

Применение метода конечных элементов для построения адаптивных сеток*

И. А. ВАСЕВА, В. Д. ЛИСЕЙКИН

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: vaseva.irina@gmail.com

Рассмотрены новые аспекты метода построения адаптивных сеток, основанного на решении обращенных уравнений Бельтрами и диффузии относительно управляющей метрики. Для численного решения уравнений используется метод конечных элементов, что позволяет строить сетки в областях со сложной геометрией границы. Представлены примеры двумерных структурированных адаптивных сеток, построенных с помощью предложенного метода.

Ключевые слова: адаптивные сетки, метод конечных элементов, уравнения Бельтрами, уравнения диффузии.

1. Метод отображений и управляющая метрика

Метод отображений формулируется для произвольной n -мерной физической геометрии $S^{xn} \subset \mathbf{R}^{n+k}$. Для построения сеток в двумерных областях и на поверхностях ($n = 2$, $k = 1$) физическая геометрия S^{x2} задается при помощи параметризации

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}) : S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad \mathbf{s} = (s^1, s^2), \quad (1)$$

где S^2 — параметрическая область, $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ — вектор-функция, дважды дифференцируемая в каждой точке $\mathbf{s} \in S^2$ (рис. 1).

Согласно методу отображений сетка в физической геометрии S^{x2} строится при помощи промежуточного невырожденного преобразования

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) : \Xi^2 \rightarrow S^2, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2) \quad (2)$$

между параметрической областью S^2 и соответствующей вычислительной областью Ξ^2 (см. рис. 1), которая имеет более простую форму, чем параметрическая. При этом узлы сетки в S^{x2} определяются отображением эталонной сетки, заданной в Ξ^2 , при помощи преобразования

$$\mathbf{x}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] : \Xi^2 \rightarrow S^{x2} \subset \mathbf{R}^3. \quad (3)$$

Переменные ξ^1, ξ^2 области Ξ^2 называются сеточными координатами, а величины s^1, s^2 в (1) — параметрическими координатами. В дальнейшем будем предполагать, что s^1, s^2 — декартовы координаты в S^2 .

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00335-а) и Проекта фундаментальных исследований объединенного ученого совета по математике и механике СО РАН (№ 94).

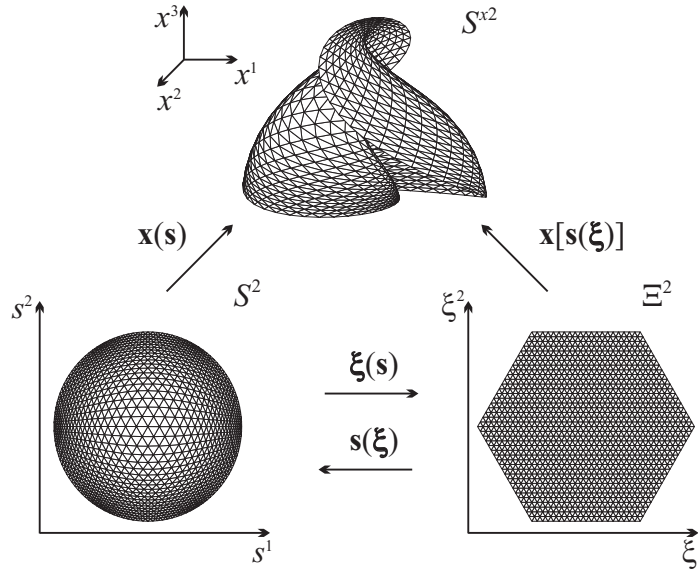


Рис. 1. Схема метода отображений

Обозначим через g_{ij}^{xs} (g_{sx}^{ij}) ковариантные (контравариантные) элементы физической геометрии S^{x2} в координатах s^1, s^2 . Тогда параметризация (1) дает формулу для элементов ковариантного метрического тензора физической геометрии S^{x2} в координатах s^1, s^2 :

$$g_{ij}^{xs} = \mathbf{x}_{s^i} \cdot \mathbf{x}_{s^j}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4)$$

Для построения адаптивных сеток в физической геометрии S^{x2} вводится управляющая метрика, ковариантные (контравариантные) элементы которой обозначаются g_{ij}^s (g_s^{ij}) в параметрических координатах s^1, s^2 и g_{ij}^ξ (g_ξ^{ij}) в сеточных координатах ξ^1, ξ^2 .

Наиболее общая формулировка управляющей метрики в физической геометрии S^{x2} имеет следующий вид [1]:

$$g_{ij}^s = z(\mathbf{s})g_{ij}^{xs} + F_i^k(\mathbf{s})F_j^k(\mathbf{s}), \quad i, j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, l, \quad (5)$$

где $z(\mathbf{s}) \geq 0$ — весовая функция, $F_i^k(\mathbf{s})$ — компоненты некоторого ковариантного вектора $\mathbf{F}^k(\mathbf{s})$.

Здесь и далее в выражениях, имеющих одинаковые индексы и не включающих знаки $\ll + \gg$, $\ll - \gg$ и $\ll = \gg$, считается, что по этим индексам проведено суммирование.

