24) запишется как

$$\theta_t + (u - x_{0t})\theta_z + \frac{1}{p}\theta u_z = 0, \quad u_t + (u - x_{0t})u_z + pg\theta^{p-1}\theta_z = gf(z + x_0), \tag{26}$$

начальные условия будут иметь вид

$$\theta(z,t_0) = \theta_0(z + x_{00}), \quad u(z,t_0) = u_0(z + x_{00}), \tag{27}$$

а краевое условие (13) заменится на условие

$$\theta(z,t)\big|_{z=0} = 0. \tag{28}$$

Полагая в системе (26) $z = 0$ и учитывая (28), получим

$$x_{0t} = u^o, \quad x_0(t_0) = x_{00}, \quad u^o_t = gf(x_0(t)), \quad u^o(t_0) = u_{00}. \tag{29}$$

Очевидно, что задачу (29) можно получить из задачи (22), если в последней положить $H_z|_{z=0} = 0$, что выполняется автоматически для рассматриваемого в данном разделе случая.

Поскольку функция $f(x)$ в окрестности точки $x = x_{00}$ является аналитической, то решения системы (29) будут аналитическими функциями; в частности, для плоского откоса (8) получим решение

$$x_0(t) = \frac{k}{2}g(t-t_0)^2 + u_{00}(t-t_0) + x_{00}, \quad u^o(t) = kg(t-t_0) + u_{00}, \tag{30}$$

которое для t, близких к t_0, при $u_{00} < 0$ описывает накат волны на плоский откос, а при $u_{00} > 0$ — откат.

Зная решение задачи (29), по-другому сформулируем начально-краевую задачу для функций θ, u, задав на границе $z = 0$ известные значения

$$\theta(0,t) = 0, \quad u(0,t) = u^o(t). \tag{31}$$

В результате получим характеристическую задачу Коши (26), (27), (31), для которой справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Существует $t_1 > t_0$ такое, что при $t_0 \le t \le t_1$ в некоторой окрестности границы уреза Γ_0 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (26), (27), (31).*

Доказательство данной теоремы опирается на теорему о существовании единственного аналитического решения характеристической задачи Коши стандартного вида [16, 23]. Задача (26), (27), (31) является характеристической задачей Коши с данными (31) на характеристике кратности, равной двум, поэтому для построения единственного локально-аналитического решения следует задать два дополнительных условия. Ими являются условия (27).

Разложим решение задачи (26), (27), (31) в ряд по степеням z:

$$\mathbf{Q}(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{Q}_k(t)\frac{z^k}{k!}, \quad \mathbf{Q} = (\theta, u)\,, \tag{32}$$

что при малых z возможно в силу аналитичности решения этой задачи в некоторой окрестности линии Γ_0 — границы уреза.

Полагая в системе (26) $z = 0$ и учитывая краевые условия (31), получаем $\theta_0(t) \equiv 0$, $u_0(t) = u^o(t)$. Чтобы найти следующие коэффициенты ряда (32), продифференцируем систему (26) по z и положим $z = 0$. В результате получим системы транспортных уравнений:

$$p = 2: \quad \theta_{1t} + \frac{3}{2}\theta_1 u_1 = 0, \quad u_{1t} + u_1^2 + 2g\theta_1^2 = gf'(x_0(t)), \tag{33}$$

$$p > 2: \quad \theta_{1t} + \frac{p+1}{p}\theta_1 u_1 = 0, \quad u_{1t} + u_1^2 = gf'(x_0(t)). \tag{34}$$

Эти нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений описывают поведение первых выводящих с границы уреза Γ_0 производных $\theta_z|_{z=0}$ и $u_z|_{z=0}$.

Если ввести новую неизвестную функцию

$$y(t) = \exp\int\limits_{t_0}^{t} u_1(\tau)d\tau,$$

то системы уравнений (33), (34) примут вид

$$p = 2: \quad \frac{\theta_{1t}}{\theta_1} = -\frac{3y_t}{2y}, \quad y_{tt} = yg\left[f'(x_0(t)) - 2\theta_1^2\right], \tag{35}$$

$$p > 2: \quad \frac{\theta_{1t}}{\theta_1} = -\frac{(p+1)y_t}{py}, \quad y_{tt} = ygf'(x_0(t)). \tag{36}$$

Решения полученных систем находятся при начальных данных

$$y(t_0) = 1, \quad y_t(t_0) = u_{10} = u_1(t_0), \quad \theta_1(t_0) = \theta_{10}.$$

Решение первого уравнения системы (35) определяется формулой $\theta_1 = \theta_{10}/\sqrt{y^3}$. Подставляя полученное выражение во второе уравнение системы (35), получим одно транспортное уравнение в виде, удобном для численного интегрирования:

$$y_{tt} = yg\left[f'(x_0(t)) - 2\frac{\theta_{10}^2}{y^3}\right].$$

В частном случае плоского откоса (8) полученное транспортное уравнение имеет вид

$$y_{tt} = -2g\frac{\theta_{10}^2}{y^2}$$

и легко интегрируется: сначала определяется

$$y_t = \operatorname{sgn}(u_{10})\sqrt{u_{10}^2 + 4g\theta_{10}^2\left(\frac{1}{y} - 1\right)},$$

а затем решение последнего уравнения записывается в неявном виде

$$\operatorname{sgn}(u_{10})\left[\frac{\sqrt{(a+by)y} - |u_{10}|}{b} + \frac{a}{b\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{a+by} - \sqrt{by}\right)\left(|u_{10}| + \sqrt{b}\right)}{a}\right|\right] = t - t_0,$$

где $a = 4g\theta_{10}^2$, $b = u_{10}^2 - a$. Для плоского откоса транспортное уравнение $y_{tt} = 0$ системы (36) имеет очень простое решение

$$y = 1 + u_{10}(t - t_0).$$

Таким образом определяются первые коэффициенты $\mathbf{Q}_1(t)$ ряда (32). Для построения последующих коэффициентов система (26) дифференцируется k раз по z и в полученные соотношения подставляются $z = 0$ и ранее найденные коэффициенты $\mathbf{Q}_l$ $(l < k)$.

В результате получаются следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$p = 2: \quad \theta_{kt} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\theta_k u_1 + \left(1 + \frac{k}{2}\right)\theta_1 u_k = F_{1k}(t),$$

$$u_{kt} + (k+1)\big[u_1 u_k + 2g\theta_1\theta_k\big] = F_{2k}(t), \tag{37}$$

$$p > 2: \quad \theta_{kt} + \left(k + \frac{1}{p}\right)\theta_k u_1 + \left(1 + \frac{k}{p}\right)\theta_1 u_k = F_{1k}(t),$$

$$u_{kt} + (k+1)u_1 u_k = F_{2k}(t). \tag{38}$$

Ввиду громоздкости выражений для F_{1k}, F_{2k} их конкретный вид здесь не приводится.

