О вычислении одной характеристики асимптотической устойчивости решений линейных систем периодических разностных уравнений с параметром*

Т. Д. Закревский[1], И. И. Матвеева[2]
[1]*Новосибирский государственный университет, Россия*
[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
e-mail: `timofey.zakrevskiy@gmail.com`, `matveeva@math.nsc.ru`

Рассматриваются линейные системы периодических разностных уравнений с параметром. Исследована последовательность дискретных уравнений Ляпунова специального вида, получены их решения в виде рядов по параметру. На основе этих решений предложен алгоритм вычисления характеристики асимптотической устойчивости решений линейных систем периодических разностных уравнений с параметром.

Ключевые слова. разностные уравнения, периодические коэффициенты, параметр, асимптотическая устойчивость, числовая характеристика.

Введение

Рассмотрим систему разностных уравнений следующего вида:

$$x(n+1) = A(n)x(n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

где $A(n)$ — периодическая матрица размера $N \times N$ с периодом T, т. е.

$$A(n) \equiv A(n+T), \quad n = 0, 1, \dots$$

Хорошо известно, что в случае систем с постоянными коэффициентами ($A(n) = A$)

$$x(n+1) = Ax(n), \quad n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

нулевое решение системы (2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения $\lambda_j(A)$ матрицы A принадлежат единичному кругу (см., например, [1, 2])

$$\lambda_j(A) \in \{z: \ |z| < 1\}.$$

Однако задача нахождения собственных значений неэрмитовых матриц является плохо обусловленной [3, 4], поэтому на практике помимо спектральных желательно использовать другие критерии. Для систем вида (2) таким является критерий, формулируемый в терминах разрешимости дискретного уравнения Ляпунова

$$H - A^*HA = I, \tag{3}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (гос. контракты № 02.740.11.0429 и 16.740.11.0127), РФФИ (грант № 10-01-00035) и Сибирского отделения РАН (Интеграционный проект № 85).

где I — единичная матрица размера $N \times N$. Согласно этому критерию нулевое решения системы (2) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда уравнение (3) имеет единственное решение $H = H^* > 0$ [1]. Если спектр матрицы A принадлежит единичному кругу, то решение уравнения (3) может быть представлено в виде

$$H = \sum_{j=0}^{\infty} (A^*)^j A^j.$$

Отметим, что в терминах нормы $\|H\|$ имеет место оценка для решений системы (2)

$$\|x(n)\|^2 \le \|H\| \left(1 - \frac{1}{\|H\|}\right)^n \|x(0)\|^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

характеризующая скорость убывания решений при $n \to \infty$. Более того, все собственные значения матрицы A принадлежат кругу, радиус которого зависит от нормы $\|H\|$

$$|\lambda_j(A)|^2 \le 1 - \frac{1}{\|H\|}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

т. е., используя $\|H\|$, можно указать, насколько близко собственные значения матрицы A лежат к окружности $\{z : \ |z| = 1\}$. Таким образом, величина $\|H\|$ является характеристикой асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2). С использованием этой характеристики С.К. Годуновым и А.Я. Булгаковым был предложен алгоритм с гарантированной точностью для численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2) [5, 6].

В случае систем вида (1) с периодическими коэффициентами также существует спектральный критерий асимптотической устойчивости нулевого решения, согласно которому нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы монодромии

$$X(T) = A(T-1) \ldots A(1)A(0)$$

лежат строго внутри единичного круга

$$\lambda_j(X(T)) \in \{z : \ |z| < 1\}.$$

Как уже упоминалось выше, задача нахождения собственных значений неэрмитовых матриц плохо обусловлена, поэтому возникает естественный вопрос: как в данном случае проводить численное исследование асимптотической устойчивости и какие характеристики при этом использовать?

В цикле работ [7–12] был предложен ряд числовых характеристик, на основе которых можно разработать алгоритмы численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (1), а также нелинейных систем разностных уравнений с периодическими линейными членами. В частности, была введена характеристика

$$\omega = \{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \ldots, \|H(T-1)\|\}, \tag{5}$$

где

$$H(l) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j)\right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} A(j)\right), \quad l = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{6}$$

при этом

$$\prod_{j=l}^{k-1} A(j) = \begin{cases} A(k-1)\dots A(l), & k > l, \\ I, & k = l. \end{cases}$$

С использованием величин $\{\|H(0)\|, \|H(1)\|, \dots, \|H(T-1)\|\}$ в работе [8] была получена оценка

$$\|x(n)\|^2 \le \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right) \|H(0)\| \|x_0\|^2, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

характеризующая скорость убывания решений системы (1) при $n \to \infty$, а также установлена оценка для собственных чисел матрицы монодромии $X(T)$

$$|\lambda_i(X(T))|^2 \le \prod_{j=0}^{T-1} \left(1 - \frac{1}{\|H(j)\|}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Отметим, что в случае систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами характеристика ω переходит в норму решения $\|H\|$ дискретного уравнения Ляпунова (3), при этом оценка (7) совпадает с оценкой (4).

