

## Численное моделирование процессов теплопереноса и кинетики напряжений в термодеструктирующих композитных оболочках\*

Ю. И. ДИМИТРИЕНКО<sup>1</sup>, В. В. МИНИН<sup>1</sup>, Е. К. СЫЗДЫКОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия

<sup>2</sup>Государственное машиностроительное конструкторское бюро "Радуга"

им. А.Я. Березняка, Москва, Россия

e-mail: dimit@serv.bmstu.ru

Разработана модель термомеханических процессов в композитных тонкостенных оболочках при высоких температурах с учетом эффектов термодеструкции. Предложен численный метод для задачи расчета термонапряжений внутреннего теплопереноса в композитных термодеструктирующих оболочках, основанный на процедуре метода конечных элементов для задачи теории оболочек и методе малого параметра в сочетании с пошаговым конечно-разностным методом для системы уравнений внутреннего теплопереноса. Проведены расчеты термонапряжений в композитной оболочке параболической формы при локальном лазерном нагреве, которые показали, что из-за достаточно низкой межслойной прочности композитов при высоких температурах даже при сравнительно невысокой мощности нагрева может происходить термомеханическое разрушение композитных конструкций. Предложена методика оценки порогового уровня терморазрушения.

*Ключевые слова:* композитные оболочки, термодеструкция, прочность, метод конечных элементов.

Оболочки и пластины из полимерных композиционных материалов достаточно активно применяют при создании теплонагруженных элементов конструкций летательных аппаратов. Особый интерес имеет проблема исследования термомеханических эффектов взаимодействия излучений с композитными материалами. В отличие от металлических материалов в композитах даже при сравнительно невысоком уровне нагрева (до 1000 °С), когда процессы испарения еще не реализуются, возникает явление термодеструкции полимерной матрицы, сопровождающееся внутренним газообразованием и образованием пиролитической фазы. Следствием внутренних физико-химических превращений матрицы являются специфические эффекты термомеханического поведения композитов: изменение знака термического расширения на отрицательный (химическая усадка), резкое уменьшение значений модулей упругости в зоне нагрева, возникновение локальных пиков порового давления [1–5]. В [1, 2] была разработана теория четырехфазного термодеструктирующего композита, описывающая основные закономерности и особенности поведения композитов при нагреве до высоких температур. Целью настоящей работы является применение этой теории для моделирования термомеханического

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-00323-а).

поведения тонкостенных композитных оболочечных конструкций при локальном нагреве излучением.

## 1. Уравнения теории термодеструктурирующих композитных оболочек

Система уравнений теории термодеструктурирующих композитных оболочек в ортонормированных координатах  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ , связанных со срединной поверхностью оболочки (ось  $Oq_3$  направлена по нормали к срединной поверхности), имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \lambda_1 \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \lambda_2 \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \lambda_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \right) + \\ &+ c_g \left( \frac{K_1}{A_1^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_1} \frac{\partial p_g}{\partial q_1} + \frac{K_2}{A_2^2} \frac{\partial \theta}{\partial q_2} \frac{\partial p_g}{\partial q_2} + K_3 \frac{\partial \theta}{\partial q_3} \frac{\partial p_g}{\partial q_2} \right) - \Delta e^0 J, \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{A_2 K_1}{A_1} \frac{\partial p_g}{\partial q_1} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{A_1 K_2}{A_2} \frac{\partial p_g}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( K_3 \frac{\partial p_g}{\partial q_3} \right) + \Gamma J, \\ \rho_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial t} &= -J, \quad J = J_0 \varphi_b \exp \left( -\frac{E_a}{R_g \theta} \right), \quad p_g = R_g \theta \rho_g / \varphi_g - \end{aligned} \quad (1)$$

уравнения внутреннего тепломассопереноса в оболочке;

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (A_\beta T_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta} (A_\alpha T_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} T_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} T_{\alpha\beta} + A_\alpha A_\beta k_\alpha Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial P_g}{\partial q_\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (A_\beta M_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial q_\beta} (A_\alpha M_{\alpha\beta}) - \frac{\partial A_\beta}{\partial q_\alpha} M_{\beta\beta} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} M_{\alpha\beta} - A_\alpha A_\beta Q_\alpha - A_\beta \frac{\partial M_g}{\partial q_\alpha} &= 0, \\ -A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \frac{\partial A_2 Q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_1 Q_2}{\partial q_2} - p_e A_1 A_2 - (k_1 + k_2) A_1 A_2 \bar{\varphi}_g P_g &= 0, \\ \alpha, \beta = 1, 2; \quad \alpha \neq \beta - \end{aligned} \quad (2)$$

уравнения равновесия оболочки;

$$\begin{aligned} e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial U_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} U_\beta + k_\alpha W, \quad 2e_{\alpha 3} = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} + \gamma_\alpha - k_\alpha U_\alpha, \\ 2e_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial U_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial U_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial q_2} U_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} U_2 \right), \\ \kappa_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_\alpha}{\partial q_\beta} \gamma_\beta, \quad 2\kappa_{\alpha 3} = -k_\alpha \gamma_\alpha, \\ 2\kappa_{12} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial q_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_2}{\partial q_1} - \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial q_2} \gamma_1 + \frac{\partial A_2}{\partial q_1} \gamma_2 \right) - \end{aligned} \quad (3)$$

кинематические соотношения;

$$T_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 (C_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + N_{\alpha\beta} \kappa_{\beta\beta}) - P_{g\alpha} - \overset{\circ}{T}_\alpha,$$

$$M_{\alpha\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 (N_{\alpha\beta}e_{\beta\beta} + D_{\alpha\beta}\kappa_{\beta\beta}) - M_{g\alpha} - \overset{\circ}{M}_{\alpha},$$

$$T_{12} = 2(C_{66}e_{12} + N_{66}\kappa_{12}), \quad M_{12} = 2(N_{66}e_{12} + D_{66}\kappa_{12}),$$

$$Q_{\alpha} = \bar{C}_{\alpha+3,\alpha+3}e_{\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2, \quad - \quad (4)$$

определяющие соотношения. Здесь  $T_{\alpha\alpha}, T_{\alpha\beta}, M_{\alpha\alpha}, M_{\alpha\beta}$  — усилия и моменты в оболочке;  $Q_{\alpha}$  — перерезывающие усилия;  $P_g, M_g$  — усилие и момент порового давления в оболочке;  $e_{\alpha\alpha}, e_{\alpha 3}, e_{12}$  — деформации срединной поверхности оболочки;  $\kappa_{\alpha\alpha}, \kappa_{\alpha 3}, \kappa_{12}$  — искривления срединной поверхности;  $U_{\alpha}, \gamma_{\alpha}, W$  — перемещения, углы искривления и прогиб срединной поверхности;  $A_{\alpha}, k_{\alpha}$  — параметры первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки [3];  $\theta$  — температура;  $\varphi_b, \varphi_p, \varphi_g, \varphi_f$  — объемные концентрации фаз композита (полимерной фазы матрицы, пиролитической фазы, газовой фазы и фазы армирующего наполнителя), причем  $\varphi_g = 1 - \varphi_b - \varphi_p - \varphi_f$ ,  $\varphi_f = \text{const}$  (полагаем, что волокна не деструктурируют),  $\varphi_p = (\varphi_b(0) - \varphi_b(t))(\rho_b/\rho_p)(1 - \Gamma)$ ;  $\rho_b, \rho_p, \rho_f$  — плотности твердых фаз (полагаем постоянными);  $\rho_g = \rho_g^0\varphi_g$  — приведенная плотность газовой фазы;  $\rho_g^0$  — истинная плотность газовой фазы;  $p_g$  — давление газообразных продуктов в порах композита;  $c_b, c_p, c_g, c_f$  — теплоемкости фаз;  $\rho = \rho_b\varphi_b + \rho_p\varphi_p + \rho_g + \rho_f\varphi_f$  — плотность композита;  $c = (\rho_b c_b \varphi_b + \rho_p c_p \varphi_p + \rho_g c_g + \rho_f c_f \varphi_f) / \rho$  — теплоемкость композита;  $\Gamma$  — коэффициент газификации;  $J$  — массовая скорость термодеструкции;  $\Delta e^0$  — удельная теплота терморазложения;  $E_a$  — энергия активации,  $\lambda_{\alpha}$  и  $K_{\alpha}$  — коэффициенты теплопроводности и газопроницаемости композита;  $R_g$  — газовая постоянная.

