# К вопросу сохранения типа системы квазилинейных уравнений в частных производных

В. В. Башуров
*Центр экологического и техногенного мониторинга, г. Трехгорный, Россия*
e-mail: `VVBashurov@mail.ru`

Рассматривается система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных, записанная в подвижной системе координат. Связь между подвижной и неподвижной системами координат осуществляется с помощью квазилинейного уравнения для вектора переносной скорости. Показано, что в общем случае тип системы зависит от вида дополнительного уравнения для вектора переносной скорости. Доказаны теоремы, дающие достаточные условия сохранения типа исходной системы дифференциальных уравнений, записанной в декартовой системе координат.

*Ключевые слова*: система квазилинейных уравнений в частных производных, тип дифференциального уравнения, инвариантность типа.

## Введение

В связи с развитием конечноразностных методов решения дифференциальных уравнений большое внимание уделяется построению так называемых адаптирующихся сеток. Принципы, на которых основано конструирование алгоритма построения таких сеток, достаточно подробно изложены в работах [1, 2]. Все алгоритмы условно разделим на три класса: функциональные, эллиптические и эволюционные. Для первого класса характерно задание узлов сетки при помощи формулы или интерполяции между некоторым набором линий (границы области и границы раздела сред, ударные волны, слабые разрывы и т. д.) К таким методам можно отнести методы, описанные в [1, 3]. Второй класс охватывает такие методы построения сеток, в которых строится отображение реального физического пространства на параметрическое, удовлетворяющее некоторой краевой задаче, как правило, эллиптического типа (например, реализующее конформное отображение или иной геометрический принцип) [4–7]. К третьему классу отнесем методы, использующие для нахождения узлов сетки дифференциальное уравнение для вектора переносной скорости, т. е. для скорости перемещения самого узла в неподвижной координатной системе. Как правило, такое уравнение (уравнения), добавленное (добавленные) к основной системе уравнений, образует (образуют) систему уравнений в частных производных, названную нами расширенной, для которой ставится задача Коши. В процессе решения этой системы вместе с "нужными" функциями находятся узлы сетки, или отображение неподвижной системы координат на параметрическое пространство переменных, в которых записывается исходная система уравнений. Это отображение зависит от времени и никаким способом, кроме решения расширенной системы, его получить невозможно [8–11].

Общим для всех трёх типов алгоритмов является вопрос о невырожденности преобразования реального (декартова) пространства в параметрическое, задающее, например, узлы сетки. Особый интерес представляет и вопрос: не меняется ли тип исходного уравнения (уравнений), если к нему (к ним) добавляются уравнения, задающие параметризацию. Впервые, насколько нам известно, это было рассмотрено в работе [8]: если исходная система дифференциальных уравнений в частных производных, записанная в декартовых координатах, относится к гиперболическому типу и поэтому классическая задача Коши имеет решение хотя бы в некоторой окрестности многообразия, на котором заданы начальные условия. то та же система, записанная в системе координат, задаваемой решением расширенной системы, может изменить свой первоначальный тип.

На первый взгляд, в постановке такого вопроса есть что-то алогичное. Ведь до сих пор утверждалось, что невырожденное преобразование как зависимых, так и независимых переменных не меняет тип исходной системы. Вместе с тем доказывалось это утверждение исключительно для невырожденных преобразований, задаваемых функционально. Однако, как следует из [12], в общем случае при преобразованиях системы координат, задаваемых дифференциальным уравнением (уравнениями) для вектора переносной скорости, тип системы не инвариантен.

В настоящей работе получены достаточные условия, накладываемые на преобразования координат (на коэффициенты уравнений, связывающих координаты, в которых изначально были написаны уравнения, и на координаты, в которых будут решаться эти уравнения), для того чтобы исходный тип уравнений не менялся. В качестве исходной системы выбраны уравнение переноса, уравнения газовой динамики и уравнения гипоупругости [8]. Исследован случай, когда искомые функции зависят только от двух переменных — времени $t$ и пространственной переменной $\xi$.

