

Математическое моделирование сейсмостойкости плотины с учетом влияния водной среды

И. Д. МУЗАЕВ, Н. И. МУЗАЕВ, Б. А. ДЗЕБОЕВ

Центр геофизических исследований ВНИИ РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия

e-mail: dba01@yandex.ru

Поставлена и решена контактная краевая задача совместных сейсмических колебаний плотины и воды в водохранилище. Получены расчетные формулы для вычисления частоты основных форм собственных колебаний указанной системы.

Ключевые слова: приплотинный рукав, формпараметр, базовая функция, метод Ритца, интегро-дифференциальное уравнение.

В горных условиях высоконапорные плотины строятся в наиболее узких ущельях рек. Как правило, приплотинная область водохранилища имеет непризматическую конфигурацию, где глубина воды сравнительно большая, в некоторых водоемах достигающая 300 м. На Сарезском озере (в горах Памира) глубина воды у завальной плотины превышает 500 м. При землетрясении плотина и вода в рукаве совершают колебательные движения, и частота собственных колебаний системы на некоторых объектах может достичь околорезонансного значения, что в свою очередь может привести к аварии гидротехнического сооружения с трудно предсказуемыми последствиями.

Учитывая приведенные аргументы, исследования в данном направлении представляются весьма актуальными и имеют существенное значение при проектировании, строительстве и эксплуатации гидротехнических сооружений.

Предположим, что в прямоугольной системе координат $xOyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 < x < L$, $-\frac{B(x,z)}{2} < y < \frac{B(x,z)}{2}$, $0 < z < H$, представляет собой узкий глубокий непризматический приплотинный рукав горного водохранилища, где L — длина, $B(x,z)$ — ширина, H — глубина воды в рукаве. В створе $x = 0$ находится плотина, а в створе $x = L$ рукав сопрягается с основным объемом водохранилища.

На рис. 1 представлена схема рассматриваемого гидрообъекта. Будем считать, что движение воды в рукаве является безвихревым. Тогда потенциал средней по ширине рукава скорости должен удовлетворять дифференциальному уравнению [1–3]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{B(x,z)} \frac{\partial B(x,z)}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=H} = 0. \quad (3)$$

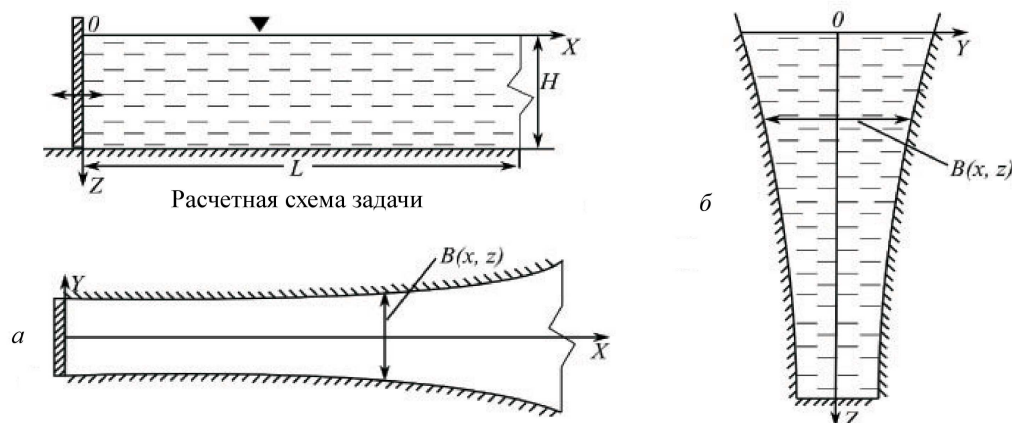


Рис. 1. Схема приплотинного рукава водохранилища: плановая (а) и глубинная (б) конфигурации

Поперечные колебания плотины моделируются следующей краевой задачей:

$$\frac{h^3}{12} E \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(B(0, z) \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) + \rho_2 h B(0, z) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\rho_1 B(0, z) \frac{\partial \varphi(0, z, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} \Big|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$V(z, t) \Big|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0, \quad (6)$$

где $\varphi(x, z, t)$ — потенциал скорости движения воды; $V(z, t)$ — поперечные перемещения в теле плотины, определяемые вертикальной координатой z и временем t ; $B(x, z)$ — ширина приплотинного рукава, зависящая от продольной x и вертикальной z координат; h — ширина плотины по направлению оси Ox ; E — модуль Юнга (модуль упругости) материала плотины; ρ_1 — плотность воды; ρ_2 — плотность материала плотины.