Начальные условия для систем (37), (38) однозначно определяются при разложении в ряд по степеням z начальных функций (27).

Системы (37), (38) линейны, поэтому первые особенности их решений совпадают с особенностями решений систем (33), (34). Проведенные ранее [16] исследования решений систем, подобных (33), (34), показали, что в некоторых случаях существует конечный момент времени $t = t_* > t_0$, когда функция $y(t)$ становится равной нулю. В этот момент производные $u_z|_{z=0} = u_1$ и $\theta_z|_{z=0} = \theta_1$ равны бесконечности (рис. 2, *а*). Закон движения границы уреза, определяемый из (29), сохраняется до этого момента $t = t_*$ — момента возникновения бесконечных градиентов на границе уреза.

2.3. Случай $H_0'(x_{00}) = \infty$ — задача об опрокидывании волны

В рассматриваемой задаче возникновение в какой-либо момент времени бесконечных производных $\theta_z|_{z=0}$, $u_z|_{z=0}$ может привести к опрокидыванию волны и, как следствие, к изменению конфигурации течения. Аналогичная ситуация возникает, когда уже в начальный момент времени $t = t_0$ появляется третий случай: $H_0'(x_{00}) = \infty$.

Далее эти обе ситуации рассматриваются в следующем приближении: в начальный момент времени $t = t_0$ функция $H_0(x) = H(x,t)|_{t=t_0}$ в точке $x = x_{00}$ имеет разрыв первого рода от $H = 0$ до $H_{00} = H_0(x_{00}) > 0$, а правее точки $x = x_{00}$ функция $H_0(x)$ предполагается аналитической (рис. 2, *б*). Помимо функции $H_0(x)$ аналитическая функция $u_0(x)$ также считается заданной:

$$u_0(x) = u(x,t)|_{t=t_0}, \quad u_0(x_{00}) = u_{00}$$

с некоторым значением константы u_{00}.

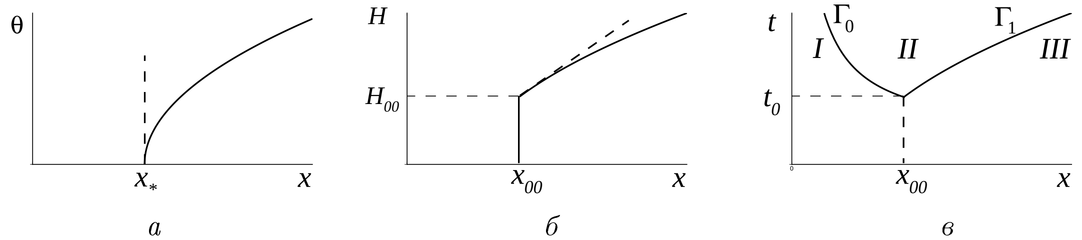


Рис. 2. Профиль функции $\theta(x, t_*)$ с бесконечной производной в точке $x = x_*$ (*а*); задача о распаде специального разрыва при $t = t_0$ (*б*) и конфигурация течения при $t > t_0$ после распада разрыва (*в*)

Поставленная задача называется задачей о распаде специального разрыва [16]. Решение ее моделирует течения, возникающие после опрокидывания волны. Схематично конфигурация течения, возникшего после момента времени $t = t_0$, показана на рис. 2, *в*.

В рассматриваемой задаче в момент $t = t_0$ начинается движение жидкости, определяемое заданными функциями $H_0(x)$, $u_0(x)$ и в дальнейшем называемое невозмущенной волной (область III на рис. 2, *в*). Кроме того, в момент $t = t_0$ в результате опрокидывания волны (в результате распада поставленного разрыва) возникает еще одно течение, граничащее с невозмущенным течением и далее называемое возмущенной волной (область II на рис. 2, *в*). Это другое течение — возмущенная волна — отделено от невозмущенной волны линией Γ_1 — звуковой характеристикой данных течений, на которой имеет место слабый разрыв. С левой стороны возмущенная волна отделена от сухого берега (область I на рис. 2, *в*) линией Γ_0 — границей уреза, где выполняется условие $H(x,t)|_{\Gamma_0} = 0$. Требуется построить невозмущенную и возмущенную волны, а также найти законы движения Γ_1 и Γ_0.

Как уже отмечалось, задача Коши для системы (6) с аналитическими начальными данными в момент времени $t = t_0$ имеет при малых $|t - t_0|$ единственное аналитическое решение, которое можно представить в виде сходящихся рядов по степеням $(t - t_0)$ с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями от x в окрестности точки $x = x_{00}$. При помощи этого решения однозначно определяется [22] функция $x = x_1(t)$, задающая закон движения поверхности слабого разрыва Γ_1 — звуковой характеристики невозмущенной волны, через которую непрерывно стыкуются невозмущенная и возмущенная волны. Также однозначно в виде аналитических функций

$$H|_{x=x_1(t)} = H^0(t), \quad u|_{x=x_1(t)} = u^0(t) \tag{39}$$

определяются значения функций $H(x,t)$, $u(x,t)$ на звуковой характеристике Γ_1. Поэтому далее будут предполагаться известными невозмущенная волна, линия Γ_1 и функции $H^0(t)$, $u^0(t)$.

Для построения возмущенной волны, как и в [16] при построении решения задачи о распаде разрыва, в системе (6) делается следующая замена переменных: за независимые переменные берутся t и H, а за неизвестные функции — x и u. В результате (6) запишется как

$$x_t = u + H u_H, \quad x_H u_t - H(u_H)^2 + g = g x_H f(x). \tag{40}$$

Течение между Γ_1 и Γ_0 (в области возмущенной волны) будем строить как решение системы (40) с данными (39) на характеристике Γ_1. Поскольку Γ_1 — характеристика кратности, равной единице, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [16]. В случае опрокидывания волны этим условием в пространстве переменных (t, H) является условие вертикали [16]

$$x(t,H)\Big|_{t=t_0} = x_{00}. \tag{41}$$

Теорема 2. *Существует $t_1 > 0$ такое, что при $t_0 \le t \le t_1$ в некоторой окрестности Γ_1 имеется единственное локально-аналитическое решение задачи (39)–(41).*

Доказательство теоремы, как и в [16], состоит в сведении ее к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида.