На внешней поверхности оболочки  $q_3 = h/2$  действует локальный нагрев излучением, и соответствующее тепловое граничное условие к системе (4) имеет вид  $q_{\lambda} = q_{0+}$ , где  $q_{\lambda} = \lambda_3(\partial\theta/\partial q_3)$  — тепловой поток, затрачиваемый на нагрев оболочки;  $q_{0+} = q_C + q_R - q_{BL} - q_{RW}$  — суммарный тепловой поток к поверхности;  $q_C = (\alpha^T/c_{ge})(c_{ge}\theta_e - c\theta)$  — конвективный тепловой поток;  $\alpha^T$  — коэффициент теплообмена;  $q_R = q_R^0 \exp(-r/\delta)$  — лучистый тепловой поток, подводимый к оболочке за счет локального нагрева;  $\delta$  — эффективный радиус пятна нагрева;  $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ ,  $q_{RW} = \varepsilon_s \sigma_{SB} \theta^4$  — лучистый тепловой поток, отводимый от нагретой поверхности композита;  $\sigma_{SB}$  — постоянная Стефана — Больцмана;  $\varepsilon_s$  — интегральный коэффициент излучения;  $q_{BL} = \gamma_{bl} \rho_g v_{g3} (c_{ge} \theta_e - c\theta)$  — конвективный тепловой поток, отводимый от поверхности вследствие вдува продуктов через поры;  $\gamma_{BL}$  — коэффициент вдува;  $v_{g3} = -R_g K_3 (\partial(\rho_g \theta) / \partial q_3)$  — нормальная скорость фильтрации газообразных продуктов в порах;  $\theta_e$  и  $c_{ge}$  — температура и теплоемкость внешней газовой среды.

Мембранные, смешанные и изгибные жесткости оболочки  $C_{\alpha\beta}, N_{\alpha\beta}, D_{\alpha\beta}$  вследствие размягчения полимерной матрицы и ее термодеструкции изменяются при нагреве. Это изменение для ортотропных композитных оболочек тканевой структуры, согласно модели [1], описывается с помощью двух функций  $a_{\theta 1}$  и  $a_{\theta 2}$ :

$$C_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(0)}, \quad N_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(1)}, \quad D_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} a_{\theta 1}^{(2)},$$

$$C_{\alpha+3,\alpha+3} = \overset{\circ}{C}_{\alpha+3,\alpha+3} a_{\theta 2}^{(0)}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$a_{\theta k}^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta k} q_3^j dq_3, \quad k = 1, 2; \quad j = 0, 1, 2, \quad (5)$$

где  $\overset{\circ}{C}_{\alpha\beta}$  — мембранные жесткости при нормальной температуре  $\theta = \theta_0 = 293$  К. Функции  $a_{\theta k} = a_{\theta k}(\theta, \varphi_b)$  зависят от температуры  $\theta$  и концентрации полимера  $\varphi_b$ , их выражение приведено в [1].

Усилия  $\overset{\circ}{T}_\alpha$  и моменты  $\overset{\circ}{M}_\alpha$  тепловых напряжений зависят от тепловой деформации  $\overset{\circ}{\varepsilon}_\alpha$  композита:

$$\overset{\circ}{T}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(0)}, \quad \overset{\circ}{M}_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \overset{\circ}{C}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(1)},$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 1} \overset{\circ}{\varepsilon}_\beta^j q_3^j dq_3, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_3^{(j)} = \int_{-h/2}^{h/2} a_{\theta 2} \overset{\circ}{\varepsilon}_3^j q_3^j dq_3, \quad j = 0, 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_\gamma = (\alpha_f \varphi_f B_\gamma + \alpha_b \varphi_b \Omega_\gamma)(\theta - \theta_0) + \alpha_p \Omega_\gamma \int_0^t (\theta(t) - \theta(\tau)) \overset{\circ}{\varphi}_p d\tau - \beta_p \varphi_p \Omega_\gamma, \quad \gamma = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь  $\alpha_f, \alpha_b, \alpha_p$  — коэффициенты теплового расширения волокна, полимера и коксового остатка термодеструкции полимера соответственно;  $\beta_p$  — коэффициент усадки;  $B_\gamma, \Omega_\gamma$  — коэффициенты, зависящие от расположения волокон в композите [1].

Усилия  $P_{g\alpha}$  и моменты  $M_{g\alpha}$  межфазного взаимодействия, а также усилия  $P_g$  и моменты  $M_g$  порового давления в оболочке вычисляются следующим образом:

$$P_{g\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} p_g f_\alpha dq_3, \quad M_{g\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} p_g f_\alpha q_3 dq_3,$$

$$P_g = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_g p_g dq_3, \quad M_g = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_g p_g q_3 dq_3, \quad (8)$$

где  $\varphi_g$  — пористость композита:  $\varphi_g = 1 - \varphi_b - \varphi_p - \varphi_f$ ,  $f_\alpha$  — коэффициент межфазного взаимодействия [1].

Коэффициенты теплопроводности  $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\theta, \varphi_b, \varphi_f, \varphi_g)$  являются функциями температуры и содержания фаз композита и вычисляются по формулам, приведенным в [1]. Коэффициенты теплоемкости фаз  $c_b, c_p, c_g, c_f$  полагаются зависящими от температуры [1]. Коэффициенты газопроницаемости  $K_\alpha$  вычисляются по формуле  $K_\alpha = \overset{\circ}{K}_\alpha \exp(s\varphi_g^{1/3})$ , где  $\overset{\circ}{K}_\alpha$  и  $s$  — константы.

## 2. Вариационная постановка задачи

Сформулируем вариационную постановку задачи механики (2)–(4), основанную на вариационном принципе типа принципа Хеллинера — Рейсснера [6]. Вариационное уравнение типа уравнения Хеллинера — Рейсснера для задачи (2)–(4) имеет вид  $\delta J_\Sigma(u, e) = 0$ , где  $J_\Sigma(u, e)$  — следующий функционал:

$$J_\Sigma(u, e) = \int_\Sigma \{e\}^T [E] [L] \{u\} d\Sigma - \frac{1}{2} \int_\Sigma \{e\}^T [E] \{e\} d\Sigma + A_\Sigma^e, \quad (9)$$

$A_\Sigma^e$  — работа суммарных внешних сил:

$$A_\Sigma^e = - \int_{\partial\Sigma} \{\dot{S}\} \{u\} dl - \int_\Sigma (\{\dot{T}\} + \{F\}) \{u\} d\Sigma.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \{u\} &= (U_1, U_2, W, \gamma_1, \gamma_2)^T, \quad \{e\} = (e_{11}, e_{22}, e_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}, e_{13}, e_{23})^T, \\ \{T\} &= \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}, Q_1, Q_2\}^T, \\ \{\dot{S}\} &= \{\dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, \dot{Q}\} - \end{aligned} \quad (10)$$

координатные столбцы перемещений, деформаций, усилий и заданных усилий на контуре  $\partial\Sigma$  срединной поверхности;  $p_e$  — перепад давлений на оболочке,

$$\begin{aligned} \{F\} &= \{\partial P_g / \partial q_1, \partial P_g / \partial q_2, (k_1 + k_2)P_g, \partial M_g / \partial q_1, \partial M_g / \partial q_2\}, \\ \{\dot{T}\} &= \{\dot{T}_{11}, \dot{T}_{22}, 0, \dot{M}_{11}, \dot{M}_{22}, 0, 0, 0\}^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Выше обозначены:  $[E]$  — обобщенная матрица упругости размером  $8 \times 8$ , связывающая столбцы усилий и деформаций  $\{T\} = [E] \{e\}$ ; эта матрица образована из матриц  $[C]$ ,  $[N]$ ,  $[D]$ ,  $[K]$ :

$$\begin{aligned} [E] &= \begin{pmatrix} [C] & [N] & 0 \\ [N] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [K] \end{pmatrix}, \quad [C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \\ [N] &= \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & 0 \\ N_{12} & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{66} \end{pmatrix}, \quad [D] = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix}, \quad [K] = \begin{pmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Матрица частных производных  $[L]$  имеет вид

$$[L]_{(8 \times 5)} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & k_1 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & k_2 & 0 & 0 \\ (l_{22} - l_{21})/2 & (l_{11} - l_{12})/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{11} & l_{12} \\ 0 & 0 & 0 & l_{21} & l_{11} \\ 0 & 0 & 0 & (l_{22} - l_{21})/2 & (l_{11} - l_{12})/2 \\ -k_1/2 & 0 & l_{11}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -k_2/2 & l_{22}/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где

$$l_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial}{\partial q_\alpha}, \quad l_{12} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial q_2}, \quad l_{21} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial q_1} -$$

дифференциальные операторы. Полагая вариации  $\delta\{u\}$  и  $\delta\{e\}$  независимыми, из (9) получаем две группы вариационных уравнений

$$\int_\Sigma \{e\}^T [D] [L] \delta\{u\} d\Sigma + \delta A_\Sigma^e = 0, \quad \int_\Sigma \delta\{e\}^T [D] ([L] \{u\} - \{e\}) d\Sigma = 0. \quad (14)$$