Таким образом, для проведения численных исследований асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) можно использовать характеристику (5), но для этого необходимо вычислить ряды вида (6). Цель настоящей работы — исследовать данный вопрос в случае систем периодических разностных уравнений вида

$$x(n+1) = (A + \mu B(n))\, x(n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

где A — постоянная матрица размера $N \times N$, спектр которой принадлежит единичному кругу $\{z : |z| < 1\}$, $B(n)$ — периодическая матрица размера $N \times N$ с периодом T, т. е.

$$B(n) \equiv B(n+T), \quad n = 0, 1, \dots,$$

μ — вещественный параметр.

В следующем разделе будет получено представление для матриц вида (6) в виде рядов по параметру, которое дает возможность вычислять с заданной точностью матрицы (6) и, следовательно, характеристику (5). Этот результат позволяет проводить численные исследования асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (8).

Отметим, что аналогичные исследования для линейных систем периодических обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром были проведены в работе [13] с использованием результатов из [14].

Представление для матриц вида (6)

Рассмотрим линейную систему периодических разностных уравнений (8). По условию спектр матрицы A принадлежит единичному кругу. Тогда [9], если параметр μ удовлетворяет неравенствам

$$|\mu|\, \|B(n)\| < \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}} - \|A\|, \quad n = 0, 1, \dots, T-1,$$

то нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво. Здесь H — решение уравнения (3).

Определим семейство матриц вида (6), где

$$A(j) = A + \mu B(j),$$

т. е.

$$H(l) = H(l, \mu) = \sum_{k=l}^{\infty} \left(\prod_{j=l}^{k-1} (A + \mu B(j)) \right)^* \left(\prod_{j=l}^{k-1} (A + \mu B(j)) \right).$$

В работе [8] были установлены следующие свойства для этих матриц:

1) матрицы $H(l, \mu)$ являются периодическими с периодом T;

2) для $H(l, \mu)$ имеют место равенства

$$H(l, \mu) = (A + \mu B(l))^* \, H(l+1, \mu) \, (A + \mu B(l)) + I, \quad l = 0, \dots, T-1. \tag{9}$$

Для формулировки результатов введем матрицы размера $NT \times NT$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & A \\ A & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & A & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & B(T-1) \\ B(0) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & B(T-2) & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\mathcal{H}(\mu) = \begin{pmatrix} H(0, \mu) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H(T-1, \mu) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Отметим, что искомые матрицы $H(l, \mu)$ стоят на диагонали матрицы (11), поэтому нахождение матриц вида (6) свелось к нахождению матрицы $\mathcal{H}(\mu)$.

Теорема 1. *Пусть параметр μ удовлетворяет неравенству*

$$|\mu| < \frac{\sqrt{\|A\|^2 + \dfrac{1}{\|H\|}} - \|A\|}{\max\limits_{k=0,\dots,T-1} \|B(k)\|}, \tag{12}$$

где H — решение дискретного уравнения Ляпунова (3). Тогда имеет место представление

$$\mathcal{H}(\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j H_j, \tag{13}$$

где H_j — решения следующих дискретных уравнений Ляпунова:

$$H_0 - \mathcal{A}^* H_0 \mathcal{A} = \mathcal{I},$$

$$H_1 - \mathcal{A}^* H_1 \mathcal{A} = \mathcal{A}^* H_0 \mathcal{B} + \mathcal{B}^* H_0 \mathcal{A},$$

$$H_j - \mathcal{A}^* H_j \mathcal{A} = \mathcal{B}^* H_{j-2} \mathcal{B} + \mathcal{B}^* H_{j-1} \mathcal{A} + \mathcal{A}^* H_{j-1} \mathcal{B}, \quad j = 2, 3, \dots, \tag{14}$$

здесь $\mathcal{I}$ — единичная матрица размера $NT \times NT$.

Доказательство. Будем использовать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ определены в (10). Тогда*

$$\|\mathcal{A}\| = \|A\|, \quad \|\mathcal{B}\| = \max_{k=0,\dots,T-1} \|B(k)\|,$$

причем для собственных значений матрицы $\mathcal{A}$ имеют место неравенства

$$|\lambda_j(\mathcal{A})|^2 \le 1 - \frac{1}{\|H\|}, \quad j = 1, \dots, NT, \tag{15}$$

где H — решение уравнения (3).