Для выяснения вопроса о том, входит ли поверхность Γ_0 в область применимости этого решения, разложим решение задачи (39)—(41) в ряд по степеням $(t-t_0)$:

$$\mathbf{R}(t,H)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{R}_k(H)\frac{(t-t_0)^k}{k!},\quad \mathbf{R}=\big(x,u\big), \tag{42}$$

что при малых $|t-t_0|$ возможно в силу аналитичности решения задачи о распаде разрыва в некоторой окрестности Γ_1.

В системе (40) положим $t=t_0$ и, учитывая (41), будем иметь

$$x_1(H)=u_0(H)+Hu_0'(H),\quad u_0'(H)=\pm\sqrt{\frac{g}{H}}.$$

После интегрирования второго уравнения полученной системы определяются

$$x_1(H)=u_*\pm 3\sqrt{gH},\quad u_0(H)=u_*\pm 2\sqrt{gH}.$$

Произвольная постоянная u_*, возникшая при интегрировании, находится с помощью второго начального условия из (39) по формуле

$$u_*=u_0(x_{00})\mp 2\sqrt{gH_0(x_{00})}\equiv u_{00}\mp 2\sqrt{gH_{00}}.$$

Далее согласно физическому смыслу задачи в последнем уравнении нужно взять знак минус, а в трех предыдущих — плюс. Ниже (в лемме 2) будет показано, что величина

$$u_*=u_{00}-2\sqrt{gH_{00}} \tag{43}$$

есть начальная скорость границы уреза после распада рассматриваемого разрыва.

Дифференцируя систему (40) по t, полагая $t=t_0$ и учитывая условие (41), имеем

$$x_2(H)=u_1(H)+Hu_1',\quad Hu_1'(H)-\frac{3}{4}u_1(H)=-\frac{3}{4}gf(x_{00}).$$

После интегрирования второго уравнения получим

$$x_2(H)=\frac{7}{4}u_{10}H^{\frac{3}{4}}+gf(x_{00}),\quad u_1(H)=u_{10}H^{\frac{3}{4}}+gf(x_{00}).$$

Дифференцируя систему (40) k раз по t, полагая $t=t_0$ и учитывая условие (41) и ранее полученные выражения для $\mathbf{R}_l(H)$ $(l<k)$, имеем

$$x_{k+1}(H)=u_k(H)+Hu_k'(H),\quad Hu_k'(H)-\frac{3}{4}ku_k(H)=\frac{\sqrt{H}}{2\sqrt{g}}F_{2k}(H).$$

Интегрирование последнего уравнения этой системы приводит к формулам

$$x_{k+1}(H)=\left(1+\frac{3}{4}k\right)H^{\frac{3}{4}k}u_{k0}+F_{1k}(H),$$

$$u_k(H)=H^{\frac{3}{4}k}\left[u_{k0}+\frac{1}{2\sqrt{g}}\int\limits_{t_0}^{t}F_{2k}(H)\sqrt{H}H^{-\frac{3}{4}k-1}dH\right].$$

Здесь F_{1k}, F_{2k} — функции, зависящие от $\mathbf{R}_l(H)$ $(l < k)$; их вид не приводится ввиду громоздкости.

Произвольные постоянные u_{k0}, появившиеся при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений для $u_k(H)$, определяются при помощи условий (39). Для этого $H^0(t)$ подставляем в правые части выражения для $u(t,H)$ из (42), а $u^0(t)$ — в левые части. Раскладывая получившиеся справа и слева функции в ряды по степеням $(t - t_0)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем соотношения, из которых однозначно находятся константы u_{k0}.

Лемма 1. *Коэффициенты рядов (42) при $k > 1$ имеют вид*

$$\mathbf{R}_k(H) = \mathbf{a}_k + \mathbf{P}_k(H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H),$$

где $\mathbf{a}_k$ — постоянные векторы, $\mathbf{P}_k$ — вектор-многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше, чем Ak, $A = \mathrm{const}$. При этом

$$\lim_{H \to 0} \mathbf{P}_k = 0.$$

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству для нормального газа из [16] и проводится индукцией по k. Сначала доказывается, что $F_{2k}(H)$ обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что $\mathbf{R}_k(H)$ обладают указанной структурой.

С помощью леммы 1 установлены следующие свойства рядов (42):

1 — производная по переменной H ряда (42) имеет представление

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t,H)}{\partial H} = \mathbf{S}_0(t, H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H) + \frac{1}{H^{\frac{1}{2}}} \mathbf{S}_1(t, H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H) +$$

$$+ \frac{1}{H^{\frac{1}{4}}} \mathbf{S}_2(t, H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H) + \frac{\ln H}{H^{\frac{1}{4}}} \mathbf{S}_3(t, H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H),$$

где $\mathbf{S}_i$ $(i = 0 \ldots 3)$ — аналитические вектор-функции от перечисленных аргументов и поэтому $\mathbf{S}_i|_{H=0}$ являются аналитическими функциями от t в окрестности точки $t = t_0$;

2 — при $H \to 0$ главная часть производной $\partial \mathbf{R}/\partial H$ имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t,H)}{\partial H} \sim \frac{1}{H^{1/2}} \mathbf{S}_1(t, H, H^{\frac{1}{2}}, H^{\frac{3}{4}}, H^{\frac{3}{4}} \ln H)$$

и поэтому $\partial \mathbf{R}/\partial H \to \infty$ при $H \to 0$;

3 — функции $x(t,H)$, $u(t,H)$ имеют структуру

$$x = x^0(t) + x^1(t,H), \quad u = U^0(t) + U^1(t,H),$$

причем, как уже отмечено в лемме 1,

$$\lim_{H \to 0} x^1(t,H) = 0, \quad \lim_{H \to 0} U^1(t,H) = 0,$$

а функции $x^0(t)$, $U^0(t)$ имеют вид

$$x^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{1,k} \frac{(t-t_0)^k}{k!}, \quad U^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2,k} \frac{(t-t_0)^k}{k!}. \tag{44}$$

Для функций $x^0(t)$, $U^0(t)$ справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Ряды (44) являются решением вспомогательной задачи*

$$x_t = U^0, \quad x(t_0) = x_{00}, \quad U^0_t = gf(x), \quad U^0(t_0) = u_*. \tag{45}$$

Лемма доказывается разложением решения задачи (45) в ряд по степеням $(t - t_0)$ и сравнением полученных рядов с рядами (44). Ряды оказываются равными.