2. Сеточные уравнения

Для построения сетки в S^{x2} необходимо найти значения преобразования $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$ (2) в узлах эталонной сетки, заданной в вычислительной области Ξ^2 . Затем полученные значения нужно отобразить из области S^2 в S^{x2} при помощи параметризации (1). Для нахождения дискретного преобразования $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$ численно решается задача Дирихле для обращенных уравнений диффузии [1]:

$$a^{ij} \frac{\partial^2 s^l}{\partial \xi^i \partial \xi^j} = P^l, \quad i, j, l = 1, 2,$$

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) \Big|_{\partial \Xi^2} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}), \quad (6)$$

где

$$a^{ij} = J^2 g_{\boldsymbol{\xi}}^{ij} = (-1)^{i+j+p+q} g_s^{pq} \frac{\partial s^{3-p}}{\partial \xi^{3-i}} \frac{\partial s^{3-q}}{\partial \xi^{3-j}},$$

$$P^l = (-1)^{m+k} \frac{J}{w(\mathbf{s})} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left(w(\mathbf{s}) g_s^{kl} \right) \frac{\partial s^{3-k}}{\partial \xi^{3-m}}, \quad (7)$$

$$i, j, k, l, m, p, q = 1, 2,$$

J — якобиан преобразования $\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})$, $w(\mathbf{s}) > 0$ — весовая функция (можно положить $w(\mathbf{s}) = 1$), $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\xi}) : \partial \Xi^2 \rightarrow \partial S^2$ задает отображение границы вычислительной области Ξ^2 на границу параметрической области S^2 .

Если в формулах (2) положить $w(\mathbf{s}) = \sqrt{g^s}$, то уравнения (6) становятся эквивалентными обращенным уравнениям Бельтрами (g^s — определитель матрицы g_{ij}^s).

Для нахождения численного решения краевая задача (6) заменяется на нестационарную краевую задачу относительно функций $s^l(\boldsymbol{\xi}, t)$, $l = 1, 2$:

$$\frac{\partial s^l}{\partial t} = a^{ij} \frac{\partial^2 s^l}{\partial \xi^i \partial \xi^j} - P^l,$$

$$s^l(\boldsymbol{\xi}, t) = \psi^l(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \partial \Xi^2, \quad t > 0,$$

$$s^l(\boldsymbol{\xi}, 0) = s_0^l(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Xi^2, \quad (8)$$

$$i, j, k, l = 1, 2,$$

где $s_0^l(\boldsymbol{\xi})$ — l -я компонента начального преобразования

$$\mathbf{s}_0(\boldsymbol{\xi}) : \Xi^2 \rightarrow S^2, \quad \mathbf{s}_0(\boldsymbol{\xi}) = [s_0^1(\boldsymbol{\xi}), s_0^2(\boldsymbol{\xi})],$$

задаваемого пользователем.

В случае, когда левая часть системы (6) является эллиптическим оператором, решение задачи (8) сходится к решению (6) при $t \rightarrow \infty$ [2].

3. Метод конечных элементов

Рассмотрим метод конечных элементов применительно к задаче (8). Согласно методу Фаэдо—Галеркина для нестационарных задач [3, 4] введем в вычислительной области Ξ^2 N -мерное подпространство пробных функций V^h , где N — число внутренних узлов эталонной сетки в Ξ^2 . Необходимо найти функцию $u(\boldsymbol{\xi}, t)$, принадлежащую при каждом $t > 0$ подпространству V^h и удовлетворяющую при всех $v^h \in V^h$ уравнению

$$\int_{\Xi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} v^h - a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^i \partial \xi^j} v^h + P^l v^h \right) d\boldsymbol{\xi} = 0, \quad (9)$$

которое является дискретизацией слабой формы для уравнений (8), а решение $u \in V^h$ уравнения (9) есть приближение к решению s^l , $l = 1, 2$, уравнений (8).

Чтобы записать полученную задачу в операторной форме, выберем в пространстве пробных функций V^h базис $\varphi_1, \dots, \varphi_N$

$$\varphi_p(\boldsymbol{\xi}_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = p, \\ 0, & \text{если } k \neq p, \end{cases} \quad (10)$$

где $\varphi_p(\boldsymbol{\xi}_k)$ — значение функции φ_p в k -м узле эталонной сетки $\boldsymbol{\xi}_k = (\xi_k^1, \xi_k^2)$. В данной работе в качестве базисных функций использовались финитные кусочно-линейные функции.

Тогда можно разложить функцию $u(\boldsymbol{\xi}, t)$ по базису

$$u(\boldsymbol{\xi}, t) = u^\Gamma + u_k \varphi_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

где u^Γ — значения функции $u(\boldsymbol{\xi}, t)$ на границе вычислительной области $\partial\Xi^2$. Для задания граничных значений u^Γ введем на $\partial\Xi^2$ дополнительный набор функций ϕ_q аналогично (10). В этом случае имеем

$$u^\Gamma = u_q^\Gamma \phi_q, \quad q = N + 1, \dots, N^\Gamma, \quad (11)$$

где N^Γ — количество внутренних и граничных узлов сетки.