Доказательство. Введем матрицу размера $NT \times NT$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & I \\ I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица является ортогональной. Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{A} = Q \begin{pmatrix} A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A \end{pmatrix} Q.$$

Следовательно, $\|\mathcal{A}\| = \|A\|$. Аналогичным образом

$$\mathcal{B} = Q \begin{pmatrix} B(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B(T-1) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\|\mathcal{B}\| = \max\limits_{k=0,\dots,T-1} \|B(k)\|$.

Рассмотрим следующий ряд:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^*)^k \mathcal{A}^k. \tag{16}$$

В силу (10)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sum\limits_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k \end{pmatrix}.$$

По условию $\lambda_j(A) \in \{z : |z| < 1\}$, следовательно, ряд

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k A^k,$$

стоящий на диагонали, сходится, более того, он является решением дискретного уравнения Ляпунова (3). Тогда ряд (16) также сходится, при этом

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что матрица $\mathbf{H}$ является решением уравнения

$$\mathbf{H} - \mathcal{A}^* \mathbf{H} \mathcal{A} = \mathcal{I}.$$

Отсюда в силу критерия Ляпунова получаем, что спектр матрицы $\mathcal{A}$ принадлежит единичному кругу $\{z : |z| < 1\}$, причем, как отмечено во введении, для всех собственных значений имеет место оценка

$$|\lambda_j(\mathcal{A})|^2 \le 1 - \frac{1}{\|\mathbf{H}\|}.$$

Поскольку $\|\mathbf{H}\| = \|H\|$, получаем неравенство (15).

Лемма 1 доказана.

Используя обозначения (10) и (11), систему (9) можно переписать в виде

$$\mathcal{H}(\mu) - (\mathcal{A} + \mu\mathcal{B})^* \, \mathcal{H}(\mu) \, (\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}) = \mathcal{I}. \tag{17}$$

Выше указано, что спектр матрицы $\mathcal{A}$ принадлежит единичному кругу. Тогда [9], если выполнено неравенство

$$|\mu| \, \|\mathcal{B}\| < \sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|\mathbf{H}\|}} - \|\mathcal{A}\| \,, \tag{18}$$

спектр матрицы $\mathcal{A} + \mu\mathcal{B}$ также принадлежит единичному кругу. Отметим, что в силу леммы 1 условие (18) эквивалентно неравенству (12). Следовательно, если параметр μ удовлетворяет условию (12), то уравнение (17) имеет единственное решение $\mathcal{H}(\mu) = \mathcal{H}^*(\mu) > 0$.

Поскольку коэффициенты уравнения (17) линейным образом зависят от параметра μ, то имеет место теорема о дифференцируемой зависимости решения $\mathcal{H}(\mu)$ от параметра. Более того, матрица $\mathcal{H}(\mu)$ бесконечно дифференцируема по параметру μ, причем ее производные по параметру $\mathcal{H}^{(j)}(\mu)$ при $\mu = 0$, очевидно, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \mathcal{H}(0) - \mathcal{A}^*\mathcal{H}(0)\mathcal{A} = \mathcal{I}, \\ \mathcal{H}'(0) - \mathcal{A}^*\mathcal{H}'(0)\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{H}(0)\mathcal{B} + \mathcal{B}^*\mathcal{H}(0)\mathcal{A}, \\ \mathcal{H}^{(j)}(0) - \mathcal{A}^*\mathcal{H}^{(j)}(0)\mathcal{A} = j(j-1)\mathcal{B}^*\mathcal{H}^{(j-2)}(0)\mathcal{B} + \\ + j\left(\mathcal{B}^*\mathcal{H}^{(j-1)}(0)\mathcal{A} + \mathcal{A}^*\mathcal{H}^{(j-1)}(0)\mathcal{B}\right), \quad j = 2, 3, \dots \end{gathered}$$

Введем обозначения

$$H_j = \frac{1}{j!}\mathcal{H}^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, \dots$$

Очевидно, матрицы H_j удовлетворяют соотношениям (14). Так как каждая из матриц H_j является решением соответствующего дискретного уравнения Ляпунова с эрмитовой правой частью, то $H_j = H_j^*$.

