

# Эффективные дискретно-стохастические модификации локальных оценок метода Монте-Карло для задач лазерного зондирования рассеивающих сред\*

Е. Г. КАБЛУКОВА<sup>1</sup>, Б. А. КАРГИН<sup>1,2</sup>

*Институт вычислительной математики*

*и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

*Новосибирский государственный университет, Россия*

e-mail: Jane\_K@ngs.ru, BKargin@osmf.ssc.ru

Построены новые алгоритмы оптимизации локальных оценок метода Монте-Карло для решения нестационарных задач лазерного зондирования природных сред. Для понижения трудоёмкости алгоритмов предложена оптимизация локальных оценок путем применения одного из вариантов метода “расщепления” и интегрирования на основе дискретно-стохастической версии “выборки по важности”. Выполнена серия вычислительных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенной оптимизации.

*Ключевые слова:* метод Монте-Карло, локальные оценки, лазерное зондирование.

## Введение

Настоящая работа посвящена одному из способов оптимизации алгоритмов метода Монте-Карло для решения нестационарных задач лазерного зондирования природных сред. Подобные задачи представляют большой интерес в связи с широким применением лазерных локаторов (лидаров) наземного, самолетного и космического базирования для оперативной диагностики аэрозольных примесей в атмосфере, пространственно-временной трансформации микрофизических характеристик аэрозолей и различного типа облачных частиц, дистанционного определения гидрофизических параметров океана, определения верхних и нижних границ облачности, а также для решения целого ряда других проблем оптического дистанционного зондирования природной среды.

Подробнее с перечнем некоторых современных физических постановок задач лазерного зондирования атмосферы и океана и связанных с решением этих задач методов статистического моделирования можно ознакомиться из библиографии, представленной в обзоре [2]. Обоснование возможности применения методов Монте-Карло и разработка соответствующих алгоритмов для решения задач теории переноса оптического излучения в рассеивающих и поглощающих средах были выполнены в целом ряде ранних работ, подытоженных в [3]. Рассматриваемые задачи лазерного зондирования отличаются от многих других задач атмосферной оптики наличием сложных граничных условий, связанных с конечными размерами исходного пучка излучения и малым

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-01-00040 и 12-01-00034), Интеграционного проекта СО РАН № 52 и Проекта президиума РАН № 14.2.

фазовым объемом детектора, а также с принципиально нестационарным характером моделируемого процесса переноса излучения. Это обстоятельство обуславливает характерные требования к технике статистического моделирования и определяет необходимость применения локальных оценок, являющихся хотя и трудоемким, но единственно возможным способом вычисления искомым характеристик излучения, регистрируемого детектором с малым фазовым объемом. Для понижения трудоёмкости алгоритма в работе предлагается оптимизация локальных оценок путем интегрирования на основе дискретно-стохастической версии “выборки по важности” и применения одного из вариантов метода “расщепления”.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим область  $G \in R^3$ , заполненную рассеивающим и поглощающим излучение веществом с коэффициентами рассеяния  $\sigma_s(r)$  и ослабления  $\sigma(r)$ , индикатрисой рассеяния  $g(r, \mu)$  такой, что

$$\int_{-1}^1 g(r, \mu) d\mu = 1.$$

Здесь  $\mu = (\omega', \omega)$  — скалярное произведение векторов  $\omega', \omega \in \Omega = \{\omega = (a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}$  — пространство направлений. Обозначим через  $q(r)$  величину  $\sigma_s(r)/\sigma(r)$  — вероятность выживания кванта излучения (фотона) при столкновении с элементом вещества,  $c$  — скорость распространения излучения в среде. В точке  $r_0$  находится источник, испускающий в момент времени  $t = 0$  импульс излучения единичной мощности в круговом конусе направлений  $\Omega_0$  с раствором  $\theta_0$  относительно оси конуса, направленной вдоль единичного вектора  $\omega_0$  (рис. 1).