Подставляя в (9) базисные функции φ_m и интегрируя по частям, получаем без учета граничных условий систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} \int_{\Xi^2} \varphi_k \varphi_m d\boldsymbol{\xi} &= -u_k \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (a^{ij} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^j} d\boldsymbol{\xi} - \int_{\Xi^2} P^l \varphi_m d\boldsymbol{\xi}, \\ k, m &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

или в матричном виде

$$M \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = K \mathbf{u} - \mathbf{F}, \quad (13)$$

где M — матрица масс, K — матрица жесткости, \mathbf{F} — вектор нагрузки определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_{mk} &= \int_{\Xi^2} \varphi_k \varphi_m d\boldsymbol{\xi}, \\ K_{mk} &= - \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (a^{ij} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^j} d\boldsymbol{\xi}, \\ F_m &= \int_{\Xi^2} P^l \varphi_m d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом граничных условий уравнение (13) записывается в следующем виде:

$$\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_N}{\partial t} \\ u_{N+1}^\Gamma \\ \vdots \\ u_N^\Gamma \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} K & K_\Gamma \\ \hline 0 & E \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_N \\ u_{N+1}^\Gamma \\ \vdots \\ u_N^\Gamma \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{array} \right), \quad (15)$$

где $K_\Gamma = K$ при условии замены φ_k на ϕ_k при $k > N$ (11).

4. Численный алгоритм

Для численного решения системы уравнений (15) предлагается использовать аналог схемы стабилизирующей поправки. Для этого представим матрицу жесткости K в виде суммы $K = K^{11} + K^{12} + K^{22}$, где K^{11} , K^{12} и K^{22} соответствуют слагаемым исходного уравнения (9), содержащим производные $\frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^1}$, $\frac{\partial^2}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial \xi^2 \partial \xi^2}$. А именно:

$$\begin{aligned} K_{mk}^{11} &= - \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (a^{11} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^1} d\xi, \\ K_{mk}^{12} &= - \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} (a^{12} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^2} d\xi - \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a^{12} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^1} d\xi, \\ K_{mk}^{22} &= - \int_{\Xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a^{22} \varphi_k) \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда для системы уравнений (15) можно записать аналог схемы стабилизирующей поправки [5]:

$$\begin{aligned} M \frac{\mathbf{u}^{n+1/2} - \mathbf{u}^n}{\tau} &= K^{11} \mathbf{u}^{n+1/2} + K^{12} \mathbf{u}^n + K^{22} \mathbf{u}^n - \mathbf{F}, \\ M \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1/2}}{\tau} &= K^{22} \mathbf{u}^{n+1} - K^{22} \mathbf{u}^n, \end{aligned} \quad (17)$$

или в более компактном виде

$$L^1 \mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{Q}^1, \quad (18)$$

$$L^2 \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{Q}^2, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{\tau} M - K^{11}, \quad \mathbf{Q}^1 = \left(\frac{1}{\tau} M + K^{12} + K^{22} \right) \mathbf{u}^n - \mathbf{F}, \\ L^2 &= \frac{1}{\tau} M - K^{22}, \quad \mathbf{Q}^2 = \frac{1}{\tau} M \mathbf{u}^{n+1/2} - K^{22} \mathbf{u}^n, \\ \mathbf{u}^n &= (u_1^n, \dots, u_N^n, u_{N+1}^n, \dots, u_{N\Gamma}^n). \end{aligned}$$

На каждом шаге по времени системы линейных уравнений (18), (19) решаются при помощи метода сопряженных градиентов. Каждая система решается дважды для

$$\mathbf{u}^n = (\mathbf{s}^l)^n = \left[(s^l)_1^n, \dots, (s^l)_{N\Gamma}^n \right], \quad l = 1, 2,$$

где $\left[(s^1)_k^n, (s^2)_k^n \right]$ — координаты k -го узла сетки в параметрической области S^2 на n -м шаге по времени. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие сходимости

$$\max_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{\tau} \sqrt{\left[(s^1)_k^n - (s^1)_k^{n+1} \right]^2 + \left[(s^2)_k^n - (s^2)_k^{n+1} \right]^2} \leq \varepsilon \quad (20)$$

для некоторого достаточно малого ε .

На каждом шаге по времени необходимо заново собирать матрицы L^1, L^2 и векторы $\mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2$, причем L^1, L^2, \mathbf{Q}^1 можно собирать одновременно, а в \mathbf{Q}^2 необходимо добавить слагаемое $\frac{1}{\tau} M \mathbf{u}^{n+1/2}$ уже после решения системы (18).