Легко заметить, что непризматическая конфигурация приплотинного рукава моделируется через функцию $B(x, z)$. Функция $B(0, z)$ характеризует изменение длины плотины в вертикальном направлении. Граничное условие $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial V}{\partial t}$ выражает равенство в створе $x = 0$ горизонтальных скоростей движения воды и плотины, граничное условие $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x=L} = 0$ означает, что в створе сопряжения приплотинного рукава с основным объемом водохранилища давление по глубине распределено по гидростатическому закону, граничное условие $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = 0$ — что на свободной поверхности воды $z = 0$ пренебрегаются волнообразования. Граничное условие $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0$ выражает неподвижность в вертикальном направлении и непроницаемость дна приплотинного рукава.

Граничные условия (5) означают, что гребня плотины $z = 0$ свободна и действующие на нее изгибающий момент и поперечная сила равны нулю, граничные условия (6) — что основание плотины $z = H$ жестко зацементировано.

Выражения (1)–(6) в совокупности представляют краевую задачу совместных свободных колебаний плотины и воды в рукаве. Наиболее полный анализ исследований в данном направлении представлен в монографиях [4–7].

В дифференциальных уравнениях (1) и (4) коэффициенты являются переменными, зависящими от пространственных координат x и z . В связи с этим решение поставленной краевой задачи (1)–(6) аналитическими методами связано с большими математическими трудностями, легко преодолеваемыми в частном случае, когда ширина водоема и створа плотины аппроксимируются экспоненциальной функцией вида

$$B(x, z) = B_0 e^{s_1 x} e^{-s_2 z}, \quad s_1 = \text{const}, \quad s_2 = \text{const}, \quad B_0 = \text{const}. \quad (7)$$

При такой аппроксимации непризматической конфигурации водоема коэффициенты уравнений (1) и (4) становятся постоянными величинами, в силу чего решение краевой задачи существенно облегчается.

Приступая к решению контактной краевой задачи (1)–(6), искомые функции φ и V представим в виде

$$\varphi(x, z, t) = \psi(x, z) e^{(s_2/2)z} \sin \omega t, \quad V(z, t) = W(z) \cos \omega t, \quad (8)$$

где ω — круговая частота собственных колебаний системы. Подставив выражения (7), (8) в (1)–(6) относительно введенных искомых функций ψ и W , получим следующую контактную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + s_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{s_2^2}{4} \psi = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^4 W}{dz^4} - 2s_2 \frac{d^3 W}{dz^3} + s_2^2 \frac{d^2 W}{dz^2} - 12 \frac{\omega^2 W}{a^2 h^2} = -\frac{12}{h^3 E} \rho_1 \omega e^{(s_2/2)z} \psi(0, z), \quad (10)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\omega W(z) e^{-(s_2/2)z}, \quad \psi \Big|_{x=L} = 0, \quad (11)$$

$$\psi \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{s_2}{2} \psi \right) \Big|_{z=H} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{d^3 W}{dz^3} \Big|_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$W \Big|_{z=H} = 0, \quad \frac{dW}{dz} \Big|_{z=H} = 0, \quad (14)$$

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho_2}}.$$

Решение дифференциального уравнения (9) будем искать в виде тригонометрического ряда по синусам

$$\psi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \sin \left(\mu_n \frac{z}{H} \right), \quad (15)$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\mu_n}{H} \cos \mu_n + \frac{s_2}{2} \sin \mu_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (16)$$

или

$$\text{tg } \mu_n = -\frac{2}{s_2 H} \mu_n. \quad (17)$$

Легко проверить, что если μ_n — корень характеристического уравнения (16), то выражение (15) автоматически удовлетворяет граничным условиям (12) [8].