Требуется определить временное распределение  $I_{\Omega^*}(r^*, t)$  приходящего в точку  $r^*$  излучения в направлениях  $\omega$  таких, что  $-\omega \in \Omega^*$ , где  $\Omega^*$  — круговой конус с раствором  $\theta^*$  относительно оси  $\omega^*$ . Таким образом, вычислению подлежит функционал

$$I_{\Omega^*}(r^*, t) = \int_{R^3} \int_{\Omega^*} I(r, -\omega, t) \delta(r - r^*) d\omega dr,$$

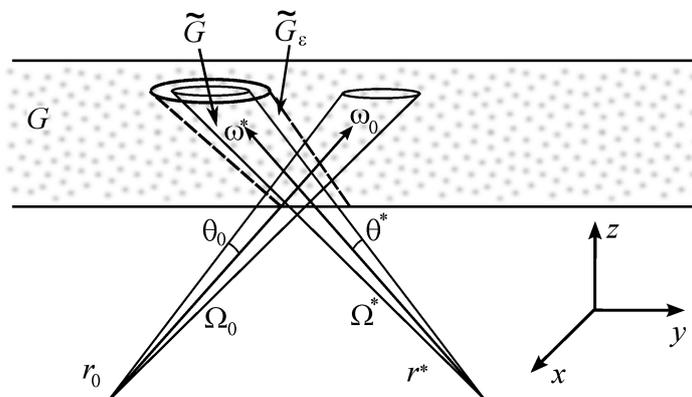


Рис. 1. Геометрическая схема задачи

в котором функция  $I(r, \omega, t)$  — интенсивность излучения в точке  $r$  в момент времени  $t$  в направлении  $\omega$ . Известно (см., например, [3]), что интенсивность излучения связана с плотностью столкновений  $\varphi(x)$  следующим соотношением:

$$I(r, \omega, t)\sigma(r) = \varphi(r, \omega, t).$$

Полагая  $\sigma(r) \equiv 0$  при  $r \in R^3 \setminus G$  (что соответствует случаю отсутствия рассеяния и поглощения во внешней к области  $G$  части пространства  $R^3$ ), плотность столкновения  $\varphi(x)$  в приближении лучевой оптики можно описать интегральным уравнением [3]

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_X \frac{q(r')\sigma(r) \exp(-\tau(r', r))g(r', (\omega', \omega))}{2\pi|r' - r|^2} \delta\left(\omega - \frac{r - r'}{|r - r'|}\right) \times \\ \times \delta\left(t - \left(t' + \frac{|r - r'|}{c}\right)\right) \varphi(x') dx' + f(x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$x = (r, \omega, t) \in X = R^3 \times \Omega \times T, \quad T = (0, \infty).$$

Здесь плотность первых столкновений нерассеянных частиц непосредственно от источника

$$\begin{aligned} f(x) = \sigma(r) \exp(-\tau(r_0, r)) \Delta_{\Omega_0}(\omega) \Delta_t\left(t - \frac{|r - r_0|}{c}\right), \\ \tau(r', r) = \int_0^{|r-r'|} \sigma(r' + s \frac{r - r'}{|r - r'|}) ds, \\ \Delta_{\Omega_0}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \Omega_0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \Delta_t(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

## 2. Локальные оценки

Пусть искомым функционал  $I_{\Omega^*}(r^*, t)$  вычисляется в виде гистограммы, т. е. оцениваются величины

$$I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} I_{\Omega^*}(r^*, t) dt, \quad i = 1, \dots, n_t,$$

где  $t_i$  — узлы гистограммы,  $t_0 = 0$ . Для вычисления  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*)$  применяется локальная оценка [3]

$$\begin{aligned} I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*) = \mathbf{E} \sum_{n=1}^N Q_n h_i^{(1)}(x_n, r^*), \end{aligned} \quad (2)$$

$$h_i^{(1)}(x_n, r^*) = \frac{q(r_n) \exp(-\tau(r_n, r^*))g(r_n, (\omega_n, s))}{2\pi|r^* - r_n|^2} \Delta_{\Omega^*}(s) \Delta_i(t),$$

где  $\mathbf{E}$  — символ математического ожидания,  $x_n = (r_n, \omega_n, t_n)$  — цепь Маркова с плотностью первых столкновений  $p_1(x)$  и переходной плотностью  $p(x', x)$ ,  $N$  — случайный номер обрыва марковской цепи,  $t = t_n + |r_n - r^*|/c$ ,  $s = (r^* - r_n)/|r^* - r_n|$ ,

$$\Delta_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in (t_{i-1}, t_i], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad \Delta_{\Omega^*}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } -\omega \in \Omega^*, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Весовые множители  $Q_n$  в соответствии с теорией весовых методов Монте-Карло [3, 4] определяются выражениями

$$Q_1 = \frac{f(x)}{p_1(x)}, \quad Q_n = Q_{n-1} \frac{k(x_{n-1}, x_n)}{p(x_{n-1}, x_n)}, \quad n = 2, \dots, N,$$

здесь  $k(x', x)$  — ядро уравнения (1).