На основании приведенных лемм доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Существует $t_2 > 0$ такое, что при $t_0 \le t \le t_2$ область сходимости рядов (42) покрывает всю область возмущенной волны от Γ_1 до Γ_0 включительно. Закон движения границы уреза Γ_0 определяется из решения задачи (45). Причем на границе уреза $\partial\mathbf{R}/\partial H|_{H=0} = \infty$ во все моменты времени $t > t_0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [16] для нормального газа и проводится по методике, позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной в случае полиноминальной структуры коэффициентов ряда. Поскольку при $t > t_0$ на границе уреза $\partial x/\partial H|_{H=0} = \infty$, то в физическом пространстве это условие переходит в условие $H_x|_{\Gamma_0} = 0$, т. е. *после опрокидывания волны в возмущенной волне на границе уреза всегда реализуется второй случай.*

Заметим, что у задач (29) и (45) совпадают системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если в начальных данных задачи (45) высоту начального разрыва функции H положить равной нулю: $H_{00} = 0$, то начальные условия задач (29) и (45) тоже будут совпадать.

При накате волны на берег $u_{00} < 0$, и поэтому величина u_* — скорость границы уреза в момент распада начального разрыва — отрицательная.

В частном случае плоского откоса решение системы (45) имеет вид

$$x_0(t) = \frac{k}{2}g(t - t_0)^2 + u_*(t - t_0) + x_{00}, \quad U^0(t) = kg(t - t_0) + u_*. \tag{46}$$

Поскольку $k > 0$, то при накате волны на берег в начальные моменты времени после распада разрыва скорость движения границы уреза убывает по модулю. Если бесконечные градиенты на урезе не возникают, то конфигурация течения не будет меняться и в момент времени

$$t_{\text{ост}} = t_0 - \frac{u_*}{kg}$$

точка уреза остановится и начнется откат волны. При этом для плоского откоса (8) величины $y_{\max}$ (максимальная высота заплеска) и $x_{\max}$ (максимальная величина горизонтального продвижения точки уреза на берег) примут значения

$$y_{\max} = \frac{u_*^2}{2g}, \quad x_{\max} = x_{00} - \frac{u_*^2}{2kg}.$$

Таким образом, при $t \ge t_0$ построено решение задачи об опрокидывании волны в момент $t = t_0$. Отметим, что ранее в работе [15] также отмечалось, что при накате бора на плоский откос возникает распад разрыва с образованием возмущенной волны, в которой поверхность воды в точке уреза касается поверхности дна, а точка уреза $x = x_0(t)$ оказывается нечувствительной к другим частям течения в том смысле, что она движется по плоскому откосу как изолированная материальная точка под действием лишь силы тяжести, т. е. согласно параболическому закону движения (46).

Резюмируя вышеизложенное, отметим, что выше в зависимости от начальных условий рассмотрены три различных случая, возникающих при выходе волны на берег. Решения поставленных начально-краевых задач построены в виде рядов, сходящихся в окрестности границы уреза. Закон движения этой границы определяется либо в виде ряда (15), либо в результате решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (29) или (45). Поведение выводящей производной на границе уреза определяет момент времени $t = t_*$, до которого сохраняется непрерывная картина течения и после которого возникает другая конфигурация течения. Значение этой производной определяется либо в виде (23), либо при решении системы транспортных уравнений (33) или (34). Подчеркнем, что проведенные исследования носят локальный характер: все свойства решений установлены в окрестности границы уреза.

3. Расчет наката с использованием аналитического решения в точке уреза

Для расчета наката поверхностных волн на берег использовалась схема предиктор-корректор на адаптивной сетке [24], аппроксимирующая со вторым порядком уравнения (1) и сохраняющая в линейном случае монотонность профилей численного решения. Адаптивная сетка $\left\{x_j^n\right\}$ $(j = 0, \ldots, N)$ строилась методом эквираспределения [21] и имела в отличие от [14] подвижные сгущения в окрестностях вершин и впадин волн либо вблизи точки уреза $x_0(t^n)$, которая совмещалась на каждом временно́м слое $t = t^n$ с самым левым расчетным узлом x_0^n. Такое совмещение позволяло четко отслеживать движение точки уреза даже на грубой сетке (при небольшом числе узлов N).

Для вычисления величин x_0^{n+1}, H_0^{n+1} и u_0^{n+1} на $(n+1)$-м слое по времени необходимо иметь разностные краевые условия в точке уреза. Для вычисления полной глубины будем использовать формулу (13), полагая

$$H_0^{n+1} = 0. \tag{47}$$

Если разностная производная $H_{x,0}^n$ на n-м слое по времени, определенная по формуле

$$H_{x,0}^n = \frac{H_1^n - H_0^n}{x_1^n - x_0^n}, \tag{48}$$

удовлетворяет условию

$$m \le \left|H_{x,0}^n\right| \le M, \tag{49}$$

где $0 < m \ll M$, m, M — заданные числа, то согласно результатам, изложенным в разделе 2.1, для приближенного вычисления нового положения точки уреза можно использовать частичную сумму ряда (15), в качестве которой возьмем следующую:

$$x_0(t) = x_{00} + x_{01}(t - t_0) + x_{02}\frac{(t - t_0)^2}{2}. \tag{50}$$

Учитывая равенства (17), (18), (11, (12), получим

$$x_{01} = u_0(x_{00}), \quad x_{02} = -g\eta_0'(x_{00}), \tag{51}$$

где $\eta_0(x) = H_0(x) - h(x)$. Полагая $t - t_0 = \tau$, где τ — шаг по времени, и используя равенства (51), приходим к разностному аналогу выражения (50)

$$x_0^{n+1} = x_0^n + u_0^n \tau - g\eta_{x,0}^n \frac{\tau^2}{2}. \tag{52}$$

Для определения скорости u_0^{n+1} воспользуемся простейшей аппроксимацией второго уравнения системы (15):

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\tau} = -g\eta_{x,0}^n \equiv -g\frac{\eta_1^n - \eta_0^n}{x_1^n - x_0^n}. \tag{53}$$

При численном решении задачи будем считать, что второй случай ($H_0'(x_{00}) = 0$) реализуется при выполнении условия

$$\left|H_{x,0}^n\right| < m, \tag{54}$$

где m — заданное в (49) малое положительное число. Теперь для вычисления величин x_0^{n+1} и u_0^{n+1} следует воспользоваться аппроксимацией системы (29). Ради простоты примем модифицированную схему Эйлера

$$x_0^{n+1} = x_0^n + \tau u_0^n + \frac{\tau^2}{2} g f\left(x_0^n\right), \quad u_0^{n+1} = u_0^n + \tau g f\left(x_0^n\right) + \frac{\tau^2}{2} g u_0^n f'\left(x_0^n\right), \tag{55}$$

которая для плоского откоса (8) дает точное решение (30).