Разложим функцию $W(z)e^{-(s_2/2)z}$ в тригонометрический ряд по ортогональной системе функции в промежутке $(0, L)$ [8]:

$$\sin \mu_1 \frac{z}{H}, \sin \mu_2 \frac{z}{H}, \dots, \sin \mu_n \frac{z}{H}, \dots \quad (18)$$

$$W(z)e^{-(s_2/2)z} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \mu_n \frac{z}{H}, \quad (19)$$

$$\alpha_n = \frac{\int_0^H W(z)e^{-(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} dz}{\int_0^H \sin^2 \mu_n \frac{z}{H} dz}. \quad (20)$$

Подставим разложения (15) и (19) в дифференциальное уравнение (9) и в граничные условия (11) и, приравняв коэффициенты при синусах в левых и правых частях, получим

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + s_1 \frac{d\psi_n}{dx} - \left(\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{s_2^2}{4} \right) \psi_n = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d\psi_n}{dx} \Big|_{x=0} = -\omega\alpha_n, \quad \psi_n \Big|_{x=L} = 0. \quad (22)$$

Решение дифференциального уравнения (21) с граничными условиями (22) имеет следующий вид:

$$\psi_n(x) = -\frac{\omega\alpha_n}{\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n L + \frac{s_1}{2} \operatorname{sh} \lambda_n L} e^{-(s_1/2)x} \operatorname{sh} \lambda_n(x-L) \sin \mu_n \frac{z}{H}, \quad (23)$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{H^2} + \frac{s_1^2}{4} + \frac{s_2^2}{4}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Для функции $\psi(x, z)$ получим ряд

$$\psi(x, z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\alpha_n}{\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n L + \frac{s_1}{2} \operatorname{sh} \lambda_n L} e^{-(s_1/2)x} \operatorname{sh} \lambda_n(x-L) \sin \mu_n \frac{z}{H}. \quad (25)$$

Подставим значения α_n и $\psi(0, z)$ из (20) и (25) в дифференциальное уравнение (10) и получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^4W}{dz^4} - 2s_2 \frac{d^3W}{dz^3} + s_2^2 \frac{d^2W}{dz^2} - 12 \frac{\omega^2 W}{a^2 h^2} = \\ & = -\frac{12}{h^3 a^2} \frac{\rho_1}{\rho_2} \omega^2 e^{(s_2/2)z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n L \sin \mu_n \frac{z}{H}}{\left(\lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n L + \frac{s_1}{2} \operatorname{sh} \lambda_n L \right) \beta_n} \times \int_0^H W(z) e^{-(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} dz, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\beta_n = \frac{L}{2} \frac{2\mu_n - \sin 2\mu_n}{2\mu_n}. \quad (27)$$

Выражение (26) представляет собой интегро-дифференциальное уравнение типа уравнения Фредгольма относительно искомой функции $W(z)$.

Для определения собственной частоты основной формы колебания системы далее будет использован приближенный метод Ритца [9].

Предположим, что на плотину действует равномерно распределенная статическая нагрузка

$$q(z) = q_0 = \text{const.} \quad (28)$$

Поперечный изгиб плотины как непризматической балки описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{h^3}{12} E \frac{d^2}{dz^2} \left(B_0 e^{-s_2 z} \frac{d^2 W}{dz^2} \right) = B_0 e^{-s_2 z} q_0 \quad (29)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{d^2 W}{dz^2} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 W}{dz^3} \right|_{z=0} = 0, \quad (30)$$