5. Вычислительные аспекты

5.1. Триангуляция вычислительной области

На рис. 2 представлены два рассмотренных вида триангуляции вычислительной области Ξ^2 . В общем случае описанный метод применим при задании в Ξ^2 произвольной неструктурированной сетки, однако использование равномерной сетки в вычислительной области простой формы позволяет значительно упростить вычисления. Применение метода конечных элементов позволяет без усложнения алгоритма строить адаптивные сетки в областях со сложной геометрией границ, с наличием отверстий и разрезов даже при использовании таких простых дискретизаций, какие представлены в данной работе. При этом желательно, чтобы топология вычислительной области Ξ^2 была похожа на топологию области S^2 .

Итак, пусть в вычислительной области Ξ^2 задана триангуляция τ_1 либо τ_2 (см. рис. 2). Ячейка сетки T_1 при дискретизации τ_1 представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной катета h , катеты треугольника направлены вдоль координатных линий $\xi^1 = \text{const}$, $\xi^2 = \text{const}$. Ячейка T_2 для дискретизации τ_2 является равнобедренным треугольником со стороной h , причем одна из сторон параллельна координатному направлению $\xi^2 = \text{const}$.

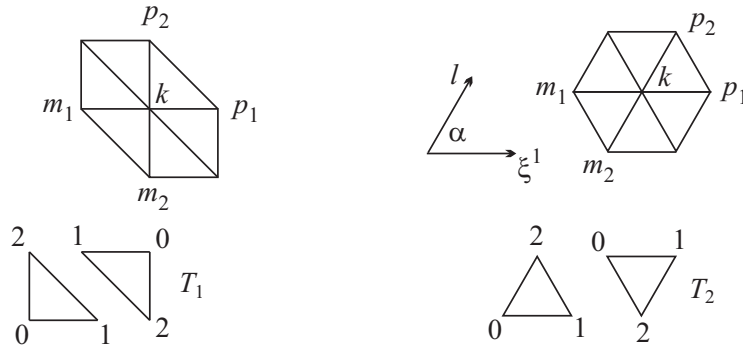


Рис. 2. Триангуляция τ_1 (слева) и τ_2 (справа)

5.2. Локальные матрицы масс, жесткости и вектор нагрузок для триангуляции τ_1

Для каждой ячейки T_1 триангуляции τ_1 необходимо задать матрицы M^{loc} , K^{loc} и вектор \mathbf{F}^{loc} . Аналогично индексам m и k глобальных матриц в (14) обозначим индексы локальных матриц через $m_0 = (0, 1, 2)$ и $k_0 = (0, 1, 2)$. Таким образом, m_0, k_0 — локальные номера вершин треугольника T_1 (см. рис. 2), а также номера строк и столбцов локальных матриц.

Согласно формулам (10), (14), (16) и учитывая, что

$$K^{loc} = K^{11loc} + K^{12loc} + K^{22loc},$$

для триангуляции τ_1 можно вычислить вектор нагрузок и локальные матрицы масс и жесткости:

$$F_{m_0}^{loc} = \frac{1}{6}h^2 P^l(\boldsymbol{\xi}_{m_0}), \quad M^{loc} = \frac{h^2}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$K^{11loc} = \frac{1}{2}a^{11}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{12loc} = \frac{1}{2}a^{12}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{22loc} = \frac{1}{2}a^{22}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что $a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0})$ — значение $a^{ij}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ из (2) в узле эталонной сетки с локальным номером k_0 , который соответствует глобальному номеру k . Аналогично $P^l(\boldsymbol{\xi}_{m_0})$ — значение $P^l[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ в узле m .

5.3. Локальные матрицы масс, жесткости и вектор нагрузок для триангуляции τ_2

Аналогично случаю ячейки T_1 для каждой ячейки T_2 триангуляции τ_2 (см. рис. 2) по формулам (10), (14), (16) и учитывая, что

$$K^{loc} = K^{11loc} + K^{12loc} + K^{22loc},$$

задаются вектор нагрузок и локальные матрицы масс и жесткости:

$$F_{m_0}^{loc} = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2 P^l(\boldsymbol{\xi}_{m_0}), \quad M^{loc} = \frac{\sqrt{3}h^2}{48} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$K^{11loc} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^{11}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{12loc} = \frac{1}{2}a^{12}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K^{22loc} = \frac{1}{4\sqrt{3}}a^{22}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что m_0, k_0 — локальные номера вершин треугольника T_2 , $a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0})$ — значение $a^{ij}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ из (2) в узле с локальным номером k_0 , который соответствует глобальному номеру k . Аналогично $P^l(\boldsymbol{\xi}_{m_0})$ — значение $P^l[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ в узле m .

Пример вычисления локальной матрицы жесткости для триангуляции τ_2 . Согласно формулам (14) и определению базисных функций (10) для задания $K_{m_0k_0}^{loc}$ необходимо вычислить величины

$$-\frac{\partial \varphi_{m_0}}{\partial \xi^j} \int_{T_2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (a^{ij}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] \varphi_{k_0}) d\boldsymbol{\xi}, \quad m_0, k_0 = 0, 1, 2, \quad i, j = 1, 2.$$

Для упрощения дальнейшего вывода введем обозначения

$$x = \xi^1, \quad y = \xi^2, \quad A_{k_0} = a^{ij}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] \varphi_{k_0}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}h$$

и предположим, что ячейка T_2 расположена одной вершиной в начале координат, как показано на рис. 3.