В качестве критерия возникновения третьего случая — обрушения волны — будем использовать неравенство

$$\left|H_{x,0}^n\right| > M, \tag{56}$$

где M — заданное в (49) достаточно большое положительное число. Расчет значений x_0^{n+1} и u_0^{n+1} проводится теперь с помощью разностной схемы, аналогичной (55) и аппроксимирующей систему (45):

$$x_0^{n+1} = x_0^n + \tau u_* + \frac{\tau^2}{2} g f\left(x_0^n\right), \quad u_0^{n+1} = u_* + \tau g f\left(x_0^n\right) + \frac{\tau^2}{2} g u_* f'\left(x_0^n\right), \tag{57}$$

при этом для вычисления u_* по формуле (43) используем значения $u_{00} = u_1^n$ и $H_{00} = H_1^n$ за “скачком” (в первом, соседнем с урезом, узле сетки) , т. е.

$$u_* = u_1^n - 2\sqrt{gH_1^n}. \tag{58}$$

Отметим, что для плоского откоса (8) формулы (57) точно описывают аналитическое решение (46).

3.1. Движение волны понижения по сухому горизонтальному руслу

Предполагается, что справа от плотины, расположенной в точке с координатой x_d, полная глубина слоя покоящейся жидкости равна H_1, а слева воды нет. После разрушения плотины образуется волна понижения, ограниченная слева подвижной точкой контакта $x = x_0(t)$ с сухим дном, а справа — подвижной точкой сопряжения $x = x_1(t)$ с покоящейся жидкостью. Возьмем эту волну понижения в некоторый момент времени t_b в качестве начальных данных для уравнений (1). Тогда точное решение задачи (1)—(3) при $t \geq 0$ имеет следующий вид:

$$H(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0(t), \\ \dfrac{1}{9}\left(2\sqrt{H_1} + \dfrac{x - x_d}{t + t_b}\right)^2 & \text{при} \quad x_0(t) \leqslant x \leqslant x_1(t), \\ H_1 & \text{при} \quad x_1(t) \leqslant x \leqslant L, \end{cases} \tag{59}$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < x_0(t), \\ -\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{H_1} - \dfrac{x - x_d}{t + t_b}\right) & \text{при} \quad x_0(t) \leqslant x \leqslant x_1(t), \\ 0 & \text{при} \quad x_1(t) \leqslant x \leqslant L, \end{cases} \tag{60}$$

где L — длина области решения, принято $g = 1$ и

$$x_0(t) = x_d - 2\sqrt{H_1}(t + t_b) \quad (\Gamma_0)\,, \tag{61}$$

$$x_1(t) = x_d + \sqrt{H_1}(t + t_b) \quad (\Gamma_1)\,. \tag{62}$$

Эта задача интересна тем, что подвижная точка контакта сухое дно—вода (далее "точка уреза") аналогична подвижной точке уреза при набегании волн на наклонный берег, поэтому задача может служить в качестве тестовой для апробации алгоритмов расчета граничных значений на Γ_0. Конфигурация течения аналогична изображенной на рис. 2 *в*: слева от границы уреза Γ_0 располагается сухое дно, между Γ_0 и звуковой характеристикой Γ_1 — возмущенная волна (волна понижения) со сверхкритическим течением в подобласти $x_0(t) \leq x < x_d$, справа от Γ_1 — невозмущенная волна (в данном примере — покоящаяся жидкость с постоянной глубиной H_1).

Рассматриваемая задача относится ко второму случаю ($H_0'(x_{00}) = 0$), поскольку в начальный момент времени полная глубина в окрестности границы Γ_0 описывается функцией вида (25) с показателем $p = 2$:

$$H_0(x) = (x - x_{00})^2\, H^o(x),$$

где $x_{00} = x_d - 2t_b\sqrt{H_1}$, $H^o(x) = (3t_b)^{-2}$. Отметим, что для точного решения равенство $H_x'(x_0(t), t) = 0$ выполняется при всех $t \geq 0$, однако для разностной производной (48) это равенство нарушается, поэтому в процессе расчета проводился анализ всех критериев (49), (54), (56).

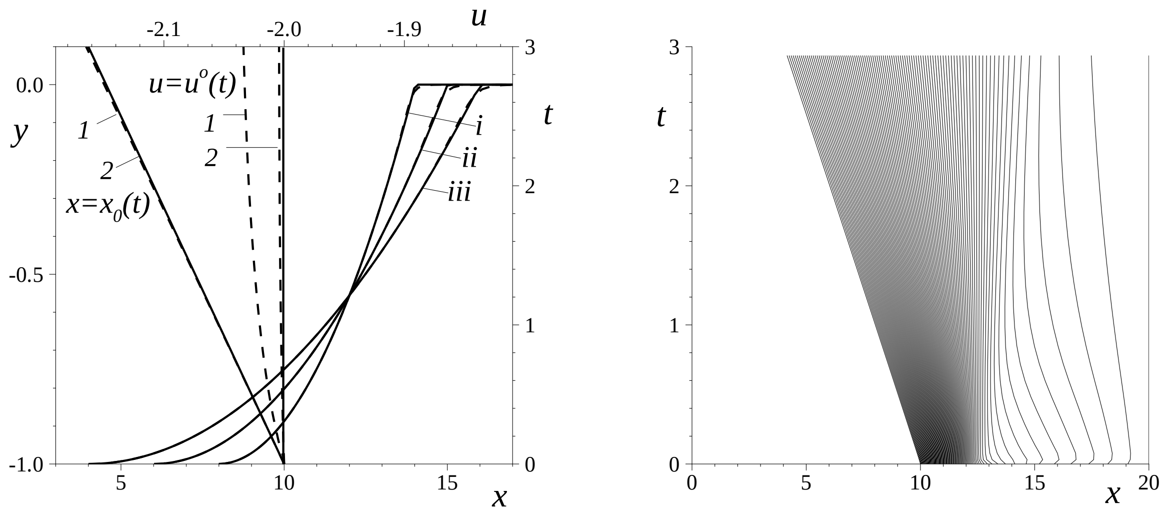
Представленные на рис. 3 результаты получены при заданных $m = 10^{-3}$, $M = 10$ и следующих значениях входных параметров:

$$H_1 = 1, \quad t_b = 1, \quad x_d = 12, \quad L = 20, \quad h(x) \equiv 1.$$

Как видно из рис. 3, *а*, в окрестности "точки уреза" расчетный и теоретический профили свободной границы визуально неразличимы. Причиной столь высокой точности является как использование разностных краевых условий в "точке уреза", выведенных на основе аналитического исследования решений, так и применение адаптивных сеток, имеющих сильное сгущение около границы Γ_0 (см. рис. 3, *б*, на котором изображены траектории узлов адаптивной сетки, построенной согласно управляющей функции

$$w = 1 + \alpha|\eta|, \tag{63}$$

где $\alpha > 0$).