$$W \Big|_{z=H} = 0, \quad \left. \frac{dW}{dz} \right|_{z=H} = 0. \quad (31)$$

Решение краевой задачи (29)–(31) имеет вид

$$W(z) = \frac{12q_0}{Eh^3} \varphi_1(z), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = & \frac{z^2}{2s_2^2} + \frac{ze^{s_2 z}}{s_2^3} - \frac{3}{s_2^4} e^{s_2 z} + \left(\frac{2}{s_2^3} e^{s_2 H} - \frac{H}{s_2^2} e^{s_2 H} - \frac{H}{s_2^2} \right) z + \\ & + \frac{3}{s_2^4} e^{s_2 H} - \frac{3H}{s_2^3} e^{s_2 H} + \frac{H^2}{2s_2^2} + \frac{H^2}{s_2^2} e^{s_2 H}. \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь рассмотрим случай, когда на напорную грань плотины действует гидростатическое давление

$$q(z) = q_0 \frac{z}{H}, \quad (34)$$

при котором функция $W(z)$ имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{12q_0}{EHh^3} \varphi_2(z), \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) = & \frac{z^3}{6s_2^2} + \frac{z^2}{s_2^3} + \frac{z}{s_2^4} e^{s_2 z} - \frac{4}{s_2^5} e^{s_2 z} + \left(\frac{3}{s_2^4} e^{s_2 H} - \frac{H}{s_2^3} e^{s_2 H} - \frac{2H}{s_2^3} - \frac{H^2}{2s_2^2} \right) z + \\ & + \frac{4}{s_2^5} e^{s_2 H} - \frac{4H}{s_2^4} e^{s_2 H} + \frac{H^2}{s_2^3} e^{s_2 H} + \frac{H^2}{s_2^3} + \frac{H^3}{3s_2^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно методу Ритца [9] в качестве базовых можно использовать функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Составим линейную комбинацию от базовых функций

$$W(z) = \varphi_1(z)a_1 + \varphi_2(z)a_2, \quad (37)$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные. Также согласно методу Ритца [9] выражение (37) следует подставить в интегро-дифференциальное уравнение (26). В результате получим

$$\begin{aligned} & \left[\varphi_1^{(4)}(z) - 2s_2\varphi_1^{(3)}(z) + s_2^2\varphi_1''(z) - \frac{12\omega^2}{h^2a^2}\varphi_1(z) \right] a_1 + \\ & + \left[\varphi_2^{(4)}(z) - 2s_2\varphi_2^{(3)}(z) + s_2^2\varphi_2''(z) - \frac{12\omega^2}{h^2a^2}\varphi_2(z) \right] a_2 = \\ & = -\frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} (K_{1,n}a_1 + K_{2,n}a_2) e^{(s_2/2)z} \sin \frac{\mu_n}{H} z, \end{aligned} \quad (38)$$

$$k_{1,n} = \int_0^H \varphi_1(z) e^{-(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} dz, \quad k_{2,n} = \int_0^H \varphi_2(z) e^{-(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} dz, \quad (39)$$

$$R_n = \frac{\text{sh } \lambda_n L}{\lambda_n \text{ch } \lambda_n L + \frac{s_1}{2} \text{sh } \lambda_n L}. \quad (40)$$

Легко проверить достоверность следующих равенств:

$$\varphi_1^{(4)}(z) - 2s_2\varphi_1^{(3)}(z) + s_2^2\varphi_1''(z) = 1, \quad (41)$$