Легко видеть, что (1) эквивалентно уравнению

$$\varphi(x) = K^2\varphi(x) + Kf(x) + f(x), \tag{3}$$

где  $K$  — интегральный оператор с ядром  $k(x', x)$ . Локальная оценка  $h_i^{(2)}$  для расчёта  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*)$ , основанная на представлении (3), называется *двойной локальной оценкой* и определяется формулой

$$I_{\Omega^*}(r^*, t) = \int_X k_2(x', x^*)\varphi(x')dx',$$

$$k_2(x', x^*) = \int_{X_{\tilde{G}}} k(x', \rho)k(\rho, x^*)d\rho. \tag{4}$$

Последний интеграл берется по области  $\tilde{G} = \{\rho(s) \in G : \rho(s) = r^* + \omega s, \omega \in \Omega^*, s > 0\}$ . В случае применения двойной локальной оценки вместо (2) имеем соотношение

$$I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*) = \mathbf{E}\xi = \mathbf{E} \left( Q_1 h_i^{(1)}(x_1, r^*) + \sum_{n=2}^N Q_n h_i^{(2)}(x_n, r^*, \rho_n) \right), \tag{5}$$

$$h_i^{(2)}(x, r^*, \rho) = \frac{q(r)q(\rho)\sigma(\rho)e^{-\tau(r,\rho)-\tau(\rho,r^*)}g(r, (\omega, \omega_\rho))g\left(\rho, \left(\omega_\rho, \frac{r^*-\rho}{|r^*-\rho|}\right)\right)}{(2\pi)^2|\rho-r|^2p(\rho)} \times$$

$$\times \Delta_{\Omega^*} \left( \frac{r^*-\rho}{|r^*-\rho|} \right) \Delta_i \left( t + \frac{|\rho-r|+|r^*-\rho|}{c} \right). \tag{6}$$

Здесь  $\omega_\rho = \frac{\rho-r}{|\rho-r|}$ ,  $p(\rho)$  — произвольная плотность распределения промежуточного случайного узла  $\rho$ , который выбирается так, что  $-(r^*-\rho)/|r^*-\rho| \in \Omega^*$ . Свобода выбора  $p(\rho)$  позволяет оптимизировать оценку (5) с целью уменьшения трудоёмкости алгоритма.

Оценка (5), (6) имеет бесконечную дисперсию, поэтому на практике вместо нее вычисляется смещенная оценка интенсивности с конечной дисперсией. В этом случае для точки столкновения  $(r_n, \omega_n, t_n)$  дополнительный случайный узел  $\rho$  разыгрывается в области  $\tilde{G} \setminus B_\varepsilon$ ,  $B_\varepsilon = \{\tilde{r} \in R^3 : |r_n - \tilde{r}| < \varepsilon\}$ , где  $\varepsilon$  — некоторое наперед заданное положительное число. Отметим, что относительную погрешность вычисления величины  $I_{\Omega^*}(r^*)$ , обусловленную вырезанием шара  $B_\varepsilon$ , можно приближенно оценить (см. [1]) величиной

$$\frac{q(r)(1-\mu_0)}{1-q(r)\mu_0}(1-\exp(-\sigma(r)\varepsilon)),$$

где  $\mu_0 = \int_{-1}^1 \mu g(r, \mu) d\mu$  — средний косинус угла рассеяния в точке  $r$ . Ниже в табл. 4

(см. раздел 5) представлена зависимость значений  $I_{\Omega^*}(r^*)$  от радиуса  $\varepsilon$  вырезаемого шара  $B_\varepsilon$ .