а *б*

Рис. 3. Движение волны понижения по сухому руслу: *а* — графики точного (сплошные линии) и численного (штрих) решений: свободная поверхность $y = \eta(x, T)$ в моменты времени $T = 1$ (*i*), 2 (*ii*) и 3 (*iii*); траектория $x = x_0(t)$ "точки уреза" и ее скорость $u = u^o(t)$ при $N = 100$ (*1*) *и* 800 (*2*); *б* — траектории узлов адаптивной сетки при $N = 400$, $\alpha = 40$

Во многих работах (см., например, [25]) отмечается, что профиль полной глубины при численном решении подобных тестовых задач с подвижной "точкой уреза" обычно передается неплохо, однако для скорости наблюдаются значительные погрешности. Применяемый в настоящей работе метод адаптивных сеток дает для скорости движения "точки уреза" визуально неразличимые с точным решением графики (в рассматриваемой задаче $u^o(t) \equiv -2$). Чтобы эти графики различались, были проведены расчеты на подвижных равномерных сетках ($w \equiv 1$). Из рис. 3, *а* видно, что на равномерных сетках погрешность вычисления $x_0(t)$ и $u^o(t)$ становится заметной, однако при измельчении сетки она уменьшается. Более того, для выбранного значения $m = 10^{-3}$ погрешность расчета этих величин исчезает не только на адаптивных, но даже и на равномерных сетках, если для последних взять $N > 1200$. Это объясняется тем, что на таких мелких сетках всегда выполняется критерий (54) и формулы (55), которые для исследуемой задачи принимают вид

$$x_0^{n+1} = x_0^n + \tau u_0^n; \quad u_0^{n+1} = u_0^n,$$

точно передают положение (61) и скорость $u^o(t)$ подвижной "точки уреза" $x_0(t)$. При использовании адаптивной сетки, сгущающейся к точке уреза, этот же результат получается на меньшем количестве узлов. Отметим, что такая точность никогда не достигалась для применяемых ранее аппроксимаций краевых условий в точке уреза [21].

3.2. Накат одиночной волны на плоский откос

Рассматривается задача о набегании волн на плоский откос, сопрягающийся с горизонтальным дном глубины 1. Рельеф дна и прилегающей суши описывается функцией

$$y = -h(x) = \begin{cases} 0.5 - x \tan\theta & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_s, \\ -1 & \text{при} \quad x_s \leqslant x \leqslant L, \end{cases}$$

где θ — угол наклона откоса, $x_s = 1.5\cot\theta$ — абсцисса основания склона. В начальный момент времени точка уреза имела координату $x_{00} = 0.5\cot\theta$.

Имеются вполне удовлетворительные численные методы расчета взаимодействия поверхностных волн с относительно крутыми откосами (например, $\theta \geq 20^\circ$ в [20]). Для малых углов θ численное моделирование осложняется из-за возможного обрушения волны в процессе наката или при появлении опрокидывающегося бора в фазе отката [15], причем при малых θ возникновение разрывов в решении возможно даже для очень малых амплитуд набегающей волны [7, 8]. Однако численное моделирование даже необрушающихся волн на пологих откосах представляет собой непростую задачу [18] из-за сложности счета в протяженной области малых значений полной глубины и сверхкритичного режима течения в окрестности точки уреза. В настоящей работе максимальные значения вертикального заплеска в расчетах полностью совпали с теоретическими значениями, приведенными в работе [5] для уединенной волны с амплитудой A из диапазона от 0.005 до 0.01 и малого угла наклона откоса ($\cot\theta = 19.85$). Этот интересный факт можно интерпретировать как косвенное подтверждение эквивалентности решений, полученных разными путями и представленных в разной форме в настоящей работе и в [5].

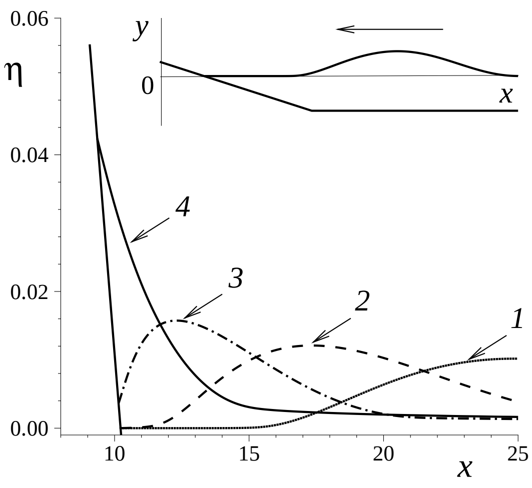
Расчеты выполнялись также для одиночных волн другой формы. Приведем, например, результаты расчетов наката одиночной волны, которая в начальный момент времени задавалась формулами

$$\eta(x,t)\Big|_{t=0} = \eta_0(x), \quad u(x,t)\Big|_{t=0} = u_0(x) \equiv -\frac{\eta_0(x)}{1+\eta_0(x)}\sqrt{1+A}, \tag{64}$$

где

$$\eta_0(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{2}\left(1+\cos\big(\dfrac{2\pi(x-x_w)}{\lambda}\big)\right), & |x-x_w| \leq \lambda/2, \\ 0, & |x-x_w| > \lambda/2, \end{cases}$$

λ — длина волны, x_w — абсцисса ее вершины при $t = 0$.