$$\varphi_2^{(4)}(z) - 2s_2\varphi_2^{(3)}(z) + s_2^2\varphi_2''(z) = z, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{12\omega^2}{h^2a^2}\varphi_1(z) + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} K_{1,n} e^{(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} \right] a_1 + \\ & + \left[z - \frac{12\omega^2}{h^2a^2}\varphi_2(z) + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} K_{2,n} e^{(s_2/2)z} \sin \mu_n \frac{z}{H} \right] a_2 = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Согласно методу Ритца обе стороны выражения (43) последовательно умножим на базовые функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ и проинтегрируем по переменной z в пределах от 0 до H . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^H \varphi_1(z) dz - \frac{12\omega^2}{h^2a^2} \int_0^H \varphi_1^2(z) dz + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{1,n} d_{1,n} \right] a_1 + \\ & + \left[\int_0^H z\varphi_1(z) dz - \frac{12\omega^2}{h^2a^2} \int_0^H \varphi_2(z)\varphi_1(z) dz + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{2,n} d_{1,n} \right] a_2 = 0, \\ & \left[\int_0^H \varphi_2(z) dz - \frac{12\omega^2}{h^2a^2} \int_0^H \varphi_2(z)\varphi_1(z) dz + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{1,n} d_{2,n} \right] a_1 + \\ & + \left[\int_0^H z\varphi_2(z) dz - \frac{12\omega^2}{h^2a^2} \int_0^H \varphi_2^2(z) dz + \frac{\rho_1\omega^2}{\rho_2} \frac{12}{a^2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{2,n} d_{2,n} \right] a_2 = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$d_{1,n} = \int_0^H e^{(s_2/2)z} \varphi_1(z) \sin \mu_n \frac{z}{H} dz, \quad d_{2,n} = \int_0^H e^{(s_2/2)z} \varphi_2(z) \sin \mu_n \frac{z}{H} dz. \quad (45)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_0^H \varphi_1(z) dz, & m_2 &= \frac{12}{h^2} \int_0^H \varphi_1^2(z) dz - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} d_{1,n} k_{1,n}, \\ m_3 &= \int_0^H z \varphi_1(z) dz, & m_4 &= \frac{12}{h^2} \int_0^H \varphi_1(z) \varphi_2(z) dz - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} d_{1,n} k_{2,n}, \\ P_1 &= \int_0^H \varphi_2(z) dz, & P_2 &= \frac{12}{h^2} \int_0^H \varphi_1(z) \varphi_2(z) dz - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{1,n} d_{2,n}, \\ P_3 &= \int_0^H z \varphi_2(z) dz, & P_4 &= \frac{12}{h^2} \int_0^H \varphi_2^2(z) dz - \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{12}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\beta_n} k_{2,n} d_{2,n}. \end{aligned} \quad (46)$$

В принятых обозначениях система уравнений (44) запишется в виде

$$\begin{cases} \left(m_1 - \frac{\omega^2}{a^2} m_2 \right) a_1 + \left(m_3 - \frac{\omega^2}{a^2} m_4 \right) a_2 = 0, \\ \left(P_1 - \frac{\omega^2}{a^2} P_2 \right) a_1 + \left(P_3 - \frac{\omega^2}{a^2} P_4 \right) a_2 = 0. \end{cases} \quad (47)$$

Приравняв к нулю определитель системы (47), получим частотное уравнение

$$\begin{aligned} & (m_2 P_4 - m_4 P_2) \left(\frac{\omega}{a} \right)^4 - (m_1 P_4 + m_2 P_3 - m_3 P_2 - m_4 P_1) \times \\ & \times \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 + m_1 P_3 - m_3 P_1 = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Решение уравнения (48) относительно круговой частоты собственных колебаний системы имеет вид

$$\begin{aligned} \omega &= a \left(\frac{m_1 P_4 + m_2 P_3 - m_3 P_2 - m_4 P_1}{2(m_2 P_4 - m_4 P_2)} \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{\frac{(m_1 P_4 + m_2 P_3 - m_3 P_2 - m_4 P_1)^2}{4(m_2 P_4 - m_4 P_2)^2} - \frac{m_1 P_3 - m_3 P_1}{m_2 P_4 - m_4 P_2}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (49)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости частоты собственных колебаний плотины от ее высоты, на рис. 3 — графики зависимости частот собственных колебаний системы от формпараметров s_1 и s_2 при высоте плотины $H = 150$ м. Остальные входные параметры имеют те же значения, что приняты к рис. 2.

Вычисления проводились с помощью специально разработанных алгоритмов в среде MATLAB в следующей последовательности.