### 3. Применение метода конечного элемента для моделирования термонапряжений в композитных оболочках

Решение вариационных уравнений (14) будем искать методом конечного элемента (МКЭ). В качестве конечного элемента (КЭ) выберем треугольный шестиузловой КЭ с независимой аппроксимацией перемещений и деформаций

$$\{u\} = [\Phi] \{v\}, \quad \{e\} = [\omega] \{b\}, \quad (15)$$

где  $\{v\}$  — столбец перемещений в узлах размером  $30 \times 1$ ;  $\{b\}$  — столбец деформаций в узлах размером  $24 \times 1$ ;  $[\Phi]$ ,  $[\omega]$  — матрицы функций формы с размерами  $5 \times 30$  и  $8 \times 24$  соответственно. Подставляя (15) в систему (14), получим уравнения для нахождения  $\{v\}$  и  $\{b\}$ :

$$[G][H]^{-1}[G]\{v\} + \{f\} = 0, \quad \{b\} = [H]^{-1}[G]^T\{v\}, \quad (16)$$

здесь

$$[G] = \int_{\Sigma} [\omega]^T [E] [B] d\Sigma, \quad [H] = \int_{\Sigma} [\omega]^T [E] [\omega] d\Sigma, \quad (17)$$

$$[B] = [L][\Phi], \quad \{f\} = - \int_{\Sigma} (\{\overset{\circ}{T}\} + \{F\}) d\Sigma - \int_{\delta\Sigma} \{\overset{\circ}{S}\} dl.$$

Матрицу функций формы  $[\Phi]$  представим в блочном матричном виде:

$$\underset{(5 \times 30)}{\Phi} = [\Phi_{(1)}, \Phi_{(2)}, \dots, \Phi_{(6)}],$$

где  $\Phi_{(i)} = \phi_i I$ ;  $I$  — единичная матрица размером  $5 \times 5$ ;  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) — квадратичные функции формы, для представления которых удобно воспользоваться естественными безразмерными (барицентрическими) координатами [7]:

$$\phi_1 = L_1(2L_1 - 1), \quad \phi_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad \phi_3 = L_3(2L_3 - 1),$$

$$\phi_4 = 4L_1L_2, \quad \phi_5 = 4L_2L_3, \quad \phi_6 = 4L_3L_1.$$

Нумерация функций формы соответствует нумерации узлов элемента. Барицентрические координаты  $L_i$  определяются через координаты  $q_1, q_2$  оболочки следующим образом:

$$L_i = \frac{1}{2S}(a_{(i)} + b_{(i)}q_1 + c_{(i)}q_2), \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$a_{(1)} = q_{1(2)}q_{2(3)} - q_{1(3)}q_{2(2)}, \quad b_{(1)} = q_{2(2)} - q_{2(3)}, \quad c_{(1)} = q_{1(3)} - q_{1(2)}, \quad 2S = b_{(1)}c_{(2)} - b_{(2)}c_{(1)},$$

$q_{1(i)}, q_{2(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — координаты узлов треугольного КЭ. Остальные коэффициенты  $a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}$  находятся с помощью круговой перестановки индексов, заключенных в круглые скобки.

Матрица функций формы  $[\omega]$  имеет блочную диагональную структуру

$$\underset{(8 \times 24)}{\omega} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Матрица  $[B]$  имеет размер  $8 \times 30$  и с учетом блочной структуры матрицы функций форм  $\Phi$  ее можно представить в виде  $B_{(8 \times 30)} = [B_{(1)}, \dots, B_{(6)}]$ , где матричные блоки  $B_{(i)}$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) определяются соотношением  $B_{(i)}_{(8 \times 5)} = [L]\Phi_{(i)}$ . Подставляя выражение (13) для матрицы  $[L]$  в это соотношение, получим

$$B_{(i)}_{(8 \times 5)} = \begin{bmatrix} Z_{xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{yi} & 0 & 0 & 0 \\ Z_{yi} & Z_{xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_{xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{yi} \\ 0 & 0 & 0 & Z_{yi} & Z_{xi} \\ 0 & 0 & Z_{xi} & \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_{yi} & 0 & \phi_i \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_{xi} &= (b_{(i)}/2S) (4L_i - 1), & Z_{yi} &= (c_{(i)}/2S) (4L_i - 1), & i &= 1, 2, 3, \\ Z_{x4} &= \frac{2}{S}(b_{(1)}L_2 + b_{(2)}L_1), & Z_{x5} &= \frac{2}{S}(b_{(2)}L_3 + b_{(3)}L_2), & Z_{x6} &= \frac{2}{S}(b_{(3)}L_1 + b_{(1)}L_3), \\ Z_{y4} &= \frac{2}{S}(c_{(1)}L_2 + c_{(2)}L_1), & Z_{y5} &= \frac{2}{S}(c_{(2)}L_3 + c_{(3)}L_2), & Z_{y6} &= \frac{2}{S}(c_{(3)}L_1 + c_{(1)}L_3). \end{aligned}$$

Матрица  $H$  для отдельного выбранного КЭ имеет вид

$$H_{(24 \times 24)} = \int_S \begin{bmatrix} L_1 L_1 D & L_1 L_2 D & L_1 L_3 D \\ L_1 L_2 D & L_2 L_2 D & L_2 L_3 D \\ L_1 L_3 D & L_2 L_3 D & L_3 L_3 D \end{bmatrix} d\Sigma. \quad (20)$$

Для решения систем линейных уравнений (16) был применен метод сопряженного градиента.

#### 4. Метод решения уравнений тепломассопереноса в оболочке

Непосредственное решение системы уравнений тепломассопереноса (1) в трехмерной постановке для тонкостенных оболочек связано с определенными трудностями при использовании как конечно-элементных, так и конечно-разностных методов. Для того, чтобы получить достаточно высокую точность решения задачи (обычно важно иметь достаточно точное распределение полей температуры и порового давления по толщине), необходимо применять очень мелкие сетки, с числом  $N$  элементов по толщине, как правило, не менее 20–30. Это приводит к необходимости генерирования сеток с большим числом трехмерных КЭ для всей оболочки —  $O(N^3(l_0/h)^2) \sim 3 \cdot 10^8$ , где  $l_0$  — характерный размер оболочки по координатам  $q_1, q_2$ . Учитывая, что система (1) является нелинейной и для ее решения приходится применять итерационные методы, использование больших сеток приводит к значительному времени вычислений. Аналогичные проблемы возникают и в случае применения конечно-разностных методов.

В целях создания эффективного вычислительного метода решения системы уравнений (1) для оболочек, подверженных локальному нагреву, был предложен следующий алгоритм. При локальном нагреве вся поверхность оболочки может быть условно

разделена на две части:  $\Sigma_{e1}$  (в которой задана “основная часть” плотности лучистого теплового потока  $q_R$ ) и  $\Sigma_{e2}$  (оставшаяся часть внешней поверхности, где плотность теплового потока  $q_R$  существенно меньше). Тогда решение системы (1) можно также разделить на два этапа: решение в области  $V_1$ , граница которой содержит поверхность  $\Sigma_{e1}$ , и решение в оставшейся области  $V_2$  задачи ( $V_1 \cup V_2 = V$ ). В области  $V_1$  будем решать общую систему уравнений (1) в трехмерной постановке, а в области  $V_2$  — упрощенную одномерную (по координате  $q_3$ ) систему уравнений, решение которой зависит от координат  $q_1, q_2$  только параметрически. В строгой постановке решение этих задач связано за счет граничных условий на поверхности раздела  $\Sigma_{12}$  областей  $V_1$  и  $V_2$ . Однако если часть поверхности  $\Sigma_{e1}$  выбрана таким образом, что на ее границе  $\partial\Sigma_{e1}$  плотность теплового потока  $q_R$  существенно уменьшается по сравнению с максимальным его значением, то можно использовать приближенную постановку, в которой граница раздела  $\Sigma_{12}$  считается теплоизолированной. В результате задачи для областей  $V_1$  и  $V_2$  становятся не связанными. Размеры части  $\Sigma_{e1}$ , обеспечивающие требуемые условия уменьшения плотности теплового потока на границе  $\Sigma_{12}$ , подбираются экспериментально путем численного решения задачи для области  $V_1$ . Для рассматриваемых относительно малых времен прогрева фронт прогрева от локального источника не успевает дойти до границы локальной области  $\Sigma_{12}$ , поэтому условие тепловой изоляции для этих моментов времени выполняется с высокой степенью точности.