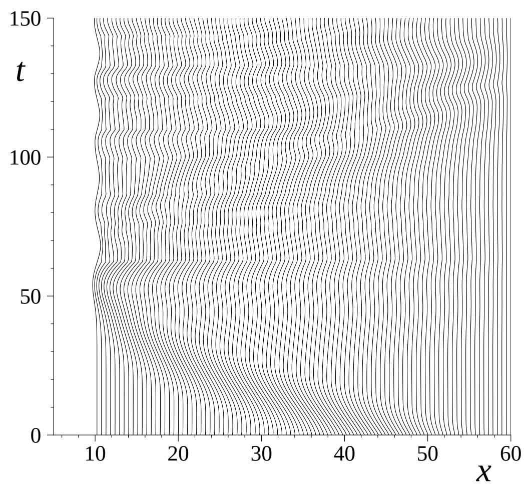
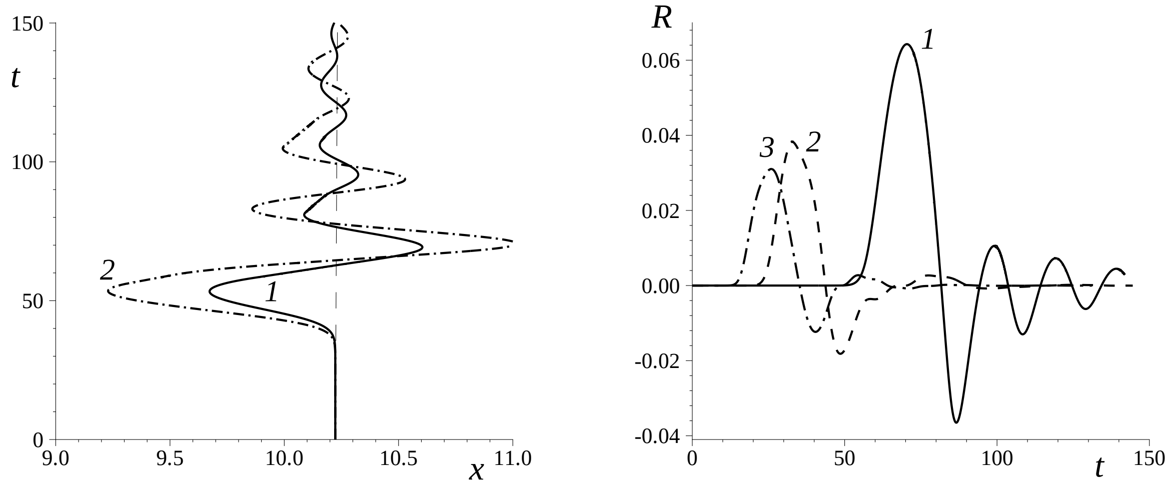


Рис. 4. Накат одиночной волны на пологий плоский откос ($\theta = 2.8^\circ$): *а* — профили свободной границы $y = \eta(x,t)$ в моменты времени $t = 20$ (*1*), 30 (*2*), 40 (*3*) и 50 (*4*); *б* — траектории узлов адаптивной сетки при $N = 400$, $\alpha = 6$



а *б*

Рис. 5. Поведение точки уреза: *а* — горизонтальное смещение точки уреза при $\theta = 2.8°$: $A = 0.005$ (*1*), 0.009 (*2*); *б* — вертикальное смещение точки уреза при $A = 0.01$: $\theta = 2°$ (*1*), $5°$ (*2*), $8°$ (*3*)

Представленные на рис. 4 и 5 результаты расчетов получены при следующих значениях параметров: $\lambda = 30$, $x_w = x_s + \lambda/2$, $L = x_s + \lambda$. Как следует из 4, *а* (см. с. 37), в процессе взаимодействия волны с берегом может реализоваться любой из трех режимов: (49), (54) или (56). В описываемых расчетах переключение режимов осуществлялось по пороговым значениям $m = 10^{-5}$ и $M = 1$, а подвижная сетка строилась на основе управляющей функции (63), адаптируясь к форме волны и к подвижной точке уреза (рис. 4, *б*).

Интересной особенностью взаимодействия одиночной волны с пологим откосом является колебательный характер процесса наката—отката (рис. 5, *а*). При этом низкочастотные колебания точки уреза не связаны с отражением волн от правой границы $x = L$: она пропускает движущиеся вправо волны практически без отражения. С численными эффектами колебания также не связаны, поскольку схема [24] свободна от "паразитических" осцилляций. Причина их возникновения, видимо, в особом режиме взаимодействия набегающей волны с очень пологим склоном. На возможность длительных низкочастотных колебаний точки уреза при набегании одиночной волны на очень пологий берег указано в работе [26], но изучено это явление пока недостаточно. Отметим, что с увеличением крутизны плоского откоса колебательный характер движения точки уреза практически исчезает. Это следует из рис. 5, *б*, на котором изображены графики функции $R(t) = \eta(x_0(t), t)$ при разных углах наклона θ. Видно, что при $\theta = 8°$ процесс взаимодействия одиночной волны с плоским откосом сводится к простому накату и откату, после которого точка уреза быстро возвращается в свое первоначальное положение x_{00} и остается там до конца расчета.

3.3. Результаты численного моделирования наката одиночной волны на неровный модельный откос

Для исследования влияния неровности рельефа дна и прилегающей суши на процессы наката—отката был выбран модельный рельеф с ненулевой кривизной, заданный

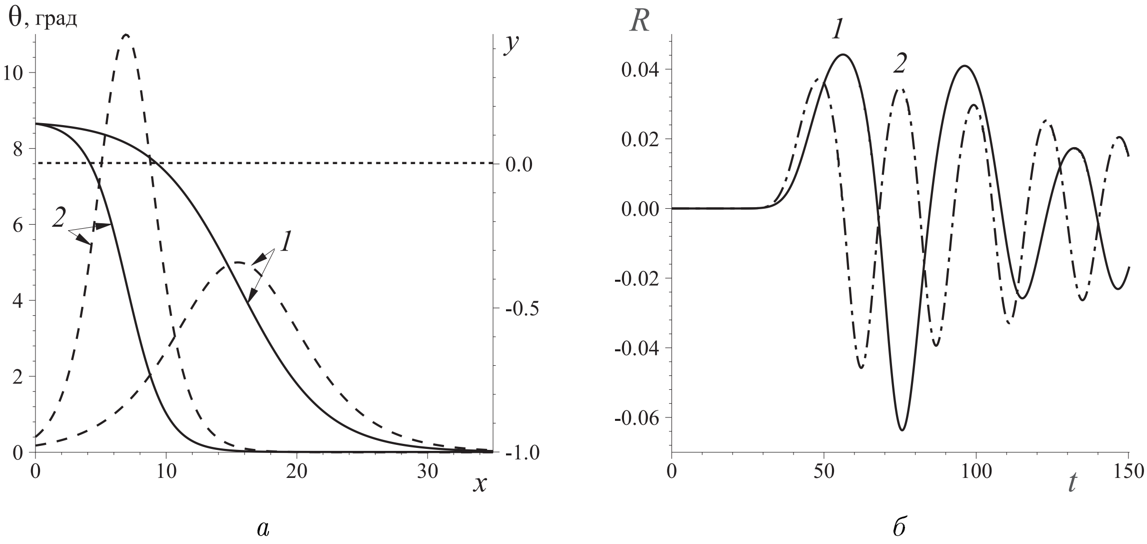


Рис. 6. Накат одиночной волны с амплитудой $A = 0.01$ на неровный откос при $\theta_0 = 5^\circ$ (*1*) и 11° (*2*): *а* — профили дна $y = -h(x)$ (сплошные линии) и локальные углы наклона дна $\theta = \theta(x)$ (штрих); *б* — вертикальное смещение $R(t)$ точки уреза