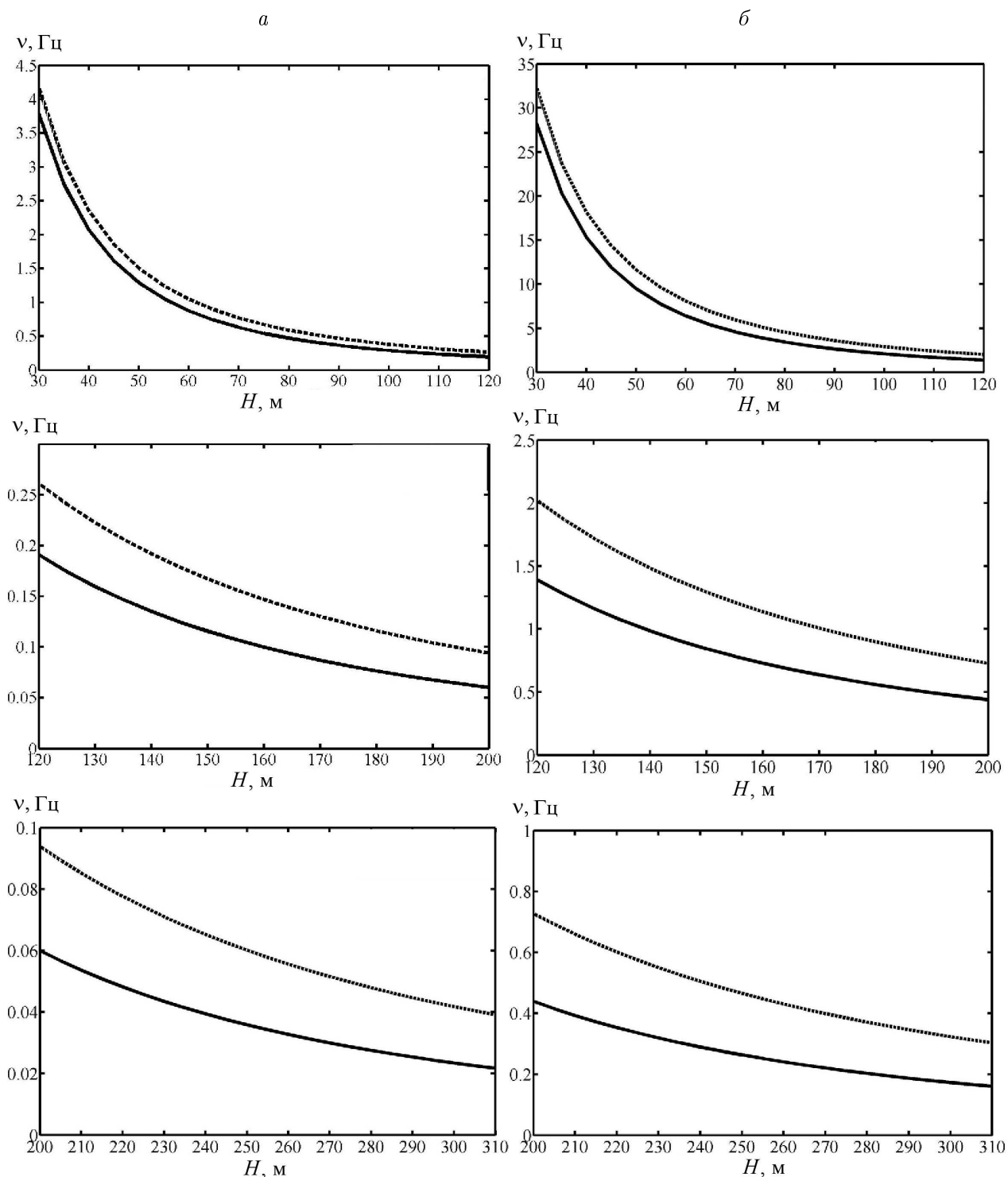


Рис. 2. Зависимость частоты собственных колебаний плотины $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ от ее высоты H : *a* — первая форма колебаний, *б* — вторая форма колебаний; входные параметры: $L = 5000$ м, $\rho_2 = 3000$ кг/м³, $h = 10$ м, $s_1 = \ln(2)/L$, $s_2 = \ln(2)/H$, $E = 2.5 \cdot 10^{10}$ Н/м²; сплошные линии — с учетом, пунктирные — без учета гидродинамического давления воды на плотине