### 3. Модифицированная оценка

Рассмотрим некоторую область  $\tilde{G}_\varepsilon \in G$  такую, что  $\tilde{G} \in \tilde{G}_\varepsilon$ . Для точек столкновения  $x_n = (r_n, \omega_n, t_n)$  таких, что  $r_n \in \tilde{G}_\varepsilon$ , вычисление интеграла (4) будем проводить по некоторому наперед заданному числу  $K$  случайных узлов интегрирования. В этом случае функция  $h_i^{(2)}$  в (6) заменяется на следующую:

$$h_i^{(3)}(x, r^*) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K h_i^{(2)}(x, r^*, \rho_k). \quad (7)$$

Для  $x_n$  таких, что  $r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon$ , вклад в двойную локальную оценку вычисляется по одному случайному узлу интегрирования  $\rho$  ( $K = 1$ ). В данной работе для тестовых расчётов линейный размер области  $\tilde{G}_\varepsilon$  выбирался порядка длины свободного пробега частицы в веществе, заполняющем область  $G$ .

Для определения оптимального числа узлов интегрирования в области  $\tilde{G}_\varepsilon$  рассмотрим задачу вычисления интегральной по времени интенсивности излучения, приходящего в точку приемника  $r^*$  в заданном конусе направлений. Воспользуемся формулой полной дисперсии и методикой определения оптимальных параметров метода расщепления [4].

Считаем, что  $h_i^{(1)}(x_1, r^*) = 0$ . Представим модифицированную двойную локальную оценку интенсивности излучения в виде

$$\xi^{(K)} = \sum_{n=2}^N Q_n h^{(2)}(x_n, r^* | r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon) + \sum_{n=2}^N Q_n h^{(3)}(x_n, r^* | r_n \in \tilde{G}_\varepsilon).$$

Обозначим через  $\zeta = (x_1, \dots, x_N)$  последовательность фазовых координат точек столкновений фотона с элементами вещества,  $\eta = (\rho_1^1, \dots, \rho_1^s, \dots, \rho_N^1, \dots, \rho_N^s)$  — случайные узлы интегрирования  $\rho_i^j \in \tilde{G}$  для последовательности точек столкновения  $\zeta$  ( $s = 1$ , если  $r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon$ ,  $s = K$ , если  $r_n \in \tilde{G}_\varepsilon$ ). Формула полной дисперсии случайной величины  $\xi^{(K)}$  имеет вид [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\xi^{(K)} &= \mathbf{D}_\zeta \mathbf{E}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta) + \mathbf{E}_\zeta \mathbf{D}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta) = \\ &= \mathbf{D}_\zeta \mathbf{E}_\eta \left[ \sum_{n=2}^N Q_n h^{(2)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon) + \sum_{n=2}^N Q_n h^{(3)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon) \right] + \\ &+ \mathbf{E}_\zeta \mathbf{D}_\eta \left[ \sum_{n=2}^N Q_n h^{(2)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon) \right] + \mathbf{E}_\zeta \mathbf{D}_\eta \left[ \sum_{n=2}^N Q_n h^{(3)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, так как  $\mathbf{D}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta) = \mathbf{D}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta, r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon) + \mathbf{D}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon)$  для независимых  $\rho_i^j$ . Используя независимость и одинаковую распределённость компонентов вектора  $\eta$ , а также формулу (7), получим

$$\mathbf{D}_\eta h^{(3)}(x_n, r^* | x_n \in \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon) = \frac{1}{K} \mathbf{D}_\eta h^{(2)}(x_n, r^* | x_n \in \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon).$$

Введем обозначения:

$$D_1 = \mathbf{D}_\zeta \mathbf{E}_\eta(\xi^{(K)} | \zeta) + \mathbf{E}_\zeta \mathbf{D}_\eta \left[ \sum_{n=1}^N Q_n h^{(2)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon) \right],$$

$$D_2 = \mathbf{E}_\zeta \mathbf{D}_\eta \sum_{n=1}^N Q_n h^{(2)}(x_n, r^* | x \in \zeta, r_n \in \tilde{G}_\varepsilon).$$