Если на поверхности оболочки действует только плотность лучистого теплового потока  $q_R$ , то можно ограничиться решением задачи для области  $V_1$ , что далее и было осуществлено. Если кроме локального теплового потока излучением на внешней поверхности действует “медленно изменяющийся” конвективный тепловой поток  $q_C$ , то необходимо решение обеих задач: для областей  $V_1$  и  $V_2$ .

Будем рассматривать систему (1) для тонкой оболочки и запишем ее в безразмерном виде. Для этого введем в рассмотрение характерные значения: времени  $t_0$ , продольных координат  $q_1$  и  $q_2 - l_0$ , поперечной координаты  $h$  (толщина оболочки),  $A_\alpha^0$  — коэффициентов квадратичной формы срединной поверхности, плотности  $\rho_0$ , удельной теплоемкости  $c_0$ , температуры  $\theta_0$ , теплопроводности  $k_0$ , газопроницаемости  $K_0$ , скорости тепломассопереноса  $J_0$ , а также соответствующие им безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t/t_0, \quad \bar{q}_I = q_I A_I^0 / l_0, \quad \bar{q}_3 = q_3 / h, \quad \bar{A}_\alpha = A_\alpha / A_\alpha^0, \\ \bar{\rho}_g &= \rho_g \varphi_g / \rho_0, \quad \bar{\rho}_b = \rho_b / \rho_0, \quad \bar{\rho}_p = \rho_p / \rho_0, \quad \bar{\rho}_f = \rho_f / \rho_0, \quad \bar{\rho} = \rho / \rho_0, \\ \bar{\theta} &= \theta / \theta_0, \quad \bar{c}_i = c_i / c_0 \quad (i = f, b, p, g), \quad \bar{c} = c / c_0, \\ \bar{\lambda}_\alpha &= \lambda_\alpha / \lambda_0, \quad \bar{K}_\alpha = K_\alpha / K_0, \quad \bar{J} = J / J_0, \quad \bar{p}_{e\pm} = \frac{p_{e\pm}}{\rho_0 R_g \theta_0}, \quad \bar{q}_{0\pm} = \frac{q_{0\pm} h}{\lambda_0 \theta_0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Тогда систему уравнений тепломассопереноса (1) в безразмерном виде можно представить следующим образом:

$$\bar{\rho}_b \frac{\partial \varphi_b}{\partial \bar{t}} = -F_g \bar{J}, \quad \bar{p}_g = \bar{\rho}_g \bar{\theta} / \varphi_g, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_g}{\partial \bar{t}} = \frac{F_r \beta^2}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \left( \frac{\bar{A}_2 \bar{K}_1}{A_1} \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{q}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{q}_2} \left( \frac{\bar{A}_1 \bar{K}_2}{A_2} \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{q}_2} \right) \right) + F_r \frac{\partial}{\partial \bar{q}_3} \left( \bar{K}_3 \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{q}_3} \right) + F_g \Gamma \bar{J}, \quad (23)$$



$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{c} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = & \frac{F_0 \beta^2}{\bar{A}_1 \bar{A}_2} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{q}_1} \left( \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{A}_2}{\bar{A}_1} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{q}_2} \left( \frac{\bar{\lambda}_2 \bar{A}_1}{\bar{A}_2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \right) \right) + F_0 \frac{\partial}{\partial \bar{q}_3} \left( \bar{\lambda}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_3} \right) + \\ & + \beta^2 F_r \bar{c}_g \left( \frac{\bar{K}_1}{\bar{A}_1^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_1} \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{q}_1} + \frac{\bar{K}_2}{\bar{A}_2^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_2} \frac{\partial \bar{p}_g}{\partial \bar{q}_2} \right) + F_r \bar{c}_g \bar{K}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{q}_3} - F_t F_g \bar{J}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$F_0 = \frac{\lambda_0 t_0}{\rho_0 c_0 h^2}, \quad F_r = \frac{K_0 R_g \theta_0 t_0}{h^2}, \quad F_g = \frac{J_0 t_0}{\rho_0}, \quad F_t = \frac{\Delta e^0}{c_0 \theta_0}, \quad \beta = \frac{h}{l_0} \quad (25)$$

безразмерные параметры (критерии). Граничные и начальные условия, налагаемые на эту систему, в безразмерном виде имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{q}_3 = \frac{1}{2} : \quad \bar{k}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_3} = \bar{q}_{0+}, \quad \bar{\rho}_g \bar{\theta} = \bar{p}_{e+}, \quad \bar{q}_3 = -\frac{1}{2} : \quad -\bar{k}_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_3} = \bar{q}_{0-}, \quad \bar{K}_3 \frac{\partial \bar{\rho} \bar{\theta}}{\partial \bar{q}_3} = 0, \\ t = 0 : \quad \bar{\rho}_g = \bar{\rho}_{g0}, \quad \bar{\theta} = \bar{\theta}_0, \quad \varphi_p = \varphi_{p0}. \end{aligned} \quad (26)$$

Задачу (22)–(24), (26) для области  $V_1$  будем называть локальной задачей тепломассопереноса. Для ее численного решения применим конечно-разностный метод в сочетании с пошаговым методом линеаризации. Введем конечно-разностную сетку для области  $V_1$ , узлы которой обозначим  $\bar{q}_{1i}$ ,  $\bar{q}_{2j}$ ,  $\bar{q}_{3k}$  ( $i = 1, \dots, N_1$ ,  $j = 1, \dots, N_2$ ,  $k = 1, \dots, N_3$ ). Обозначим значения функций в узлах разностной сетки на  $m$ -м временном шаге  $\bar{\theta}_{ijk}^m$ ,  $\bar{p}_{gijk}^m$  и введем разностные операторы

$$\Lambda_{\rho 1} \bar{\rho}_g^{m+1} = \frac{F_r \beta^2}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_1^2} \left( \left( \frac{\bar{A}_2 \bar{K}_1}{\bar{A}_1} \right)_{i+1,jk}^m (\bar{p}_{gi+1,jk}^{m+1} - \bar{p}_{gijk}^{m+1}) - \left( \frac{\bar{A}_2 \bar{K}_1}{\bar{A}_1} \right)_{ijk}^m (\bar{p}_{gijk}^{m+1} - \bar{p}_{gi-1,jk}^{m+1}) \right),$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\rho 2} \bar{\rho}_g^{m+1} = & \frac{F_r \beta^2}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_2^2} \left( \left( \frac{\bar{A}_1 \bar{K}_2}{\bar{A}_2} \right)_{ij+1,k}^m (\bar{p}_{gij+1,k}^{m+1} - \bar{p}_{gijk}^{m+1}) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\bar{A}_1 \bar{K}_2}{\bar{A}_2} \right)_{ij-1,k}^m (\bar{p}_{gijk}^{m+1} - \bar{p}_{gij-1,k}^{m+1}) \right), \end{aligned}$$

$$\Lambda_{\rho 3} \bar{\rho}_g^{m+1} = \frac{F_r}{\Delta q_3^2} (\bar{K}_{3,ijk+1}^m (\bar{p}_{gijk+1}^{m+1} - \bar{p}_{gijk}^{m+1}) - \bar{K}_{3,ijk}^m (\bar{p}_{gijk}^{m+1} - \bar{p}_{gijk-1}^{m+1})),$$

$$\Lambda_1 \bar{\theta}^{m+1} = \frac{F_0}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_1^2} \left( \left( \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{A}_2}{\bar{A}_1} \right)_{i+1,jk}^m (\bar{\theta}_{i+1,jk}^{m+1} - \bar{\theta}_{ijk}^{m+1}) - \left( \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{A}_2}{\bar{A}_1} \right)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1} - \bar{\theta}_{i-1,jk}^{m+1}) \right),$$

$$\Lambda_2 \bar{\theta}^{m+1} = \frac{F_0}{(\bar{A}_1 \bar{A}_2)_{ijk} \Delta q_2^2} \left( \left( \frac{\bar{\lambda}_2 \bar{A}_1}{\bar{A}_2} \right)_{ij+1,k}^m (\bar{\theta}_{ij+1,k}^{m+1} - \bar{\theta}_{ijk}^{m+1}) - \left( \frac{\bar{\lambda}_2 \bar{A}_1}{\bar{A}_2} \right)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1} - \bar{\theta}_{ij-1,k}^{m+1}) \right),$$

$$\Lambda_3 \bar{\theta}^{m+1} = \frac{F_0}{\Delta q_3^2} (k_{3,ijk+1}^m (\bar{\theta}_{ijk+1}^{m+1} - \bar{\theta}_{ijk}^{m+1}) - k_{3,ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1} - \bar{\theta}_{ijk-1}^{m+1})),$$