## 1. Некоторые сведения из тензорного анализа

Введем в рассмотрение ковариантный базис $\{\mathbf{Э}_k\}$ и метрический тензор $g_{ik}$ в пространстве $\{\xi^k\}$. Базисные векторы $\{\mathbf{Э}_k\}$ определены равенством $\mathbf{Э}_k = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k}$.

Чтобы сократить размер формул, воспользуемся предложенным Эйнштейном способом изображать суммирование без греческого символа $\Sigma$, а именно, если в формуле у каких-либо сомножителей одинаковые индексы располагаются на "разных" этажах, то это подразумевает суммирование по данному индексу.

Вектор скорости $\mathbf{u} = u^k \mathbf{Э}_k$ можно представить в виде суммы двух векторов — вектора относительной и вектора переносной скорости. Обозначим их соответственно $\mathbf{u}_{(r)} = u^k_{(r)} \mathbf{Э}_k$ и $\mathbf{u}_{(e)} = u^k_{(e)} \mathbf{Э}_k$. Вектор переносной скорости определяется уравнением

$$\left.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right|_{\xi} = \mathbf{u}_{(e)}.$$

Оператор $\dfrac{d}{dt}$ определим следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^k_{(r)} \frac{\partial}{\partial \xi^k}.$$

Уравнение переноса может быть записано как

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u^k_{(r)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^k} = 0. \tag{1}$$

В неподвижной эйлеровой системе координат вектор переносной скорости равен нулю, т. е.

$$\mathbf{u}_{(e)} = 0. \tag{2}$$

В лагранжевой системе координат вектор относительной скорости равен нулю, и поэтому уравнение для переносной скорости принимает вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{(e)}. \tag{3}$$

Получим ряд нужных в дальнейшем формул. При выводе уравнения

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mathit{Э}}_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \mathbf{u}_{(e)} = \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left( u^\ell_{(e)} \mathit{Э}_\ell \right) =$$

$$= \left( \frac{\partial u^\ell_{(e)}}{\partial \xi^k} + u^m_{(e)} \Gamma^\ell_{mk} \right) \mathit{Э}_\ell = \nabla_k u^\ell_{(e)} \mathit{Э}_\ell \tag{4}$$

было использовано равенство

$$\frac{\partial \mathit{Э}_{\boldsymbol{\ell}}}{\partial \xi^k} = \Gamma^m_{\ell k} \mathit{Э}_m,$$

где $\Gamma^m_{\ell k}$ — символ Кристоффеля. Используя определение метрического тензора $g_{k\ell} = (\mathit{Э}_k, \mathit{Э}_\ell)$, получим

$$\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathit{Э}_k}{\partial t}, \mathit{Э}_\ell \right) + \left( \mathit{Э}_k, \frac{\partial \mathit{Э}_\ell}{\partial t} \right).$$

Здесь скобки означают скалярное произведение векторов. Воспользовавшись уравнением (4), получим

$$\frac{\partial g_{k\ell}}{\partial t} = \nabla_k u^m_{(e)} \cdot g_{m\ell} + \nabla_\ell u^m_{(e)} \cdot g_{mk}. \tag{5}$$

Уравнения (5) по сути позволяют установить взаимно-однозначное соответствие между координатами $\{\xi_k\}$ и декартовыми координатами $\{x_k\}$.

Группу этих уравнений будем называть уравнениями для метрики.

Выполним в (1) дифференцирование по переменным $\{\xi_k\}$. С учётом формулы (4) получим

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \mathit{Э}_k + u^k \frac{\partial \mathit{Э}_k}{\partial t} + u^m_{(r)} \frac{\partial u^k}{\partial \xi^m} \mathit{Э}_k + u^m_{(r)} u^k \frac{\partial \mathit{Э}_k}{\partial \xi^m} =$$

$$= \left( \frac{\partial u^k}{\partial t} + u^\ell \nabla_\ell u^k_{(e)} + \left[ u^m - u^m_{(e)} \right] \frac{\partial u^k}{\partial \xi^m} + \left[ u^m - u^m_{(e)} \right] u^\ell \Gamma^k_{\ell m} \right) \mathit{Э}_k = 0.$$

С учётом линейной независимости векторов $\{Э_k\}$ уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^\ell \nabla_\ell u^k_{(e)} + \left[u^m - u^m_{(e)}\right] \nabla_m u^k = 0. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) образуют систему, представляющую уравнение переноса, записанное в произвольной системе координат. Система не полна. Для её замыкания необходимо добавить уравнение для вектора переносной скорости.