Тогда

$$\mathbf{D}\xi^{(K)} = D_1 + D_2/K.$$

Пусть  $t_1$  — среднее время моделирования точек столкновения  $x_n, n = 1, \dots, N$ ,  $t_2$  — среднее время моделирования одного дополнительного узла интегрирования  $\rho_n$  для каждого  $x_n, n = 1, \dots, N$ , и вычисления функционала  $h^{(2)}(x_n, r^*)$ ,  $l_1$  и  $l_2$  — среднее отношение числа точек столкновения  $x_n$  из областей  $G \setminus \tilde{G}_\varepsilon$  и  $\tilde{G}_\varepsilon$  к общему их числу ( $l_1 + l_2 = 1$ ). Тогда среднее время вычисления одного выборочного значения  $\xi_i^{(K)}$  случайной величины  $\xi^{(K)}$

$$t^{(K)} = t_1(l_1 + l_2) + t_2(l_1 + Kl_2) = t_1 + t_2l_1 + Kt_2l_2 = \tilde{t}_1 + K\tilde{t}_2,$$

$$\tilde{t}_1 = t_1 + t_2l_1, \quad \tilde{t}_2 = t_2l_2.$$

Оптимальное значение  $K$  минимизирует величину трудоёмкости

$$S^{(K)} = t^{(K)} \mathbf{D}\xi^{(K)} = (\tilde{t}_1 + K\tilde{t}_2)(D_1 + D_2/K).$$

Вычислив производную и учитывая положительность величин  $D_1, D_2, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2$ , получим, что оптимальное число  $K$  приближенно равно целому положительному числу, наиболее близкому к выражению [4]

$$K_{\text{opt}} \approx \sqrt{\frac{D_2 \tilde{t}_1}{D_1 \tilde{t}_2}}. \quad (8)$$

Величины  $D_1, D_2, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2$  можно оценить по результатам специальных предварительных расчётов, вычисляя оценку интенсивности дважды: для параметра  $K = 1$  и некоторого заданного  $K$ . В этом случае, зная среднее время вычисления одного выборочного значения  $\xi_i^{(1)} = t^{(1)}$  и  $\xi_i^{(K)} = t^{(K)}$  случайных величин  $\xi^{(1)}$  и  $\xi^{(K)}$ , имеем

$$t_2 = \frac{t^{(K)} - t^{(1)}}{(K-1)l_2}, \quad t_1 = t^{(1)} - t_2,$$

следовательно

$$\tilde{t}_1 = \frac{t^{(1)}K - t^{(K)}}{K-1}, \quad \tilde{t}_2 = \frac{t^{(K)} - t^{(1)}}{K-1}.$$

Величину  $D_1$  можно оценить по формуле

$$D_1 = \mathbf{D}\xi^{(K)} - D_2/K.$$

#### 4. Дискретно-стохастическая версия “выборки по важности”

В качестве плотности распределения дополнительного узла интегрирования  $\rho$  в двойной локальной оценке обычно выбирается плотность

$$p(\rho) = \frac{\sigma(\rho)e^{-\tau(\rho, r^*)}}{2\pi(1 - \cos \theta^*)}, \quad (9)$$

не отражающая характер поведения подынтегральной функции из (4) для некоторых точек  $x \in X$ . Имея простую процедуру, определяющую, для каких  $x \in X$  функция  $h_i^{(2)}(x, r^*, \rho)$  из (4) пропорциональна функции (9), а для каких  $x \in X$  не пропорциональна, можно для моделирования дополнительных узлов  $\rho$  комбинировать плотность (9) с плотностью, в некотором смысле более близкой к функции  $h_i^{(2)}(x, r^*, \rho)$ .

Далее рассмотрим некоторую область  $\tilde{G}_{\varepsilon_1} \in G$  такую, что  $\tilde{G} \in \tilde{G}_{\varepsilon_1}$  (возможно совпадающую с областью  $\tilde{G}_\varepsilon$ , см. раздел 3), и будем моделировать дополнительные узлы интегрирования по плотности (9) для точек столкновения  $\{x_n : r_n \in G \setminus \tilde{G}_{\varepsilon_1}\}$ . Для  $\{x_n : r_n \in \tilde{G}_{\varepsilon_1}\}$  в качестве плотности распределения дополнительного узла интегрирования  $\rho$  выберем кусочно-линейное приближение функции  $h_i^{(2)}(x, r^*, \rho)$  по переменной  $\rho \in \tilde{G}$  и вычислим интеграл (4) с помощью метода дискретно-стохастической версии "выборки по важности" [4].