с помощью гладкой монотонно убывающей функции

$$y = -h(x) = \frac{h_+ + h_-}{2} + \frac{h_+ - h_-}{2} \tanh\left[c(x - \xi)\right], \tag{65}$$

где $h_+ < 0$ — глубина дна в правой бесконечно удаленной точке, $h_- > 0$ — высота суши в левой бесконечно удаленной точке,

$$c = \frac{2\tan\theta_0}{h_- - h_+}, \quad \xi = \frac{1}{2c}\ln\frac{h_0 - h_+}{h_- - h_0},$$

θ_0 — максимальный угол наклона неровного склона, который достигается в точке перегиба ξ, h_0 — высота суши в точке $x = 0$ ($0 < h_0 < h_-$). Согласно уравнению (65) в начальный момент времени точка уреза имеет координату

$$x_{00} = \xi - \frac{1}{2c}\ln\left(-\frac{h_+}{h_-}\right),$$

при этом $0 < x_{00} < \xi$.

В расчетах использовались следующие значения параметров: $h_+ = -1$, $h_- = 0.15$, $h_0 = 0.14$, длина области $L = 60$. На рис. 6, *а* модельный профиль для двух значений угла θ_0 изображен сплошной линией, пунктиром приведено положение невозмущенной свободной границы. Видно, что при $\theta_0 = 5^\circ$ локальные углы наклона профиля в окрестности начальной точки уреза не превышают 2.5°. Начальное возмущение задавалось в виде одиночной волны (64), при этом полагалось $x_w = 0.75L$, $\lambda = 30$. Параметры разностной схемы брались такими же, как в предыдущей задаче.

На рис. 6, *б* приведены графики вертикального смещения точки уреза для двух значений угла θ_0. Видно, что на неровном склоне колебательный характер движения точки уреза также имеет место. Как и для плоского откоса, максимальная амплитуда колебаний уменьшается при возрастании θ_0. Однако на неровном склоне в отличие от ровного колебания точки уреза наблюдаются и для больших углов θ_0, при этом рост θ_0 ведет к увеличению частоты колебаний.

Заключение

В работе выполнено аналитическое исследование решений нелинейных уравнений мелкой воды в окрестности границы вода—суша, описывающих процессы наката и отката волн на криволинейный склон. Рассмотрено несколько режимов взаимодействия волны с берегом и для каждого из них с использованием методологии [16] выписано решение в виде локально сходящихся рядов. Разработаны новые аппроксимации краевых условий в подвижной точке уреза, существенно использующие полученный аналитически закон движения этой точки. На тестовых примерах показано, что применение предложенных аппроксимаций позволяет рассчитывать на длительные времена процессы наката и отката волн как на плоские, так и на криволинейные откосы. Авторы считают, что методология [16] позволит в дальнейшем выполнить обобщение полученных результатов на случай движения криволинейной линии уреза при накате волн, распространяющихся над пространственно неоднородным рельефом дна.

Список литературы

[1] Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 272 с.

[2] Carrier G.F., Greenspan H.P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4, No. 1. P. 97–109.

[3] Carrier G.F., Wu T.T., Yeh H. Tsunami run-up and draw-down on a plane beach // Ibid. 2003. Vol. 475. P. 79–99.

[4] Kanoglu U. Nonlinear evolution and runup-rundown of long waves over a sloping beach // Ibid. 2004. Vol. 513. P. 363–372.

[5] Synolakis C.E. The runup of solitary waves // Ibid. 1987. Vol. 185. P. 523–545.

[6] Мазова Р.Х., Пелиновский Е.Н. Линейная теория наката волн цунами на берег // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1982. Т. 18, № 2. С. 166–171.

[7] Кайстренко В.М., Пелиновский Е.Н., Симонов К.В. Накат и трансформация волн цунами на мелководье // Метеорология и гидрология. 1985. № 10. С. 68–75.

[8] Pelinovsky E.N., Mazova R.Kh. Exact analytical solutions of nonlinear problems of tsunami wave run-up on slopes with different profiles // Natural Hazards. 1992. Vol. 6, No. 3. P. 227–249.

[9] Synolakis C.E. Tsunami runup on steep slopes: How good linear theory really is // Ibid. 1991. Vol. 4, No. 2–3. P. 221–234.

[10] Диденкулова И.И., Заибо Н., Куркин А.А. и др. Накат нелинейно деформированных волн на берег // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 5. С. 676–678.

[11] Диденкулова И.И., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Накат одиночных волн различной формы на берег // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43, № 3. С. 419–425.

[12] Диденкулова И.И., Пелиновский Е.Н. Накат длинных волн на берег: Влияние формы подходящей волны // Океанология. 2008. Т. 48, № 1. С. 5–10.

[13] Yeh H., Liu P., Synolakis C.E. Long-wave Runup Models. Singapore: World Sci. Publ., 1996. 403 p.

[14] Лятхер В.М., Милитеев А.Н. Расчет наката длинных гравитационных волн на откос // Океанология. 1974. Т. 14, № 1. С. 37–42.

[15] Hibberd S., Peregrine D.H. Surf and runup on a beach: A uniform bore // J. Fluid Mech. 1979. Vol. 95, pt 2. P. 323–345.

[16] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.

[17] Федотова З.И. Обоснование численного метода для моделирования наката длинных волн на берег // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 5. С. 58–76.

[18] Kobayashi N., DeSilva G.S., Watson K.D. Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slopes // J. Geophys. Res. 1989. Vol. 94, No. C1. P. 951–966.

[19] Судобичер В.Г., Шугрин С.М. Движение потока воды по сухому руслу // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1968. Т. 13, вып. 3. С. 116–122.

[20] Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 135. P. 283–299.

[21] Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г.С. Хакимзянов, Ю.И. Шокин, В.Б. Барахнин, Н.Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.

[22] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

[23] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

[24] Шокин Ю.И., Хакимзянов Г.С. Схема предиктор-корректор, сохраняющая гидравлический скачок // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11. Спец. выпуск, посвященный 85-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. Ч. 2. С. 92–99.

[25] Vincent S., Caltagirone J.-P. Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme // J. Hydraulic Res. 2001. Vol. 39, No 1. P. 41–49.

[26] Synolakis C.E., Bernard E.N., Titov V.V. et al. Validation and verification of tsunami numerical models // Pure and Appl. Geophis. 2008. Vol. 165. P. 2197–2228.

Поступила в редакцию 10 сентября 2010 г.