Для первого типа методов, названных выше функциональными, уравнение для переносной скорости задаётся формулой. Так, эйлерово пространство, в котором введён неподвижный базис, описывается простым уравнением (1). В этом случае уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^m \nabla_m u^k = 0. \tag{7}$$

Если пространство параметризуется лагранжевыми координатами, т. е. в качестве координат выступают координаты, которые подвижная точка занимала в начальный момент времени, то уравнение для вектора переносной скорости записывается в виде (3) и уравнение переноса принимает тот же вид (7).

В общем случае систему координат, в которых записывается уравнение переноса, будем называть счётной, поскольку именно к записанным в таком виде уравнениям применяют те или другие методы численного решения.

## 2. Нелинейное уравнение переноса

Рассмотрим проблему сохранения типа дифференциального уравнения (системы уравнений) на примере простейшего нелинейного уравнения переноса. Напомним, что в неподвижной декартовой системе координат оно имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Здесь $u$ — скорость. В подвижной счётной системе координат, задаваемой вектором переносной скорости $v$, это уравнение переходит в систему двух нелинейных уравнений в частных производных (5), (6):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u - v)\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + u\dfrac{\partial v}{\partial \xi} + \dfrac{u^2 g^{11}}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial g_{11}}{\partial t} - v\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} - 2g_{11}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь $g_{11}$ и $g^{11}$ — ковариантная и контрвариантная компоненты метрического тензора, $\xi$ — координата в подвижной системе, $v$ — переносная скорость. Отметим, что переносная скорость и скорость — суть контрвариантные вектора.

Пусть уравнение, задающее переносную скорость $v$, имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - b\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi} - e\frac{\partial v}{\partial \xi} = f, \tag{9}$$

где коэффициенты $a$, $b$, $e$ — произвольные функции переменных $u$, $v$, $g_{11}$.

Система уравнений (8)–(9) [12] является системой, эквивалентной одному уравнению переноса в декартовой неподвижной системе координат, и поэтому её по-прежнему будем называть уравнением переноса. Убедимся, что эта система в декартовой системе координат гиперболична.

Действительно, при $v = 0$ (8)–(9) запишется как

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{u^2 g^{11}}{2}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial g_{11}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

и характеристическое уравнение имеет только действительные корни. Ставя для этой системы задачу Коши, т. е. задавая в начальный момент времени метрику $g_{11}$, переносную скорость $v$ и “истинную” скорость $u$, можно установить в окрестности начальных значений соответствие между декартовой неподвижной системой координат и “счётной” системой.

Введем вектор решения $w = (u, g_{11}, v)$. Систему (8)–(9) можно записать в матричном виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial \xi} = F. \tag{10}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} u - v & \dfrac{u^2 g^{11}}{2} & u \\ 0 & -v & -2g_{11} \\ -a & -b & -e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теорему.

**Теорема 1**. *Если вектор $w$ на прямой $t = 0$ аналитичен, $g_{11}(0, \xi) \geq \varepsilon > 0$, то соответствие координатных систем $\{x\}$ и $\{\xi\}$, определяемое решением задачи Коши для системы (10), не вырождено в некоторой окрестности прямой $t = 0$.*

Доказательство следует непосредственно из того, что (10) является системой типа системы Коши — Ковалевской; следовательно, вектор решения w непрерывен в некоторой окрестности прямой $t = 0$, а так как $g_{11}(0, \xi) > 0$ и якобиан преобразования $x = x(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sqrt{g_{11}},$$

то однозначность очевидна.

Поставим следующий вопрос: если исходное уравнение переноса гиперболично, что при определённых условиях на гладкость начальных данных зквивалентно разрешимости задачи Коши, то сохраняется ли тип уравнения при переходе к подвижной системе координат, задаваемой квазилинейным уравнением для переносной скорости $v$? Как показывает приводимый ниже пример, — не сохраняется.