Вычисление интеграла проводится в системе полярных координат с центром в  $r^*$  и осью  $\omega^*$ . В этом случае  $\rho = (\tilde{r}, \tilde{\mu}, \tilde{\varphi})$  и область  $\tilde{G}$  содержится в некотором параллелепипеде со сторонами  $(\tilde{r}, \tilde{\mu}, \tilde{\varphi}) \in [\tilde{r}_{\min}, \tilde{r}_{\max}] \times [0, \cos \theta^*] \times [0, 2\pi]$ . Плотность  $p_j(\rho)$  для фиксированной точки столкновения  $\{x_j \in X : r_j \in \tilde{G}_{\varepsilon_1}\}$  строится как кусочно-линейная аппроксимация функции  $h_i^{(2)}(x_j, r^*, \rho)$  по переменной  $\tilde{r}$  для заданных реализаций  $\tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j$  случайных величин  $\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}$ , равномерно распределённых в области  $[0, \cos \theta^*] \times [0, 2\pi]$ :

$$p(\rho) = \frac{p(\tilde{r}|x_j, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j)}{2\pi(1 - \cos \theta^*)}.$$

Пусть на отрезке  $[\tilde{r}_{\min}, \tilde{r}_{\max}]$  задана неравномерная сетка  $\{\tilde{r}_m\}$ ,  $m = 0, \dots, M$ , с шагом  $h_m = \tilde{r}_{m+1} - \tilde{r}_m$ . Тогда для фиксированных значений  $\tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j$  случайных величин  $\tilde{\mu}, \tilde{\varphi}$  плотность  $p(\tilde{r}|x_j, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j)$  представляется как

$$p(\tilde{r}|x_j, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j) = \sum_{m=0}^M P_m f_m(\tilde{r}), \quad f_m(\tilde{r}) = \chi_m \left( \frac{\tilde{r} - \tilde{r}_m}{\tilde{h}_m} \right) / Y_m. \quad (10)$$

где

$$\chi(y) = \beta^{(1)}(y) = \begin{cases} 1 + y & \text{при } -1 \leq y \leq 0, \\ 1 - y & \text{при } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$\beta$  — сплайн первой степени,

$$\tilde{h}_m = \begin{cases} h_{m-1} & \text{при } \tilde{r} - \tilde{r}_m \leq 0, \\ h_m & \text{при } \tilde{r} - \tilde{r}_m \geq 0, \end{cases}$$

$$Y_m = \int_R \chi_m(\tilde{r}) d\tilde{r} = \frac{1}{2}(h_{m-1} + h_m), \quad P_m = CY_m h_i^{(2)}(x_j, r^*, \tilde{r}_m, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j) -$$

значения аппроксимируемой функции в узлах  $\{\tilde{r}_m\}$  при фиксированных  $\tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j$ . Нормирующая константа

$$C = 1 / \sum_{m=0}^M Y_m h_i^{(2)}(x_j, r^*, \tilde{r}_m, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j).$$

Моделирование координаты  $\tilde{r}$  дополнительного узла  $\rho$  проводится методом суперпозиции: по вероятностям  $P_k$  выбирается номер моделируемой плотности  $P(m = k) = P_k$  и строится случайная величина по плотности  $f_m(\tilde{r})$ .

Для неравномерной сетки и плотности  $f_m(\tilde{r})$  с вероятностью  $q = h_{m-1}/(h_{m-1} + h_m)$  моделируется точка из промежутка  $[\tilde{r}_m - h_{m-1}, \tilde{r}_m]$ , с вероятностью  $(1 - q)$  — из промежутка  $[\tilde{r}_m, \tilde{r}_m + h_m]$  по формулам  $\tilde{r}_j = \tilde{r}_m + h_{m-1}(\sqrt{\alpha_j} - 1)$  и  $\tilde{r}_j = \tilde{r}_m + h_m(\sqrt{\alpha_j} - 1)$  соответственно. Здесь  $\alpha_j$  — равномерно распределённые случайные величины на  $(0, 1)$ .