$$\begin{aligned} f^m = & \frac{\beta^2 F_r}{4 \Delta q_1^2} \left( \frac{\bar{c}_g \bar{K}_1}{\bar{A}_1^2} \right)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{i+1,jk}^m - \bar{\theta}_{i-1,jk}^m) (\bar{p}_{gi+1,jk}^m - \bar{p}_{gi-1,jk}^m) + \\ & + \frac{\beta^2 F_r}{4 \Delta q_2^2} \left( \frac{\bar{c}_g \bar{K}_2}{\bar{A}_2^2} \right)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ij+1,k}^m - \bar{\theta}_{ij-1,k}^m) (\bar{p}_{gij+1,k}^m - \bar{p}_{gij-1,k}^m) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F_r}{4\Delta q_3^2} (\bar{c}_g \bar{K}_3)_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk+1}^m - \bar{\theta}_{ijk-1}^m) (\bar{p}_{gijk+1}^m - \bar{p}_{gijk-1}^m) - F_t F_g \bar{J}_{ijk}^m, \\
f_\rho^m & = F_g \Gamma \bar{J}_{ijk}^m, \quad \bar{p}_{gijk}^{m+1} = \bar{\rho}_{gijk}^{m+1} \bar{\theta}_{ijk}^m / \varphi_{gijk}^m, \quad \bar{p}_{gijk}^m = \bar{\rho}_{gijk}^m \bar{\theta}_{ijk}^m / \varphi_{gijk}^m,
\end{aligned} \tag{27}$$

где  $\Delta q_1, \Delta q_2, \Delta q_3, \Delta t$  — шаги разностной сетки. Тогда для системы уравнений (1) можно записать следующую трехслойную разностную схему:

$$\begin{aligned}
& \bar{\rho}_b (\varphi_{b,ijk}^{m+1} - \varphi_{b,ijk}^m) = -\Delta \bar{t} F_g \bar{J} (\varphi_{b,ijk}^{m+1}, \bar{\theta}_{ijk}^m), \\
(\bar{\rho}_{gijk}^{m+1/4} - \bar{\rho}_{gijk}^m) & = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho 1} \bar{\rho}_g^{m+1/4}, \quad (\bar{\rho}_{gijk}^{m+1/2} - \bar{\rho}_{gijk}^{m+1/4}) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho 2} \bar{\rho}_g^{m+1/2}, \\
(\bar{\rho}_{gijk}^{m+3/4} - \bar{\rho}_{gijk}^{m+1/2}) & = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_{\rho 3} \bar{\rho}_g^{m+3/4}, \\
(\bar{\rho}_{gijk}^{m+1} - \bar{\rho}_{gijk}^m) & = \Delta t (\Lambda_{\rho 1} + \Lambda_{\rho 2} + \Lambda_{\rho 3}) \bar{\rho}_g^{m+3/4} + f_\rho^m \Delta t, \\
(\bar{\rho} \bar{c})_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1/4} - \bar{\theta}_{ijk}^m) & = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_1 \bar{\theta}^{m+1/4}, \quad (\bar{\rho} \bar{c})_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1/2} - \bar{\theta}_{ijk}^{m+1/4}) = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_2 \bar{\theta}^{m+1/2}, \\
(\bar{\rho} \bar{c})_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+3/4} - \bar{\theta}_{ijk}^{m+1/2}) & = \frac{\Delta t}{3} \Lambda_3 \bar{\theta}^{m+3/4}, \\
(\bar{\rho} \bar{c})_{ijk}^m (\bar{\theta}_{ijk}^{m+1} - \bar{\theta}_{ijk}^m) & = \Delta t (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) \bar{\theta}^{m+3/4} + f^m \Delta t.
\end{aligned} \tag{28}$$

Разностная аппроксимация граничных условий (26) имеет вид

$$\begin{aligned}
(\bar{q}_3)_{N_3} & = \frac{1}{2} : \quad -(\bar{\lambda}_3)_{ijN_3}^m (\bar{\theta}_{ijN_3}^{m+3/4} - \bar{\theta}_{ij,N_3-1}^{m+3/4}) = (\Delta \bar{q}_3) (\bar{q}_{0+})_{ij}^m, \quad \bar{\rho}_{gij,N_3}^{m+3/4} = (\varphi_g \bar{p}_{e1} / \bar{\theta})_{ijN_3}^m, \\
(\bar{q}_3)_1 & = -\frac{1}{2} : \quad (\bar{k}_3)_{ij1}^m (\bar{\theta}_{ij,2}^{m+3/4} - \bar{\theta}_{ij,1}^{m+3/4}) = (\Delta \bar{q}_3) (\bar{q}_{0-})_{ij}^m, \\
& (\bar{\rho}_g^{m+3/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{ij,2} - (\bar{\rho}_g^{m+3/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{ij,1} = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Поверхность раздела  $\Sigma_{12}$  областей  $V_1$  и  $V_2$  выберем в виде совокупности четырех координатных поверхностей  $\bar{q}_1 = \bar{q}_{1\pm}$  и  $\bar{q}_2 = \bar{q}_{2\pm}$ , которые обозначим как  $\Sigma_{12,1\pm}$  и  $\Sigma_{12,2\pm}$ . На этих поверхностях заданы условия теплоизоляции и герметичности:

$$\begin{aligned}
\bar{q}_1 = \bar{q}_{1-} : \quad & (\bar{\rho}_g^{m+1/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{2jk} - (\bar{\rho}_g^{m+1/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{1jk} = 0, \quad \bar{\theta}_{2jk}^{m+1/4} - \bar{\theta}_{1jk}^{m+1/4} = 0, \\
\bar{q}_1 = \bar{q}_{1+} : \quad & (\bar{\rho}_g^{m+1/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{N_1jk} - (\bar{\rho}_g^{m+1/4} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{N_1-1,jk} = 0, \quad \bar{\theta}_{N_1jk}^{m+1/4} - \bar{\theta}_{N_1-1,jk}^{m+1/4} = 0, \\
\bar{q}_2 = \bar{q}_{2-} : \quad & (\bar{\rho}_g^{m+1/2} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{i2k} - (\bar{\rho}_g^{m+1/2} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{i1k} = 0, \quad \bar{\theta}_{i2k}^{m+1/2} - \bar{\theta}_{i1k}^{m+1/2} = 0, \\
\bar{q}_2 = \bar{q}_{2+} : \quad & (\bar{\rho}_g^{m+1/2} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{iN_2k} - (\bar{\rho}_g^{m+1/2} \bar{\theta}^m / \varphi_g^m)_{iN_2-1,k} = 0, \quad \bar{\theta}_{iN_2k}^{m+1/2} - \bar{\theta}_{iN_2-1,k}^{m+1/2} = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Для решения разностных систем уравнений (28)–(30) применялся метод матричной прогонки [8] по координатным направлениям  $i, j, k$ .

После определения полей температуры  $\theta(q_\alpha, t)$ , содержания фаз  $\varphi_p(q_\alpha, t)$ ,  $\varphi_g(q_\alpha, t)$  и плотности газовой фазы  $\rho_g(q_\alpha, t)$  рассчитывались поровое давление  $p_g = R\rho_g^\theta$  и тепловые деформации композита по формулам (6), (7), а затем усилия и моменты (8) и изменение жесткостей оболочки при нагреве по формулам (5), затем определялись перемещения  $\{v\}$  и деформации  $\{e\}$  в КЭ.

## 5. Расчет усилий, моментов и напряжений в оболочке

Усилия и моменты в КЭ оболочки определялись по формуле  $\{T\} = [E]\{e\} - \{\overset{\circ}{T}\}$ . После этого напряжения  $\sigma_{\alpha\beta}$  вычислялись обычным образом:  $\sigma_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}/h$ . Для расчета межслойных  $\sigma_{\alpha 3}$  и поперечных  $\sigma_{33}$  напряжений в оболочке применялась аппроксимация

$$\sigma_{\alpha 3} = \psi_{\alpha}(q_1, q_2)\eta(q_3), \quad \sigma_{33} = -p^{-} - (p^{+} - p^{-})\xi + \psi_3(q_1, q_2)\eta(q_3),$$

$$\xi(q_3) = \frac{1}{2} - \frac{q_3}{h}, \quad \eta(q_3) = \frac{1}{4} - \left(\frac{q_3}{h}\right)^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad (31)$$

где  $p^{+}$ ,  $p^{-}$  — давления на внешних поверхностях оболочки,  $p_e = p^{+} - p^{-}$ . Функции  $\psi_{\alpha}$ ,  $\psi_3$  вычислялись из интегральных определяющих соотношений оболочки при сдвиге и поперечном растяжении:

$$\psi_{\alpha} = 12 C_{\alpha+3, \alpha+3} e_{\alpha 3}, \quad \psi_3 = 6(C_{13} e_{13} + C_{23} e_{23}) + 3(p^{+} + p^{-}). \quad (32)$$