Характеристическое уравнение для системы (10) имеет вид

$$[\lambda - (u - v)]\,[(\lambda + v)(\lambda + e) + au - 2g_{11}b] = 0.$$

Положим $a = u$, $e = v$, $b = f = 0$. Тогда характеристическое уравнение запишется как

$$[\lambda - (u - v)]\left[(\lambda + v)^2 + u^2\right] = 0.$$

Оно имеет пару комплексных корней. Уравнение переноса в системе координат, задаваемой уравнением
$$\frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial \xi} - v\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$$
является уравнением смешанного типа.

Что гарантирует сохранение типа уравнения? На этот вопрос дает ответ следующая теорема.

**Теорема 2**. *Если уравнение (9) инвариантно относительно преобразования* $\eta = \eta(\xi)$, $\dfrac{\partial \eta}{\partial \xi} \neq 0$, *то система (10) является системой гиперболического типа.*

**Доказательство**. Рассмотрим уравнение (9) для переносной скорости в системе координат $\{\xi\}$ и введем некоторую новую систему $\eta = \eta(\xi)$. Тогда новая переносная скорость $\bar{v}$ будет связана со старой равенством $v = \dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}\bar{v}$, так как $v$ и $\bar{v}$ — контрвариантные составляющие вектора переносной скорости. Обозначим $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}$ через $\varphi$. Неизвестные функции в новой системе координат определяются по формулам
$$u = \varphi\bar{u}, \quad g_{11} = \frac{1}{\varphi^2}\overline{g_{11}}, \quad g^{11} = \varphi^2\overline{g^{11}}.$$

Подставим новые значения искомых функций в уравнение (9). Отметим, что это уравнение носит тензорный характер и поэтому инвариантно относительно преобразования $\eta = \eta(\xi)$. Выпишем уравнение (9) в новых координатах
$$\varphi\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\bar{a}}{\varphi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\bar{b}}{\varphi^4}\frac{\partial \overline{g_{11}}}{\partial \eta} - \frac{\bar{e}}{\varphi}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right] - \frac{d\varphi}{d\eta}\left[\frac{\bar{a}\bar{u}}{\varphi} - \frac{2\bar{b}\overline{g_{11}}}{\varphi^4} - \frac{\bar{e}\bar{v}}{\varphi}\right] = \bar{f}.$$
Поскольку по условию теоремы уравнение (9) инвариантно относительно преобразования координат, то из предыдущего равенства следует:

1) $\bar{a}\bar{u} - \dfrac{2\bar{b}\overline{g_{11}}}{\varphi^3} + \bar{e}\bar{v} = 0$;

2) коэффициенты $a$, $e$, $f$ являются контрвариантными тензорами первой валентности, $a$, $b$ — четвертой валентности. Условия 1, 2 по сути являются условиями теоремы 2.

Поскольку $\varphi$ произвольно, положим $\varphi = 1$. Тогда условие 1 принимает вид
$$au - 2bg_{11} + ev = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для системы
$$\begin{vmatrix} \lambda - (u - v) & -\dfrac{u^2 g^{11}}{2} & -u \\ 0 & \lambda + v & 2g_{11} \\ a & b & \lambda + e \end{vmatrix} = 0.$$
Раскрывая определитель, получим
$$[\lambda - (u - v)][(\lambda + v)(\lambda + e) + au - 2g_{11}b] = 0.$$

Отсюда вторая квадратная скобка дает уравнение для $\lambda$

$$\lambda^2 + \lambda(v+e) + ve + au - 2g_{11}b = 0.$$

В силу (11) оно имеет действительные корни.

Теорема доказана. □

## 3. Уравнения движения гипоупругого тела

Рассмотрим уравнения "одномерного" движения гипоупругого тела [13], записанные в произвольной системе координат, задаваемой переносной скоростью $v$ с уравнением состояния в виде $p = c^2(\rho - \rho_0)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u-v)\frac{\partial u}{\partial \xi} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{c^2}{\rho}g^{11}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{11}}{\partial \xi} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi}(2T^{11} - \rho u^2)g^{11} +$$

$$+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}\left(T^{11}g^{22} - T^{22}g^{11}\right) + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\left(T^{11}g^{33} - T^{33}g^{11}\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial \xi} + (u-v)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{\rho u}{2}\left(g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi} + g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} + g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial T^{11}}{\partial t} + (u-v)\frac{\partial T^{11}}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{4}{3}\mu g^{11}\right) - 2T^{11}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \xi}g^{11}u\left(\frac{2}{3}\mu g^{11} - T^{11}\right) -$$

$$-\frac{\mu}{3}ug^{11}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} - \frac{\mu}{3}ug^{11}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = 2g_{11}\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial t} = v\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial t} = v\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}. \qquad (12)$$