Для равномерной сетки  $\{\tilde{r}_m\}$  с шагом  $h$  существует более простая формула моделирования случайной величины по плотности  $f_m(\tilde{r})$ :  $\tilde{r}_j = h(\alpha_j^1 + \alpha_j^2 - 1) + \tilde{r}_m$ , здесь  $\alpha_j^s, s = 1, 2$  — равномерно распределённые случайные величины на  $(0, 1)$ .

В численных экспериментах число узлов аппроксимации  $\{\tilde{r}_m\}$  выбиралось малым, при этом один из узлов находился вблизи проекции точки  $r_j$  на луч  $\omega_j = (\tilde{r}, \tilde{\mu}_j, \tilde{\varphi}_j)$ , а узел  $r_0$  — на пересечении границы области  $G$ , ближайшей к детектору, и луча  $\omega_j$ .

Для быстроты моделирования случайных узлов  $\rho$  число узлов сетки  $M$  должно быть мало. Вместе с тем такая аппроксимация должна отражать поведение подынтегральной функции, т. е. узлы аппроксимации  $\{\tilde{r}_m\}$  должны быть близки к экстремумам приближаемой функции. Это условие осложняет использование данной плотности, но даже приближённое положение узлов аппроксимации в некоторых случаях дает выигрыш в трудоёмкости вычисления интенсивности излучения, интегрированной по времени. Это можно наблюдать в нижеприведённых тестовых расчётах.

## 5. Результаты численных экспериментов

Для иллюстрации эффективности предложенного алгоритма представлены результаты вычисления оценки интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  и временного распределения интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$  для плоского слоя  $G = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in R^3 : h \leq \tilde{z} \leq H\}$ ,  $h = 0.5$  км,  $H = 0.9$  км, заполненного веществом с коэффициентом ослабления  $\sigma(r) \equiv \Sigma \equiv 50$  км<sup>-1</sup>, вероятностью выживания  $q = 0.95$  и индикатрисой рассеяния Хеньи — Гринштейна  $g(\mu) = (1 - \alpha^2)/2(1 + \alpha^2 - 2\alpha\mu)^{3/2}$ ,  $\mu \in (-1, +1)$ , с параметрами  $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ .

Предполагается, что детектор излучения находится в начале координат  $r^* = (0, 0, 0)$ , ось детектора совпадает с  $\omega^* = (0, 0, 1)$ . Источник излучения, находящийся в точке  $r_0 = (-0.7$  км,  $0, 0)$ , излучает импульс единичной мощности в круговом конусе с раствором  $\theta_0 = 20''$  в направлении  $\omega_0 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ .

Для вещества с индикатрисой рассеяния Хеньи — Гринштейна с параметром  $\alpha = 0.8$  и детектора с углом раствора  $\theta^* = 1^0$  проведено сравнение двойной локальной оценки интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  (случай  $K = 1$ ) с модифицированной двойной локальной оценкой. Во втором случае выбиралась область

$$\tilde{G}_\varepsilon = \left\{ r \in G : \left( \frac{r - r^*}{|r - r^*|}, \omega^* \right) \geq \cos 3^0 \right\}$$

для точек столкновения  $\{x_n \in X : r_n \in G \setminus \tilde{G}_\varepsilon\}$ ,  $K = 1$ , а для точек  $\{x_n \in X : r_n \in \tilde{G}_\varepsilon\}$  число  $K$  дополнительных узлов интегрирования  $\rho_k$  варьировалось. Все дополнительные узлы  $\rho_k$  моделировались по плотности (9). В табл. 1 показана трудоёмкость  $S = \sigma^2 T$  рассмотренных оценок, построенных по  $n = 10^9$  траекториям. Здесь  $T$  — среднее время моделирования одной случайной траектории,  $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}I_{\Omega^*}(r^*)/n}$  — среднее квадратичное отклонение оценки,  $t$  — время вычисления оценки по  $n = 10^9$  траекториям. Из приведённых данных следует, что трудоёмкости  $S$  оценок примерно одинаковы для  $K = 200 \div 250$  и значительно меньше трудоёмкости двойной локальной оценки ( $K = 1$ ). Проводились

Т а б л и ц а 1. Трудоемкость  $S$ , среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  модифицированной двойной локальной оценки интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  для различного числа  $K$