## 6. Результаты численного моделирования

Численные расчеты были проведены для осесимметричной оболочки, имеющей форму усеченного параболоида, у которой индекс  $\alpha = 1$  соответствует направлению вдоль оси симметрии, а  $\alpha = 2$  — окружному направлению. Рассмотрен случай локального нагрева оболочки излучением, одновременно действовало внутреннее давление  $p_{e-} = 0.3$  МПа. Торцы оболочки свободны от нагрузки. Характеристики композита были выбраны следующими [1]:

$$\overset{\circ}{C}_{11} = \overset{\circ}{C}_{22} = 20 \text{ ГПа}, \quad \overset{\circ}{C}_{13} = \overset{\circ}{C}_{23} = 2.2 \text{ ГПа}, \quad \overset{\circ}{C}_{44} = 4.2 \text{ ГПа},$$

$$\alpha_f = 2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_b = 20 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \alpha_p = 2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \beta_p = 0.1, \quad \varphi_f = 0.5,$$

$$\rho_b = 1200 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_p = 2000 \text{ кг/м}^3, \quad \varphi_g^0 = 0.15,$$

$$\lambda_3 = 0.3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_1 = 0.8 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)} \text{ (при } \theta = 293 \text{ К)}, \quad K_1^0 = 10^{-23} \text{ с},$$

$$s = 50, \quad c_b = 1.3 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad c_p = 0.6 \text{ кДж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad J_0 = 3.6 \cdot 10^5 \text{ кг/(м}^3 \cdot \text{с)},$$

$$E_a/R = 8300 \text{ К}, \quad \Gamma = 0.65, \quad \Delta e^0 = 1 \text{ МДж/кг}.$$

Длина оболочки  $L = 3$  м, максимальный радиус  $R = 1$  м, толщина  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  м, радиус пятна нагрева  $\delta = 0.02$  м. Максимальная температура нагрева составляла  $580$  °С.

На рис. 1 показаны результаты расчета температурного поля на внешней поверхности оболочки в виде двумерных графиков  $\theta(\bar{q}_1, \bar{q}_2, h/2, t)$  распределения температуры по координатам  $\bar{q}_1 = q_1/L$ ,  $\bar{q}_2 = q_2/L$  в моменты времени  $t = 18$  и  $26$  с. В рассмотренном случае плотность теплового потока  $q_R$  вне зоны эффективного нагрева быстро убывала, а конвективный нагрев отсутствовал, поэтому расчет тепломассопереноса проводился только с помощью решения локальной задачи для области  $V_1$ .

На рис. 2 представлены результаты расчета распределения полей температуры и порового давления по толщине оболочки в различные моменты времени для центра пятна нагрева. Видно, что распределение температуры по толщине оболочки имеет характерный монотонно убывающий профиль, который с течением времени смещается

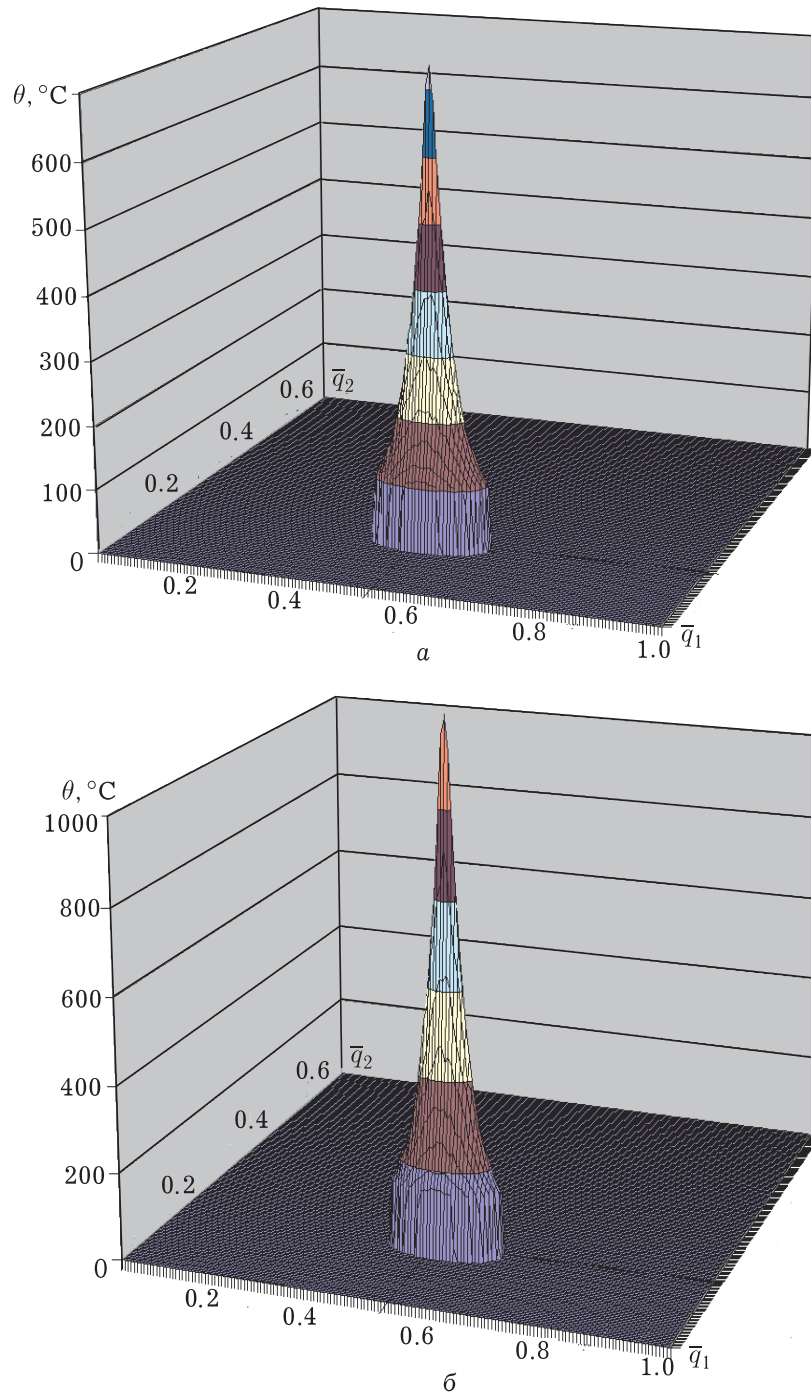


Рис. 1. Распределение температуры в плоскости координат  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}_2$  в моменты времени  $t = 18$  с (а) и  $t = 26$  с (б)

к тыльной поверхности оболочки. При достижении условной температуры начала термодеструкции в том слое, до которого дошел температурный фронт, резко интенсифицируется термодеструкция полимерной матрицы. В результате в композите возникает зона интенсивной термодеструкции, которая распространяется в глубь толщины оболочки. При  $t = 16$  с уровень температуры примерно в  $3/4$  толщины оболочки превышает условную температуру начала термодеструкции материала.

В области термодеструкции содержание полимерной фазы композита резко снижается, а доля пиролитической фазы и пористости, наоборот, резко возрастает (рис. 3). Поровое давление газов, появление которых также обусловлено термодеструкцией, тоже в указанной зоне резко возрастает, достигая максимума в 65 атм (см. рис. 2) на некоторой поверхности  $q_3 = q_3^*$  оболочки, причем это значение  $q_3^*$  с течением времени смещается по направлению к ненагреваемой поверхности оболочки.

На рис. 4 показано распределение температурной деформации  $\dot{\varepsilon}_2$  по толщине оболочки в различные моменты времени в точке  $T_0$ . Эти распределения в области умеренного нагрева имеют положительные значения, поскольку температурные деформации в данном случае вызваны только тепловым расширением композита, а в зоне термодеструкции функции  $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$  меняют знак и становятся отрицательными, так как происходит усадка композита. Значения усадки различны по разным координатным направлениям. По мере прогрева композита зона усадки увеличивается и распространяется по направлению к ненагреваемой поверхности оболочки. Все перечисленные эффекты оказывают важнейшее влияние на перераспределение полей перемещений, деформаций и напряжений в оболочке.