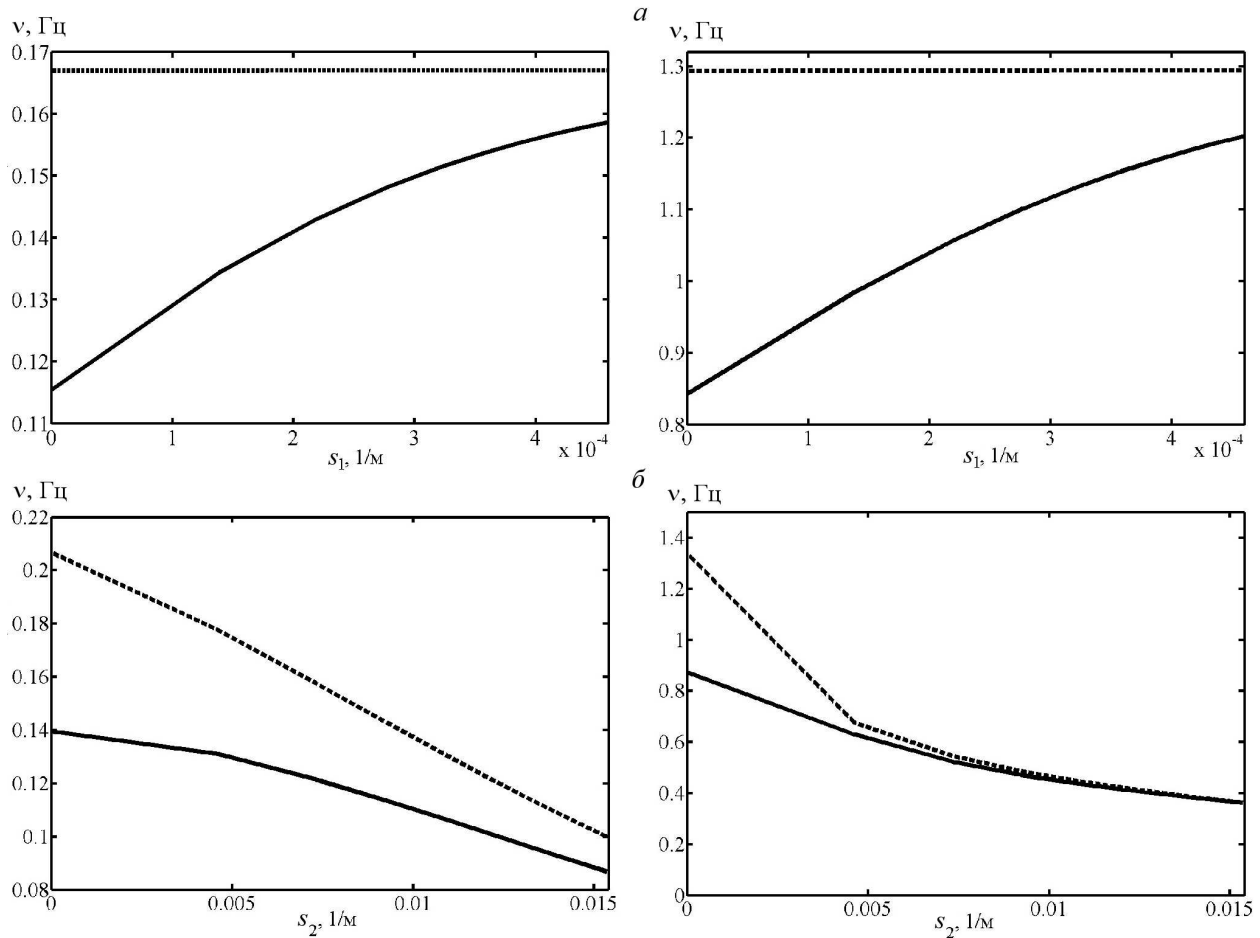


Рис. 3. Зависимость частоты собственных колебаний плотины ν от формпараметров s_1 , s_2 : a — s_1 , первая (слева) и вторая (справа) формы; b — s_2 , первая (слева) и вторая (справа); $H = 150$ м, $L = 5000$ м, $\rho_2 = 3000$ кг/м³, $h = 10$ м, $E = 2,5 \cdot 10^{10}$ Н/м²; сплошные линии — с учетом, пунктирные — без учета гидродинамического давления воды на плотине