Для доказательства сходимости ряда (13) потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть H_j, $j = 0, 1, \ldots$, удовлетворяют уравнениям (14). Тогда имеют место неравенства*

$$\|H_j\| \le \frac{\|H\|}{2}\left(1+\frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}}\right)\left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\|+\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j +$$

$$+\frac{\|H\|}{2}\left(1-\frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}}\right)\left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\|-\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j, \qquad (19)$$

где H — решение уравнения (3).

Доказательство. Обозначим правые части уравнений в системе (14) через C_j. Поскольку спектр матрицы $\mathcal{A}$ принадлежит единичному кругу, то решение каждого из уравнений может быть записано в виде

$$H_j = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^*)^k C_j \mathcal{A}^k, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Как отмечено выше, $H_j = H_j^*$, следовательно,

$$\|H_j\| = \sup_{\|v\|=1}\left|\left\langle \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{A}^*)^k C_j \mathcal{A}^k v, v\right\rangle\right| \le \sup_{\|v\|=1}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\left\langle C_j\mathcal{A}^k v, \mathcal{A}^k v\right\rangle\right| \le$$

$$\le \sup_{\|v\|=1}\sum_{k=0}^{\infty}\|C_j\|\left\langle \mathcal{A}^k v, \mathcal{A}^k v\right\rangle = \|C_j\|\sup_{\|v\|=1}\sum_{k=0}^{\infty}\left\langle \mathcal{A}^k v, \mathcal{A}^k v\right\rangle = \|C_j\|\,\|H_0\|.$$

При доказательстве леммы 1 было показано, что $\|H_0\| = \|H\|$. Следовательно,

$$\|H_j\| \le \|C_j\|\,\|H\|.$$

Тогда, подставляя значения правых частей C_j уравнений (14), получаем

$$\|H_1\| \le 2\,\|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|H\|^2,$$

$$\|H_j\| \le 2\,\|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|H\|\,\|H_{j-1}\| + \|\mathcal{B}\|^2\,\|H\|\,\|H_{j-2}\|, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$u(j) = 2\,\|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|H\|\,u(j-1) + \|\mathcal{B}\|^2\,\|H\|\,u(j-2), \quad j = 2, 3, \ldots$$

с начальными условиями

$$u(1) = 2\,\|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|H\|^2, \quad u(0) = \|H\|.$$

Принимая во внимание, что коэффициенты и начальные данные положительны, получим

$$\|H_j\| \le u(j), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Нетрудно найти $u(j)$ в явном виде. Действительно, характеристический полином

$$\lambda^2 - 2\,\|\mathcal{A}\|\,\|\mathcal{B}\|\,\|H\|\,\lambda - \|\mathcal{B}\|^2\,\|H\| = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \|\mathcal{B}\|\,\|H\|\left[\|\mathcal{A}\| \pm \sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right].$$

Следовательно,

$$u(j) = \alpha_1\left(\|\mathcal{B}\|\,\|H\|\left[\|\mathcal{A}\| + \sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j +$$

$$+\alpha_2\left(\|\mathcal{B}\|\,\|H\|\left[\|\mathcal{A}\| - \sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j,$$

где согласно начальным данным

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\|H\|\left(1 + \frac{\|\mathcal{A}\|}{\sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}\,\|H\|\left(1 - \frac{\|\mathcal{A}\|}{\sqrt{\|\mathcal{A}\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}}\right).$$

Поскольку в силу леммы 1 $\|\mathcal{A}\| = \|A\|$, то

$$\|H_j\| \le \frac{\|H\|}{2}\left(1 + \frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}}\right)\left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j +$$

$$+\frac{\|H\|}{2}\left(1 - \frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}}\right)\left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\| - \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Лемма 2 доказана.

Иногда при вычислениях удобнее вместо оценки (19) использовать ее несколько более грубый аналог.

Следствие. *Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда имеют место оценки*

$$\|H_j\| \le \|H\|\left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j. \tag{20}$$

В силу леммы 2 получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^j \|H_j\| \le \frac{\|H\|}{2}\left(1+\frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2+\dfrac{1}{\|H\|}}}\right)\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^j \left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\|+\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j+$$

$$+\frac{\|H\|}{2}\left(1-\frac{\|A\|}{\sqrt{\|A\|^2+\dfrac{1}{\|H\|}}}\right)\sum_{j=0}^{\infty} |\mu|^j \left(\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\|-\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right]\right)^j.$$

Каждый из рядов является суммой геометрической прогрессии. Поскольку параметр μ удовлетворяет неравенству (12), то

$$|\mu|\,\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left[\|A\|+\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right]<1,$$

$$|\mu|\,\|H\|\,\|\mathcal{B}\|\left|\|A\|-\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}\right|<1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |\mu|^j \|H_j\| < \infty$. Поскольку $\|\mathcal{H}(\mu)\| \le \sum\limits_{j=0}^{\infty} |\mu|^j \|H_j\|$, то ряд (13) сходится.