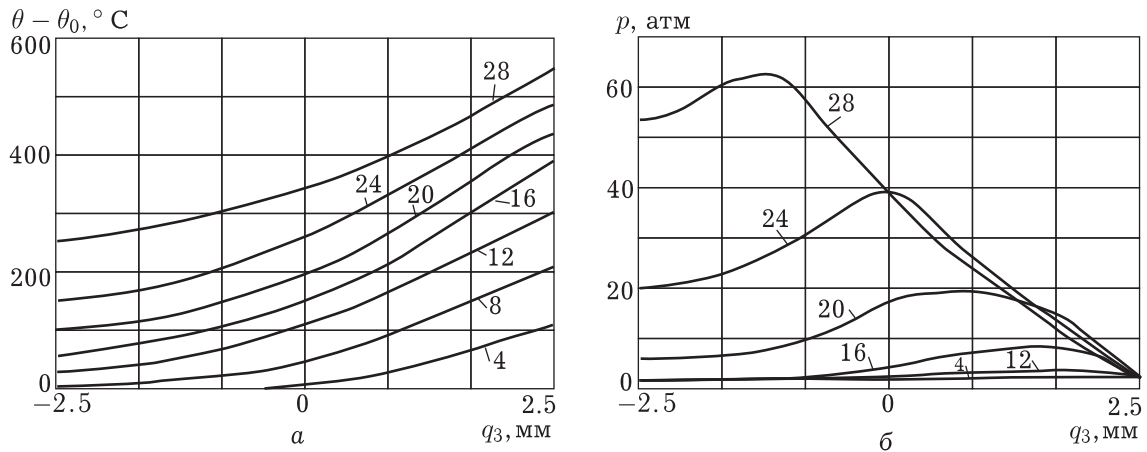


Рис. 2. Распределение температуры (а) и порового давления (б) по толщине оболочки для центра пятна нагрева в различные моменты времени  $t$ , с (цифры у кривых)

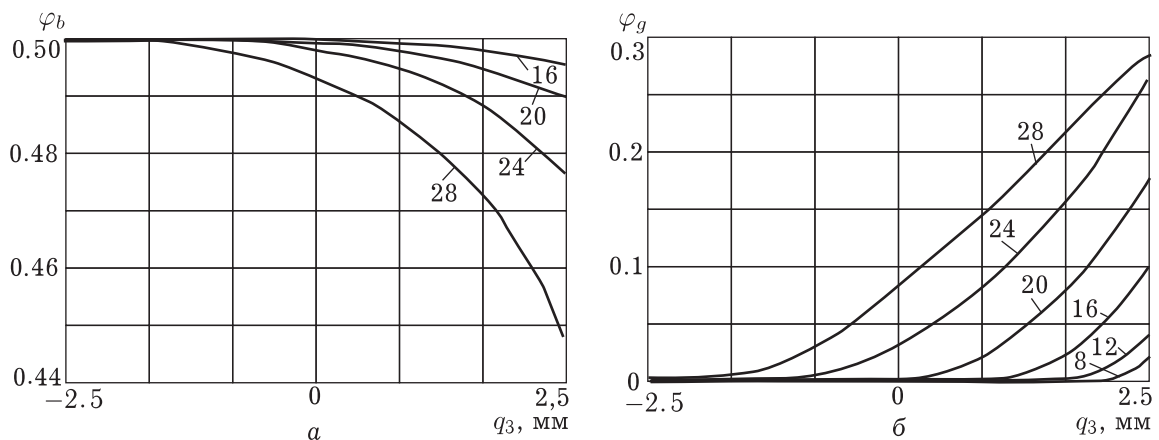


Рис. 3. Распределение концентраций полимерной фазы (а) и пористости (б) по толщине оболочки в различные моменты времени

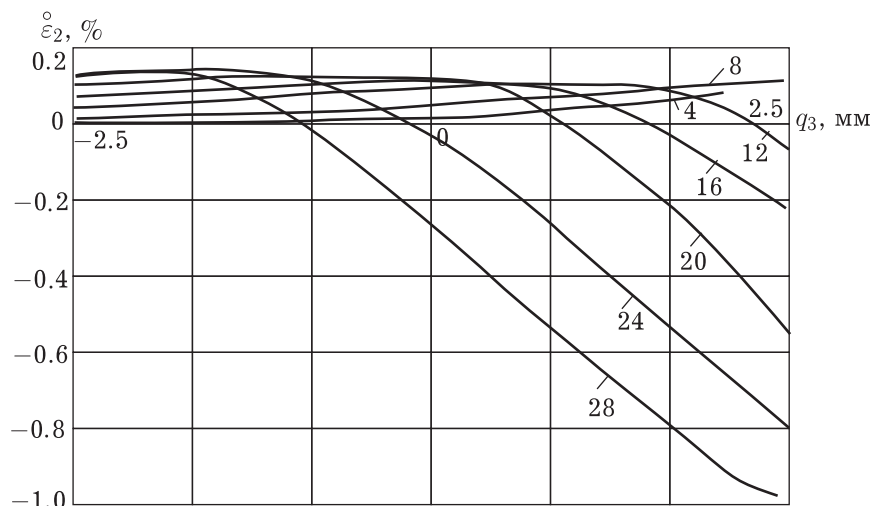


Рис. 4. Распределения температурной деформации по толщине оболочки в центре пятна нагрева в различные моменты времени

Картина распределения прогиба  $W$  вдоль координатной линии  $q_1$  оболочки для моментов времени  $t = 12$  и  $28$  с приведена на рис. 5. Зависимость  $W(q_1)$  имеет волнообразный вид, характерный для краевого эффекта в оболочках. Прогиб достигает максимума на некотором расстоянии от края оболочки. При  $t = 28$  с, когда интенсифицируется процесс термодеструкции, появляется новый локальный максимум прогиба в центре пятна нагрева оболочки, направленный в сторону от источника нагрева, который по абсолютной величине превышает значение локального максимума, обусловленного краевым эффектом.

Картина распределения тангенциального напряжения  $\sigma_2$  в срединной поверхности осесимметричной оболочки обусловлена наличием двумя факторами: внутренним давлением и локальным нагревом, и существенно меняется с течением времени нагрева (рис. 6). При  $t < 2$  с на фоне не зависящего от  $q_1$  поля напряжения  $\sigma_2$  возникает двойной максимум растягивающих напряжений в зоне пятна нагрева. При дальнейшем нагреве эти максимумы “разделяются”, но остаются в окрестности зоны нагрева. Интенсификация процесса термодеструкции при  $t > 20$  с приводит к тому, что локальные максимумы значительно увеличиваются (до 284 МПа) и превышают величину предела высокотемпературной прочности композита при растяжении [1], что вызывает локальное растрескивание композита с ориентацией микротрещин в зоне нагрева, перпендикулярной окружному направлению.

Картина распределения касательных напряжения  $\sigma_{13}$  содержит многие из приведенных выше эффектов. На рис. 7 показан график зависимости напряжения от времени в семи контрольных точках: точка 1 ( $T_0$ ) находится в центре пятна нагрева, точки 2–4 расположены вдоль луча, выходящего из точки центра пятна в направлении оси  $Oq_1$ , а точки 5–7 — вдоль линии  $Oq_2$ . С течением времени во всех точках вначале реализуются положительные напряжения  $\sigma_{13}$ , а затем функция  $\sigma_{13}(t)$  меняет знак и ее абсолютные значения увеличиваются. В центре пятна нагрева при  $t > 26$  с касательные напряжения еще раз меняют знак и становятся положительными. В целом наблюдается эффект резкого увеличения касательных напряжений в момент времени, когда в рассматриваемую точку приходит фронт интенсивного процесса термодеструкции. Результаты расчетов показывают, что при сравнительно невысоком уровне лазерного нагрева наиболее вы-

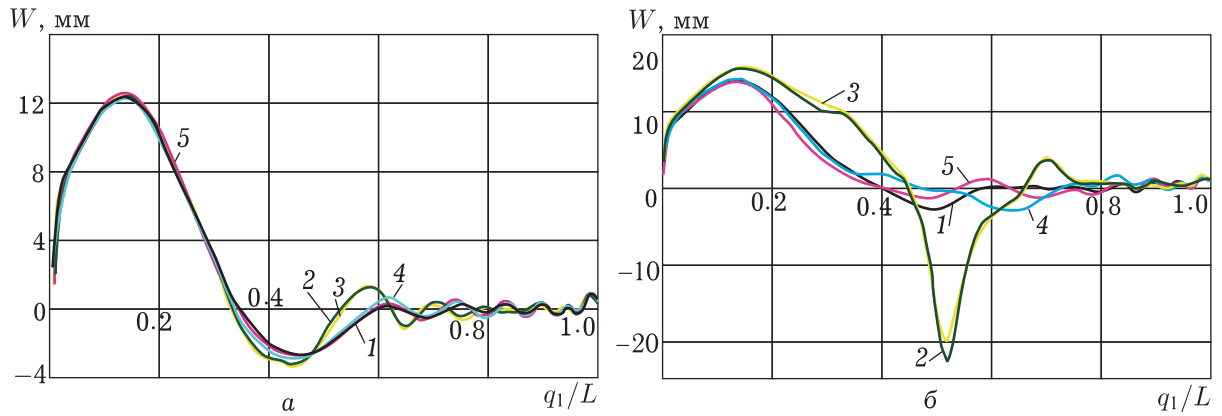


Рис. 5. Распределение прогиба  $W$  вдоль координатных линий  $q_1$  в моменты времени  $t = 12$  с (а) и 28 с (б) для  $q_2/L = 0$  (1), 0.25 (2), 0.27 (3), 0.53 (4), 0.79 (5)