I этап. В характеристическое уравнение (16) подставляются значения величин s_2 , H и вычисляется последовательность чисел $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ($n = 200$), представляющих положительные корни характеристического уравнения (16) поставленной краевой задачи. Трансцендентное уравнение (16) решается с помощью встроенной в MATLAB функции "fzero".

Вычисляются последовательности чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots, R_1, R_2, \dots, R_n, \dots \quad (n = 200)$$

по формулам (24), (27) и (40) соответственно.

II этап. Вычисляются последовательности чисел

$$k_{1,n}, k_{2,n}, d_{1,n}, d_{2,n}, m_1, m_2, m_3, m_4, P_1, P_2, P_3, P_4 \quad (n = 200)$$

по формулам (39), (45), (46) соответственно. Определенные интегралы находятся по формуле трапеции.

Вычислительные эксперименты показали, что в бесконечных суммах, содержащихся в формулах (45), (46), достаточная точность достигается при количестве членов $n = 200$. Дальнейший рост числа n на величину сумм практически не влияет.

III этап. Полученные значения вышеперечисленных величин подставляются в формулу (49). В результате получаются два значения круговой частоты, меньшее из которых соответствует первой (основной) форме колебания рассматриваемой системы.

Таким образом, как показали результаты проведенных вычислительных экспериментов, собственные частоты колебаний системы существенно зависят от формпараметров s_1 и s_2 , характеризующих геометрическую конфигурацию чаши водохранилища и створа плотины. Для повышения сейсмостойкости рассматриваемого гидротехнического сооружения в проектных разработках габаритные размеры плотины и водохранилища необходимо подбирать так, чтобы частоты собственных колебаний системы резко отличались от частоты сейсмических колебаний местности.

Список литературы

- [1] МУЗАЕВ И.Д., КУСРАЕВ А.Г., СОЗАНОВ В.Г. Математическое моделирование некоторых задач волновой гидродинамики применительно к горным водоемам // Тр. Ин-та вычисл. технологий СО РАН. Новосибирск. 1995. Т. 4, № 11. С. 164–168.
- [2] МУЗАЕВ И.Д., СОЗАНОВ В.Г. К теории поверхностных гравитационных волн Коши—Пуассона в узких глубоких непризматических водоемах // Изв. вузов. Естеств. науки. 1995. № 3. С. 40–43.
- [3] МУЗАЕВ Н.И., МУЗАЕВ И.Д. Постановка и решение начально-краевой задачи поверхностных гравитационных волн в водохранилище узкоканьонного типа // Там же. 2009. № 2. С. 22–24.
- [4] ГОЛЬДЕНБЛАТ И.И., НИКОЛАЕВКО Н.А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных нагрузок. М.: Госстройиздат, 1961. 317 с.
- [5] КУЛЬМАЧ Т.П. Гидродинамика гидротехнических сооружений. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 190 с.
- [6] УРАЗБАЕВ М.Т. Сейсмостойкость упругих и гидроупругих систем. Ташкент: Фан, 1966. 252 с.
- [7] ШУЛЬМАН С.П. Расчеты сейсмостойкости гидросооружений с учетом влияния водной среды. М.: Энергия, 1976. 335 с.
- [8] КОШЛЯКОВ Н.С., ГЛИНЕР Э.Б., СМИРНОВ М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
- [9] ТИМОШЕНКО С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 440 с.

*Поступила в редакцию 18 июня 2011 г.,
с доработки — 8 августа 2011 г.*