В новых обозначениях распишем вычисление следующих интегралов:

$$I_1 = \int_{T_2} \frac{\partial}{\partial x} [A_{k_0}(x, y)] dx dy, \quad I_2 = \int_{T_2} \frac{\partial}{\partial y} [A_{k_0}(x, y)] dx dy,$$

$$I_1 = \int_0^d dy \left[\int_{y/\sqrt{3}}^{h/2} \frac{\partial A_{k_0}}{\partial x} dx + \int_{h/2}^{h-y/\sqrt{3}} \frac{\partial A_{k_0}}{\partial x} dx \right] =$$

$$= \int_0^d [A_{k_0}(h/2, y) - A_{k_0}(y/\sqrt{3}, y) + A_{k_0}(h - y/\sqrt{3}, y) - A_{k_0}(h/2, y)] dy.$$

По формуле трапеций

$$I_1 \approx \frac{1}{2}d [-A_{k_0}(h/2, d) + A_{k_0}(h/2, d) - A_{k_0}(0, 0) + A_{k_0}(h, 0)] = \frac{\sqrt{3}h}{4} [A_{k_0}(h, 0) - A_{k_0}(0, 0)].$$

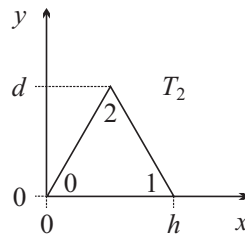


Рис. 3. Базисная ячейка T_2

Следовательно,

$$I_1 \approx \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}h}{4}a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}), & \text{если } k_0 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}h}{4}a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}), & \text{если } k_0 = 1, \\ 0, & \text{если } k_0 = 2, \end{cases} \quad (21)$$

$$I_2 = \int_0^{h/2} dx \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{\partial A_{k_0}}{\partial y} dy + \int_{h/2}^h dx \int_0^{-\sqrt{3}x+2d} \frac{\partial A_{k_0}}{\partial y} dy =$$

$$= \int_0^{h/2} [A_x(x, \sqrt{3}x) - A_{k_0}(x, 0)] dx + \int_{h/2}^h [A_{k_0}(x, -\sqrt{3}x + \sqrt{3}h) - A_{k_0}(x, 0)] dy.$$

По формуле трапеций

$$I_2 \approx \frac{h}{2} [A_{k_0}(h/2, d) - A_{k_0}(h/2, 0)].$$

Считаем, что $A_{k_0}(h/2, 0) \approx \frac{1}{2} [A_{k_0}(0, 0) + A_{k_0}(h, 0)]$. Следовательно,

$$I_2 \approx \begin{cases} -\frac{h}{4}a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}), & \text{если } k_0 = 0, 1, \\ \frac{h}{2}a^{ij}(\boldsymbol{\xi}_{k_0}), & \text{если } k_0 = 2. \end{cases} \quad (22)$$

Используя формулы (21), (22) и определение базисных функций (10) можно получить значения $K_{m_0k_0}^{loc}$ для триангуляции τ_2 . Локальная матрица жесткости для τ_1 вычисляется аналогично на треугольнике вида T_1 .

5.4. Вычисление производных в коэффициентах уравнений

Значения коэффициентов уравнений $a^{ij}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ и $P^l[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]$ в (2) зависят от производных $\partial/\partial\xi^1$, $\partial/\partial\xi^2$. Поскольку эти значения требуются только во внутренних узлах сетки, они могут быть вычислены при помощи центральных разностей с использованием значений с предыдущего временного слоя. При этом, следуя логике метода конечных элементов, для вычисления производных в узле k необходимо хранить номера соседних узлов m_1 , p_1 , m_2 , p_2 (см. рис. 2).

Триангуляция τ_1 удобна тем, что узлы сетки расположены вдоль координатных направлений ξ^1 , ξ^2 , а для триангуляции τ_2 производные по направлению ξ^2 будем вычислять, используя формулу производной по направлению (см. рис. 2):

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial \xi^2} \cos(\pi/2 - \alpha).$$

В данном случае $\alpha = \pi/3$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 \frac{\partial f}{\partial l} - \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right)$$

и, поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial l} \approx \frac{f_{p_2} - f_{m_2}}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \approx \frac{f_{p_1} - f_{m_1}}{2h},$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{2\sqrt{3}h} (2f_{p_2} - 2f_{m_2} - f_{p_1} + f_{m_1}).$$

6. Примеры расчетов

На рис. 4–6 представлены сбалансированные адаптивные сетки, построенные с помощью описанного метода с использованием управляющей метрики для адаптации к значениям некоторой функции [1]

$$g_{\mathbf{s}}^{ij} = F(\mathbf{s})\delta_j^i, \quad i, j = 1, 2, \quad (23)$$

где $g_{\mathbf{s}}^{ij}$ — контравариантные компоненты управляющей метрики, позволяющей получать сгущение узлов сетки в зонах, где функция $F(\mathbf{s})$ принимает минимальные значения. Данная метрика является частным случаем формулы (5). Под сбалансированной понимается сетка, удовлетворяющая двум и более требованиям адаптации [1].