Теорема 1 доказана.

Используя следствие из леммы 2, можно сформулировать следующий результат.

Следствие. *Если параметр μ удовлетворяет неравенству (12), то*

$$\|\mathcal{H}(\mu)\| \le \frac{\|H\|}{1-|\mu|\max\limits_{k=0,\dots,T-1}\|B(k)\|\,\|H\|\left[\|A\|+\sqrt{\|A\|^2+\dfrac{1}{\|H\|}}\right]}.$$

В следующей теореме указана оценка скорости сходимости ряда (13).

Теорема 2. *Если параметр μ удовлетворяет неравенству (12), то имеют место оценки*

$$\left\|\mathcal{H}(\mu)-\sum_{j=0}^{\rho}\mu^j H_j\right\| \le \|H\|\,\frac{|\mu|^{\rho+1}\,q^{\rho+1}}{1-|\mu|\,q}, \quad \rho=0,1,\dots,$$

где

$$q=\max_{k=0,\dots,T-1}\|B(k)\|\,\|H\|\left[\sqrt{\|A\|^2+\frac{1}{\|H\|}}+\|A\|\right],$$

H — решение уравнения (3).

Доказательство. Используя представление $\mathcal{H}(\mu)$, полученное в теореме 1, имеем

$$\left\|\mathcal{H}(\mu)-\sum_{j=0}^{\rho}\mu^j H_j\right\| = \left\|\sum_{j=\rho+1}^{\infty}\mu^j H_j\right\| \le \sum_{j=\rho+1}^{\infty}|\mu|^j\,\|H_j\|.$$

В силу леммы 1 и неравенства (20) получаем

$$\sum_{j=\rho+1}^{\infty} |\mu|^j \, \|H_j\| \leq \|H\| \sum_{j=\rho+1}^{\infty} |\mu|^j \left(\|H\| \, \|\mathcal{B}\| \left[\|A\| + \sqrt{\|A\|^2 + \frac{1}{\|H\|}} \right] \right)^j = \|H\| \, \frac{|\mu|^{\rho+1} \, q^{\rho+1}}{1 - |\mu| \, q}.$$

Теорема 2 доказана.

Используя представление (13) и результаты, полученные в теоремах 1 и 2, можно с заданной точностью вычислить матрицу (11). Действительно, каждая из матриц H_j является решением соответствующего дискретного уравнения Ляпунова из (14). В настоящее время имеются многочисленные алгоритмы нахождения решений таких уравнений. Тогда в силу теоремы 2 всегда можно указать такое ρ, при котором с заданной точностью может быть вычислена матрица $\mathcal{H}(\mu)$ и, следовательно, характеристика (5). Этот результат позволяет проводить численные исследования асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (8).

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Г.В. Демиденко за полезные дискуссии и внимание к работе.

Список литературы

[1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[2] Elaydi S.N. An Introduction to Difference Equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

[3] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.; Л.: Физматгиз, 1963.

[4] Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

[5] Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

[6] Bulgak H. Pseudoeigenvalues, spectral portrait of a matrix and their connections with different criteria of stability // Error Control and Adaptivity in Scientific Computing / Eds. H. Bulgak and C. Zenger. NATO Sci. Ser. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. P. 95–124.

[7] Булгаков А.Я., Демиденко Г.В. Новый критерий принадлежности матричного спектра замкнутому единичному кругу и приложения в теории устойчивости // Сиб. журн. индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 1. С. 47—56.

[8] Айдын К., Булгаков А.Я., Демиденко Г.В. Числовые характеристики асимптотической устойчивости решений линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1227–1237.

[9] Айдын К., Булгаков А.Я., Демиденко Г.В. Асимптотическая устойчивость решений возмущенных линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Там же. 2002. Т. 43, № 3. С. 493–507.

[10] Bulgak H., Demidenko G.V. Estimation for the region of attraction of nonlinear difference equations // Numerische Math. 2002. Vol. 92, No. 3. P. 421–431.

[11] Айдын К., Булгаков А.Я., Демиденко Г.В. Оценка области притяжения разностных уравнений с периодическими линейными членами // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1199–1208.

[12] Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 2009.

[13] Матвеева И.И., Самуйлова Е.А. Приближенное решение краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова с параметром // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 107–115.

[14] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

Поступила в редакцию 14 февраля 2011 г.