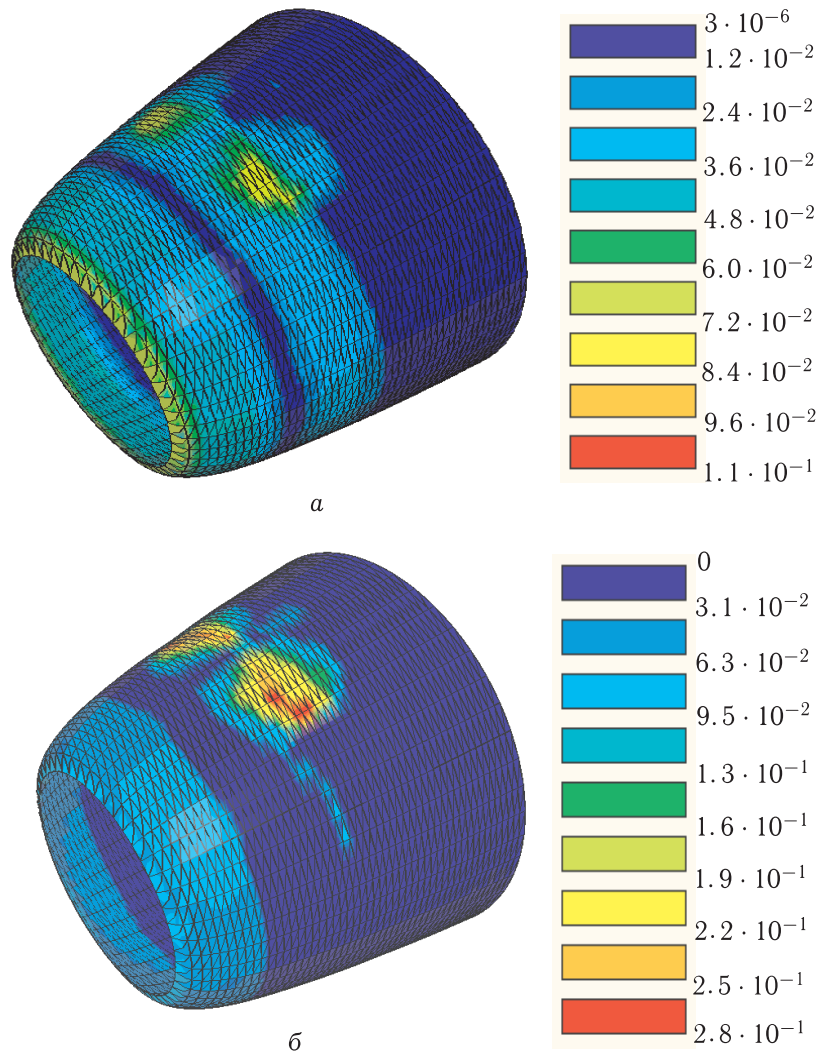


Рис. 6. Распределение тангенциального напряжения  $\sigma_2$  (ГПа) на срединной поверхности осесимметричной оболочки в моменты времени  $t = 20$  с (а) и 28 с (б)

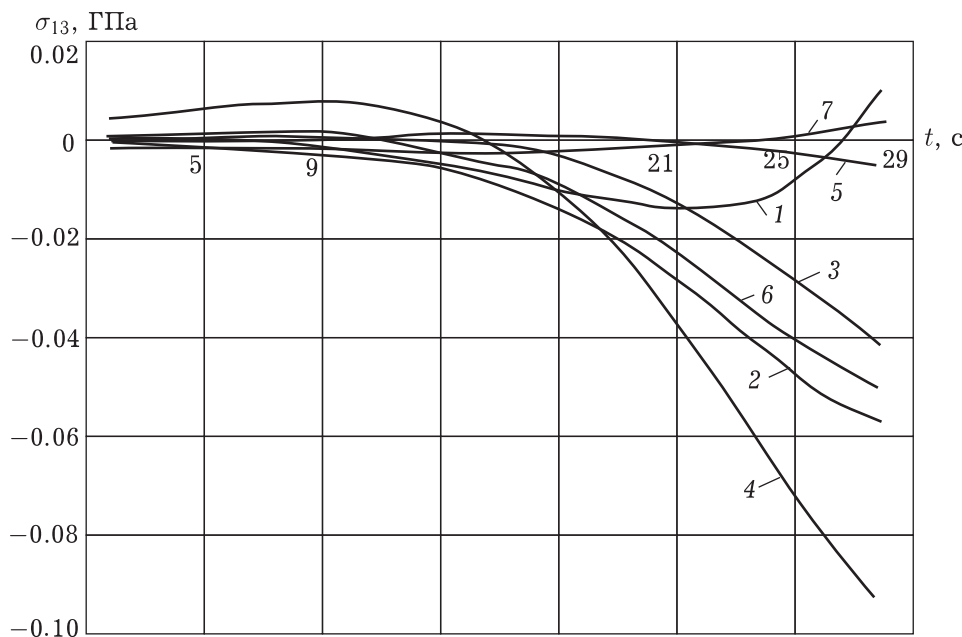


Рис. 7. Зависимость сдвигового напряжения  $\sigma_{13}$  от времени в семи контрольных точках на срединной поверхности оболочки

сокими являются межслойные напряжения  $\sigma_{13}$ , максимальные значения которых в зоне пятна нагрева составляют 0.48 МПа. Учитывая, что прочность композита при межслойном сдвиге для рассматриваемой температуры равна примерно 0.5 МПа [1], указанные напряжения будут приводить к расслоению композитной оболочки. Этот вывод согласуется с результатами расчетов [2], проведенными для плоской пластины.

Таким образом, даже невысокие плотности мощности нагрева, при которых отсутствуют процессы уноса и испарения, из-за достаточно низкой прочности композитов при высоких температурах приводят к термомеханическому разрушению композитных конструкций. Величины максимальных тангенциальных и сдвиговых напряжений зависят от характеристик композита и геометрии оболочки и их можно оценить с помощью предложенной методики.

## Список литературы

- [1] ДИМИТРИЕНКО Ю.И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. М.: Машиностроение, 1997. 362 с.
- [2] DIMITRIENKO YU.I. Thermomechanics of Composites under High Temperatures. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1999. 347 p.
- [3] DIMITRIENKO YU.I. A structural thermomechanical model of textile composite materials at high temperatures // Composite science and technologies. 1999. Vol. 59. P. 1041–1053.
- [4] DIMITRIENKO YU.I. Modelling of mechanical properties of composite materials under high temperatures. Part 3. Textile Composites // Intern. J. of Appl. Composite Materials. 1998. Vol. 5, No. 4. P. 257–272.
- [5] DIMITRIENKO YU.I. Thermomechanical behaviour of composites under local intense heating by irradiation // Composites. Part A. 2000. Vol. 31. P. 591–598.



- [6] Попов Б.Г. Расчет многослойных конструкций вариационно-матричными методами. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 297 с.
- [7] СЕГЕРЛИНД Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.
- [8] САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1976.

*Поступила в редакцию 20 января 2011 г.,  
с доработки — 11 ноября 2011 г.*

ЖВТ. 2012. Т. 17, № 2. С. 44–60.

**Numerical modeling of heatmass transfer and stress kinetics in thermodestructing composite shells**

Dimitrienko Yu.I., Minin V.V., Syzdykov E.K.

A model for thermo mechanical processes in composite thin-walled shells exposed to high temperatures has been developed that takes the thermodestruction into account. A computational method for the determination of thermal stresses of internal heat and mass transfer in composite thermodestructing shells has been suggested. The approach relies on the finite-element method for the shell theory and the method of a small parameter aligned with the step-by-step finite-difference method for the equations of internal heat and mass transfer. Computations conducted for thermal stresses in a composite shell of parabolic type under local laser heating have shown that even comparatively low intensity heating leads to a thermomechanical destruction of composite structures. The effect appears due to a sufficiently low interlayer strength of composites under high temperatures. The method for estimation of a threshold level of thermodestruction has been suggested.

Keywords: composite shells, thermodestruction, strength, finite-element method