Здесь $c$ — объёмная скорость звука, $\rho$, $\rho_0$ — текущая и начальная плотности, $g^{11}$, $g^{22}$, $g^{33}$ — контрвариантные составляющие метрического тензора, $g_{11}$, $g_{22}$, $g_{33}$ — ковариантные составляющие того же тензора, $T^{11}$ — контрвариантная составляющая девиатора тензора напряжений.

К системе уравнений (12) необходимо добавить соотношения, определяющие выбор системы координат. Рассмотрим полученную систему для случая $v = \alpha u$, где $\alpha$ — постоянная величина.

При $\alpha = 1$ имеем лагранжеву систему координат, при $\alpha = 0$ — неподвижную эйлерову. Тогда система (12) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{c^2}{\rho}g^{11}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T^{11}}{\partial \xi} +$$

$$+\frac{1}{2\rho}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi}[2T^{11}-\rho u^2]g^{11}+\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}\left[T^{11}g^{22}-T^{22}g^{11}\right]+\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\left[T^{11}g^{33}-T^{33}g^{11}\right]\right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial \xi}+(1-\alpha)u\frac{\partial \rho}{\partial \xi}-\frac{1}{2}\rho u\left[g^{11}\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi}+g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}+g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\right]=0,$$

$$\frac{\partial T^{11}}{\partial t}+(1-\alpha)u\frac{\partial T^{11}}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\frac{4}{3}\mu g^{11}-2T^{11}\alpha\right]+\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi}g^{11}u\left[\frac{2}{3}\mu g^{11}-T^{11}\right]-$$

$$-\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi}\frac{\mu}{3}ug^{11}g^{22}-\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\frac{\mu}{3}ug^{11}g^{33},$$

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial t}=2g_{11}\alpha\frac{\partial u}{\partial \xi}+\alpha u\frac{\partial g_{11}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial t}=\alpha u\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial g_{33}}{\partial t}=\alpha u\frac{\partial g_{33}}{\partial \xi}. \tag{13}$$

Система (13) квазилинейна и ее тип определяется собственными числами характеристического уравнения

$$(\alpha u-\lambda)^2(\lambda+[1-\alpha]u)\times$$

$$\times\left\{\frac{T^{11}}{\rho}[2(\lambda-\alpha u)\alpha-2\alpha(\lambda+[1-\alpha]u)+2\alpha u]+\right.$$

$$\left.+c_L^2g^{11}\{\alpha u-\lambda-\alpha u\}+[\lambda+(1-\alpha)u][\lambda^2+\lambda u-\alpha\lambda u]\right\}=0.$$

Здесь

$$\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho}+c^2=c_L^2.$$

Уравнение для определения характеристических чисел распадается на следующие:

$$(\alpha u-\lambda)^2=0,$$

$$\lambda+(1-\alpha)u=0,$$

$$\lambda[\lambda^2+u^2-(1-2\alpha+\alpha^2)-c_L^2g^{11}-2\lambda u(1-\alpha)]=0.$$

Отсюда следует

$$\lambda_1=\alpha u,\quad \lambda_2=(\alpha-1)u,\quad \lambda_3=0,$$

$$\lambda_{4,5}=-(1-\alpha)u\pm c_L\sqrt{g^{11}}.$$

Таким образом, при выборе переносной скорости пропорционально абсолютной система имеет действительные характеристики.

Поскольку уравнение переноса следует из системы (12) при $c=0$ и $\mu=0$ и относительно него справедливо утверждение о несохранении типа уравнения при переходе от одной системы координат к другой, в силу непрерывной зависимости корней алгебраического уравнения от коэффициентов неинвариантность типа при переходе к подвижной системе координат очевидна.