Численные эксперименты показали, что выбор шага по времени $\tau = 0.01$ в методе (17) для данных примеров является оптимальным, поскольку его увеличение приводит к ухудшению сходимости численного алгоритма. Уменьшение параметра τ увеличивает число итераций, необходимых для сходимости метода. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока левая часть в условии сходимости (20) не достигнет величины порядка 10^{-5} .

На рис. 4, *a* показана сетка, сгущающаяся в окрестности трех точек с координатами (x_k, y_k) , $k = 1, 2, 3$. Управляющая функция в формуле (23) вычислялась следующим образом:

$$F(\mathbf{s}) = 2 \min_{k=1,2,3} \rho_k(\mathbf{s}),$$

где $\rho_k(\mathbf{s}) = \sqrt{(s^1 - x_k)^2 + (s^2 - y_k)^2}$ — расстояние до точки (x_k, y_k) .

Форма вычислительной области Ξ^2 совпадает с формой S^2 , эталонная сетка в Ξ^2 задается в виде триангуляции τ_1 . Количество итераций 500.

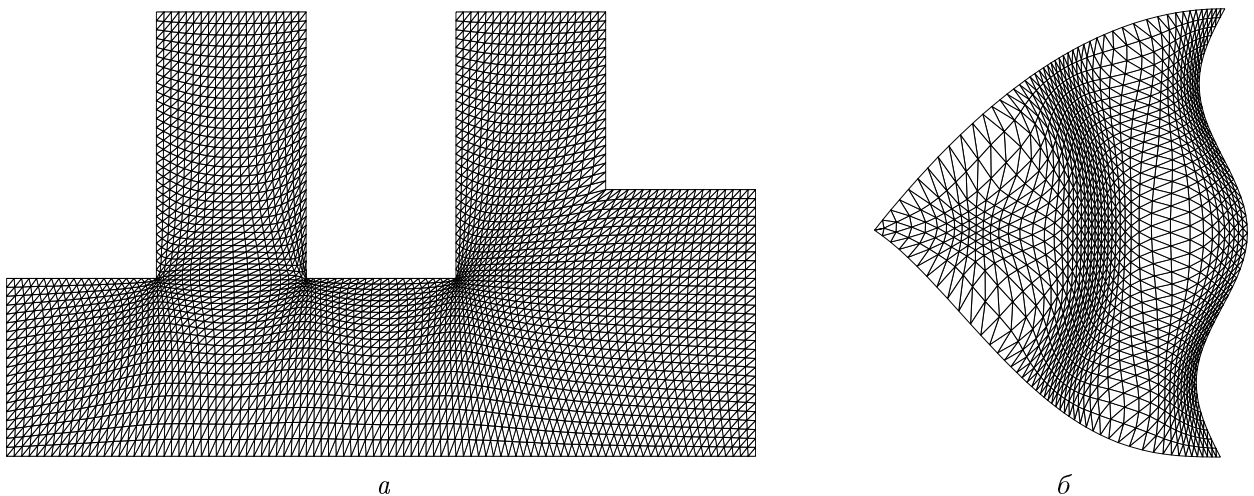


Рис. 4. Пример адаптивной сетки с триангуляцией τ_1 (*a*) и τ_2 (*б*)

На рис. 4, б представлена адаптивная сетка в области с границами

$$\begin{aligned} s^1 &= t, & s^2 &= 0.05 \sin(3\pi t), \\ s^1 &= (1.5 - t)t^3, & s^2 &= 0.7t, \\ s^1 &= 1 - 0.5t^2, & s^2 &= 0.7t, \\ & & 0 &\leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Управляющая метрика (23) задавалась с использованием функции

$$F(\mathbf{s}) = \left(\frac{0.4}{0.4 + f_1(\mathbf{s}) + f_2(\mathbf{s}) + f_3(\mathbf{s})} \right)^2,$$

где

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{s}) &= \exp\left(-\varphi_k(\mathbf{s})^2/0.01\right), \quad k = 1, 2, 3; \\ \varphi_1(\mathbf{s}) &= s^2 - 0.05 \sin(3\pi s^1), \\ \varphi_2(\mathbf{s}) &= \sqrt{(s^1 - 0.5)^2 + (s^2 - 0.5)^2 - 0.001}, \\ \varphi_3(\mathbf{s}) &= s^2 - 0.25 - 0.7(s^1 - 0.5)^2. \end{aligned}$$

Такое задание управляющей метрики позволяет получить сетку, сгущающуюся в окрестности кривых $\varphi_1(\mathbf{s})$, $\varphi_2(\mathbf{s})$, $\varphi_3(\mathbf{s})$. Для сгущения сетки на границе области использовался алгоритм, основанный на решении одномерных обращенных уравнений Бельтрами [1]. Вычислительная область Ξ^2 имеет форму равностороннего треугольника, в котором задана триангуляция τ_2 . Количество итераций 1000.