## 4. Уравнения газовой динамики

Рассмотрим уравнения газовой динамики, записанные для двух переменных $\xi$ и $t$ и вытекающие из уравнений (12) при $\mu = 0$. В этом случае систему удобно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u - v)\dfrac{\partial u}{\partial \xi} + \dfrac{c^2}{\rho} g^{11} \dfrac{\partial \rho}{\partial \xi} + \dfrac{u^2}{\rho} g^{11} \dfrac{\partial g_{22}}{\partial \xi} + u \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + (u - v)\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi} + \dfrac{\rho u}{2}\left( g^{11}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} + g^{22}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial \xi} + g^{33}\dfrac{\partial g_{33}}{\partial \xi}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial g_{11}}{\partial t} - v\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} - 2g_{22}\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial g_{22}}{\partial t} - v\dfrac{\partial g_{22}}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial g_{33}}{\partial t} - v\dfrac{\partial g_{33}}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - b\dfrac{\partial \rho}{\partial \xi} - c\dfrac{\partial g_{11}}{\partial \xi} - d\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = f. \end{cases} \tag{14}$$

В матричном виде система запишется как

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A\frac{\partial w}{\partial \xi} = F,$$

где матрица $A$

$$A = \begin{pmatrix} v-u-\lambda & -u & -\dfrac{c^2}{\rho}g^{11} & \dfrac{u^2}{2\rho} & 0 & 0 \\ a & e-\lambda & 0 & b & 0 & 0 \\ -\rho & 0 & v-u-\lambda & -\dfrac{\rho u}{2}g^{11} & -\dfrac{\rho u}{2}g^{22} & -\dfrac{\rho u}{2}g^{33} \\ 0 & 2g_{11} & 0 & v-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для этой системы имеет вид

$$\det(\lambda E - A) = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(\lambda - v)^2[c^2 g_{11} - (\lambda + u - v)^2][\lambda^2 - (v + d)\lambda + vd + au - 2g_{11}e] = 0. \tag{15}$$

Чтобы гарантировать гиперболичность системы (14), наложим на коэффициенты уравнения, задающего переносную скорость, ограничения, которые формулируются в виде следующей теоремы.

**Теорема 3**. *Если уравнение*

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a\frac{\partial u}{\partial \xi} - \ell\frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \ell\frac{\partial g_{22}}{\partial \xi} - d\frac{\partial v}{\partial \xi} = f \tag{16}$$

*инвариантно относительно преобразования $\eta = \eta(\xi)$, то система (16) имеет гиперболический тип.*

Инвариантность первых пяти уравнений в системе (14) очевидна. Новая скорость $\bar{v}$ связана с прежней переносной скоростью $v$ соотношением

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial \eta}\bar{v}.$$

Обозначим производную $\dfrac{\partial \xi}{\partial \eta}$ через $\varphi$. Переменные в новой системе координат определяются по известным формулам

$$\overline{\rho} = \rho, \quad u = \varphi \bar{u}, \quad \overline{g_{11}} = \varphi^2 g_{11}.$$

Подставляя новые значения в уравнение (15), получим

$$\varphi\left[\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{\bar{a}}{\varphi}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \frac{\bar{b}}{\varphi^2}\frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{\bar{c}}{\varphi^4}\frac{\partial g_{11}}{\partial \eta} - \frac{\bar{d}}{\varphi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] - \varphi_\eta\left[\frac{\bar{a}\bar{u}}{\varphi} - \frac{2\overline{g_{11}}\bar{e}}{\varphi^4} + \frac{\bar{d}\bar{v}}{\varphi}\right] = \bar{f}.$$

Поскольку по условию теоремы уравнение (16) инвариантно относительно преобразования $\eta = \eta(\xi)$, то имеют место два условия:

1) $\bar{a}\bar{u} - \dfrac{2\overline{g_{11}}\bar{e}}{\varphi^3} + \dfrac{\bar{d}\bar{v}}{\varphi} = 0;$

2) коэффициенты $\bar{a}$, $\bar{d}$, $\bar{f}$ — контрвариантные составляющие тензора первой валентности, $\bar{b}$ — второй, $\bar{e}$ — четвёртой валентности. Эти условия по сути являются математической формой записи условий теоремы.