На рис. 5 изображены адаптивные сетки, сгущающиеся вблизи разрезов (слева), и соответствующие вычислительные области (справа). Форма каждого разреза представляет собой аэродинамический профиль крыла НАСА.

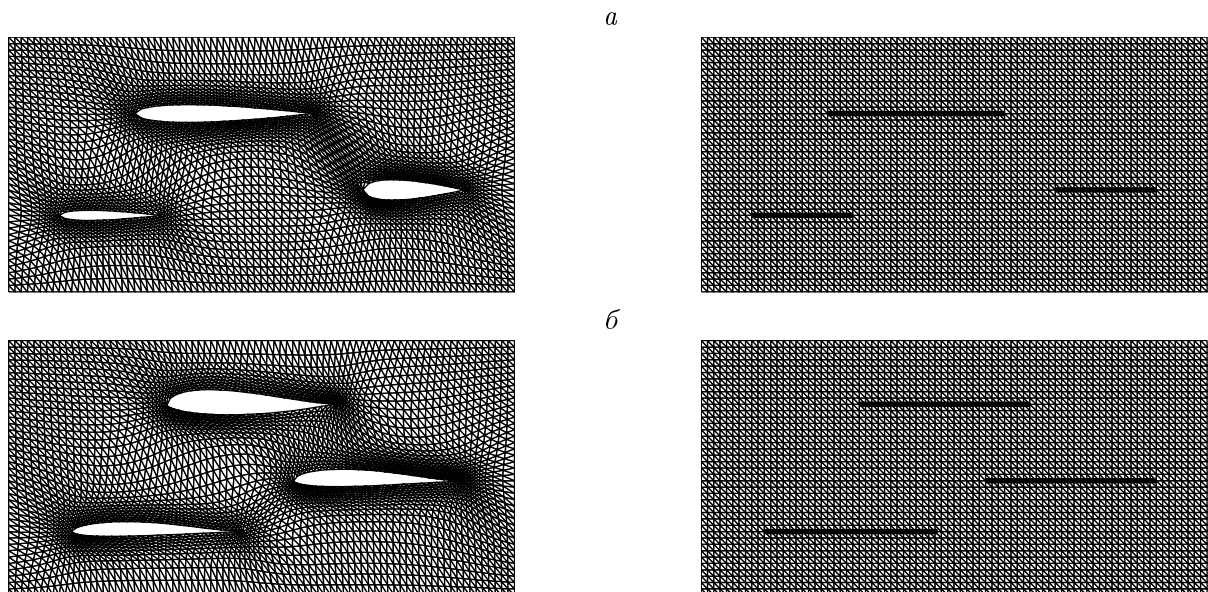


Рис. 5. Адаптивные сетки, сгущающиеся в окрестности профилей крыла НАСА, заданных аналитически (а) и дискретно (б) (слева), и эталонные сетки с разрезами в вычислительной области (справа)

Разрезы на рис. 5, *a*, слева были заданы аналитически по формуле

$$s^2 = y_0 \pm 5tc \left[0.2969(x/c)^{0.5} - 0.126(x/c) - 0.3537(x/c)^2 + 0.2843(x/c)^3 - 0.1015(x/c)^4 \right],$$

где $x = s^1 - x_0$, (x_0, y_0) — начальная точка разреза, c — длина разреза, t — максимальная толщина разреза относительно его длины (см. <http://www.aerospacweb.org>).

Управляющая метрика (23) задавалась при помощи функции

$$F(\mathbf{s}) = \left(\frac{0.7}{0.7 + f_1(\mathbf{s}) + f_2(\mathbf{s}) + f_3(\mathbf{s})} \right)^2,$$

$$f_k(\mathbf{s}) = \exp\left(-\varphi_k(\mathbf{s})^2/0.01\right), \quad k = 1, 2, 3,$$

где $\varphi_k(\mathbf{s})$ — функция, задающая линию k -го разреза. Количество итераций 200.

У сетки, представленной на рис. 5, *б*, слева, разрезы имеют форму профилей крыла МН 43, МН 60, МН 91, заданных дискретно по данным с сайта <http://www.mh-aerotools.de/airfoils/>. Пусть N_c — общее число точек, задающих разрезы (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, N_c$ — их координаты. Тогда управляющую метрику (23) для построения сетки на рис. 5, *б*, слева можно задать с использованием следующих функций:

$$F(\mathbf{s}) = \left(\frac{0.7}{0.7 + f(\mathbf{s})} \right)^2,$$

$$f(\mathbf{s}) = \exp\left(-\varphi(\mathbf{s})^2/0.01\right), \quad \varphi(\mathbf{s}) = \min_{k=1, \dots, N_c} \rho_k(\mathbf{s}),$$

где $\rho_k(\mathbf{s}) = \sqrt{(s^1 - x_k)^2 + (s^2 - y_k)^2}$ — расстояние до k -й точки разрезов. Количество итераций 400.