Поскольку $\varphi$ произвольно, то условие 1 при $\varphi = 1$ принимает вид

$$au - 2g_{11}e + dv = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение (15). Действительность характеристик (а, значит, и гиперболичность рассматриваемой системы) связана со знаком дискриминанта $D$ квадратного уравнения

$$\lambda^2 - (v + d)\lambda + vd + au - 2g_{11}e = 0, \quad D = v^2 - 2vd + d^2 - 4ua + 8g_{11}e.$$

Подставляя взятое из (17) выражение для $2g_{11}e$, получим

$$D = (v + d)^2 > 0.$$

Доказательство закончено. □

Таким образом, в работе доказаны теоремы о достаточных условиях, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения для переносной скорости, чтобы тип системы не менялся, для уравнений переноса и газовой динамики в случае, когда зависимые переменные зависят только от двух независимых переменных времени и одной пространственной координаты. Для гипоупругого тела отмечено, что введение подвижной системы координат может изменить тип исходной системы.

## Список литературы

[1] Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.

[2] Сидоров А.Ф., Шабашова Т.И. Об одном методе расчёта оптимальных разностных сеток для многомерных областей // Численные методы механики сплошной среды. 1981. Т. 12, № 5. С. 106–123.

[3] Сараев В.А. Построение регулярных четырёхугольных сеток в областях с криволинейными границами по точкам вложенных друг в друга криволинейных четырёхугольников // Вопросы атомной науки и техники. Методики и программы численного решения задач матем. физики. 1985. Вып. 3. С. 25–38.

[4] Годунов С.К., Прокопов Г.Д. О расчётах конформных отображений и построении разностных сеток // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1967. Т. 7, № 5. С. 1031–1059.

[5] Breakbill J.U., Saltzman J.S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions // J. Comput. Phys. 1982. Vol. 46. P. 342–368.

[6] Крейс Р.И., Тэймз Ф.К., Хасан Х.А. Построение адаптирующихся сеток с помощью вариационного метода Брэкбилла—Занцмана // AIAA J. 1966. No 3. P. 404–410.

[7] Яненко Н.Н., Данаев Н.Т., Лисейкин В.Д. О вариационном методе построения сеток // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8, № 4. С. 157–163.

[8] Медведев А.Е., Фомин В.М. Метод подвижных координат в задачах механики сплошной среды // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45, вып. 4.

[9] Неуважаев В.Е., Фролов В.Д., Яненко Н.Н. Уравнение движения теплопроводного газа в смешанных эйлеро-лагранжевых координатах // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3, № 1. С. 90–96.

[10] Дарьин Н.А., Мажукин В.И. Об одном подходе к построению адаптивных разностных сеток // Докл. АН. 1988. Т. 298, № 1. С. 64–68.

[11] Гриднева В.А., Меркулова Н.Н. О построении подвижных сеток // Численные методы механики сплошной среды. 1983. Т. 1, № 4. С. 34–44.

[12] Башуров В.В. Инвариантные свойства модельного уравнения переноса при преобразованиях системы координат // Вопросы атомной науки и техники. Математическое моделирование физических процессов. 1989. Вып. 3. С. 24–28.

[13] Башуров В.В., Свидинский В.А. Об уравнениях динамики упругих сред в произвольных системах координат // Численные методы механики сплошной среды. 1982. Т. 13, № 2. С. 14–29.

*Поступила в редакцию 17 февраля 2012 г.*
*с доработки — 13 апреля 2012 г.*

ЖВТ. 2012. Т. 17, № 3. С. 13–23.

**On invariance of type of quasi-linear partial differential equations**

Bashurov V.V.

We consider a system of linear partial differential equations written in a moving coordinate system. Relation between the moving and fixed coordinate systems is realized by a quasi-linear equation for the moving velocity vector. It is shown that the type of system generally depends on the additional equation for the velocity of the moving vector. A theorem on sufficient conditions to conserve the type of initial system of differential equations written in Cartesian coordinates is proved.

Keywords: system of quasi-linear partial differential equations, differential equation type, type invariance.