На рис. 6 приведены сетки, построенные на поверхности сферы. Поверхность получена склейкой двух полусфер, каждая из которых задавалась параметризацией круга радиусом $R = 1/3$ с центром в точке $x_0 = 0.5$, $y_0 = \sqrt{3}/6$. Вычислительная область

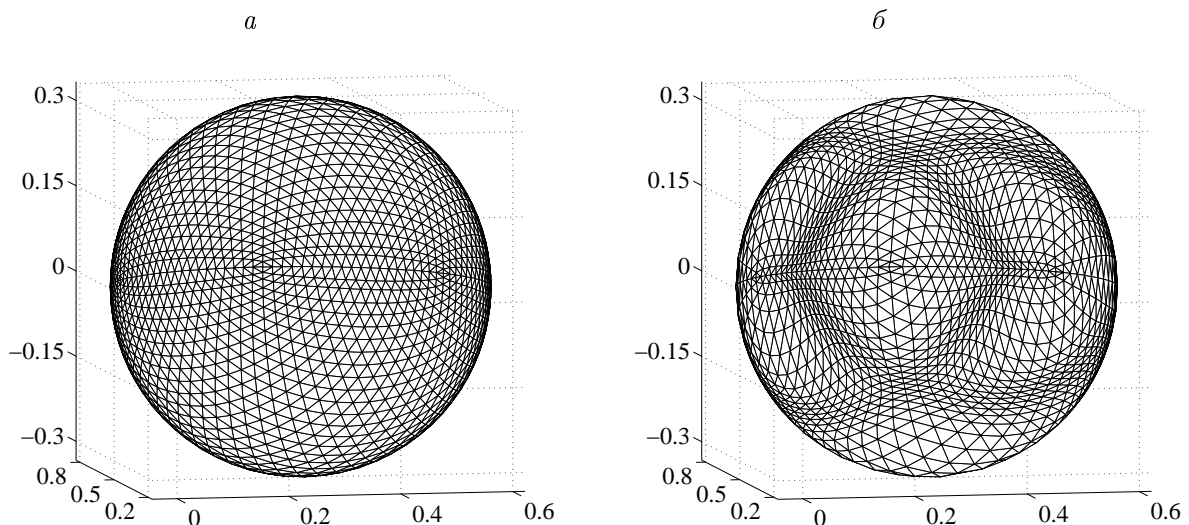


Рис. 6. Примеры сеток, построенных на сфере, с единичной метрикой (*a*) и с адаптацией к заданным кривым (*б*)

представляет собой равносторонний шестиугольник, вписанный в данную сферу. Эталонная сетка задана триангуляцией τ_2 . Параметризация поверхности $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ определялась по формуле

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \alpha(s^1 - x_0), \\x_2 &= y_0 + \alpha(s^2 - y_0), \\x_3 &= \pm(\alpha - 1)h,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}h &= h_2 + (h_1 - h_2)r/R, \quad r = \sqrt{(s^1 - x_0)^2 + (s^2 - y_0)^2}, \\ \alpha &= \frac{h^2 + \sqrt{h^4 - (h^2 + r^2)(h^2 - R^2)}}{h^2 + r^2}.\end{aligned}$$

Сфера на рис. 6, *a* задавалась для $h_1 = h_2 = R$, на рис. 6, *б* для $h_1 = 0.5R$, $h_2 = 1.5R$.

Для построения сетки, представленной на рис. 6, *a*, использовалась единичная метрика, т.е. в формуле (23) $F(\mathbf{s}) = 1$. В этом случае обращенные уравнения диффузии (6) являются обращенными уравнениями Лапласа. Количество итераций 100.

Сетка на рис. 6, *б* построена при

$$F(\mathbf{s}) = \left(\frac{0.4}{0.4 + f_1(\mathbf{s}) + f_2(\mathbf{s})} \right)^2,$$

где

$$\begin{aligned}f_k(\mathbf{s}) &= \frac{0.005}{0.005 + \varphi_k(\mathbf{s})^2}, \quad k = 1, 2, \\ \varphi_1(\mathbf{s}) &= s^2 - 0.2 \sin(3\pi s^1) - 0.3, \\ \varphi_2(\mathbf{s}) &= s^2 - 0.2 \sin(3\pi s^1 + \pi) - 0.3.\end{aligned}$$

Количество итераций 300. На линии склейки полусфер сетка сгущалась при помощи одномерного алгоритма [1].

Авторы выражают благодарность д-ру физ.-мат. наук В.П. Ильину за консультации по вопросам метода конечных элементов.

Список литературы

- [1] ТЕХНОЛОГИЯ построения разностных сеток / В.Д. Лисейкин, Ю.И. Шокин, И.А. Васева, Ю.В. Лиханова. Новосибирск: Наука, 2009.
- [2] КАЛИТКИН Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
- [3] СТРЕНГ Г., ФИКС ДЖ. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977.
- [4] ЗЕНКЕВИЧ О., МОРГАН А. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
- [5] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 7 сентября 2010 г.,
с доработки — 23 мая 2011 г.*