$K$	1	25	50	100	150	180	200	230	250
$S \cdot 10^7$	33	3.4	4.2	3.9	4.4	2.7	1.9	2.0	1.8
$t \cdot 10^{-4}, \text{с}$	5.34	5.97	6.9	8.6	10.5	11.4	12.4	13.4	14.16
$\sigma \cdot 10^6$	7.84	2.39	2.47	2.12	2.06	1.54	1.23	1.21	1.09

также расчёты согласно формуле (8), где величины  $D_1$  и  $D_2$  оценивались по числу траекторий  $n = 10^8$ . Согласно (8) получено оптимальное  $K_{\text{opt}} \approx 205$ , которое согласуется с вычислительным экспериментом.

В последующих вычислениях для построения модифицированной двойной локальной оценки область  $G$  разбивалась несколькими вложенными конусами. Пусть

$$\nu(r) = \left( \frac{r - r^*}{|r - r^*|}, \omega^* \right),$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &= (r \in G : \nu(r) \leq \gamma_1), & \tilde{G}_2 &= (r \in G : \gamma_1 \leq \nu(r) \leq \gamma_2), \\ \tilde{G}_3 &= (r \in G : \gamma_2 \leq \nu(r) \leq \gamma_3), & \tilde{G}_4 &= (r \in G : \nu(r) \geq \gamma_3). \end{aligned}$$

В представленных расчётах  $\gamma_1 = \cos(0.087)$ ,  $\gamma_2 = \cos(0.052)$ ,  $\gamma_3 = \cos(0.009)$ . Для точек  $\{x_n \in X : r_n \in \tilde{G}_1\}$  функционал (7) оценивался по одному дополнительному случайному узлу  $\rho$  ( $K = 1$ ). Для  $\{x_n \in X : r_n \in \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{G}_4\}$  число дополнительных узлов  $K_2, K_3, K_4$  выбиралось исходя из нескольких оценок интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$ , построенных по числу траекторий  $n = 10^7 - 10^8$ , с различными значениями  $K_2, K_3, K_4$ . Модифицированная двойная локальная оценка с плотностями дополнительных узлов (9) и (10) обозначена как МДЛО1, с плотностью дополнительного узла (9) — как МДЛО2. Эти оценки сравнивались с двойной локальной оценкой (ДЛО) (6) и локальной оценкой (ЛО) (2).

На рис. 2 представлены оценки временного распределения интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$  для вещества с индикатрисой рассеяния Хеньи — Гринштейна с параметром  $\alpha = 0.8$  и детектора с углом раствора  $\theta^* = 30''$  на временном интервале [4.6 мкс, 7.2 мкс] с шагом гистограммы 0.1 мкс. Число дополнительных узлов интегрирования  $\rho_k$  в оценках МДЛО1 и МДЛО2 равно  $K_2 = 20$ ,  $K_3 = 30$ ,  $K_4 = 50$ . Жирной линией обозначены среднеквадратичные отклонения  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n_t$ , двойной локальной оценки, тонкой линией —  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n_t$ , модифицированных двойных локальных оценок МДЛО1 и МДЛО2.

В табл. 2 приведены значения локальных оценок интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$ , определяемой детектором с углом раствора  $\theta^* = 1'$  и параметром индикатрисы рассеяния  $\alpha = 0.7, 0.8$ , среднеквадратичных отклонений  $\sigma$ , времени вычисления оценок  $t$  по числу траекторий  $n = 10^9$  (исключение — двойные модифицированные оценки МДЛО1 и МДЛО2 для задачи с параметром  $\alpha = 0.7 - n = 10^8$ ) и трудоемкости алгоритмов  $S$ . Видно, что для малых углов раствора детектора (порядка  $\theta^* = 1'$  и меньше) локальная оценка, построенная по числу траекторий  $n = 10^9$ , не дает удовлетворительной точности вычисления временного распределения интенсивности  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$ , для нее велики также  $\sigma$  и  $S$ . Трудоемкость  $S$  модифицированных двойных локальных оценок МДЛО1 и МДЛО2 в несколько раз меньше трудоемкости двойной локальной оценки, а для  $\alpha = 0.7$  эта разница составляет более одного порядка.

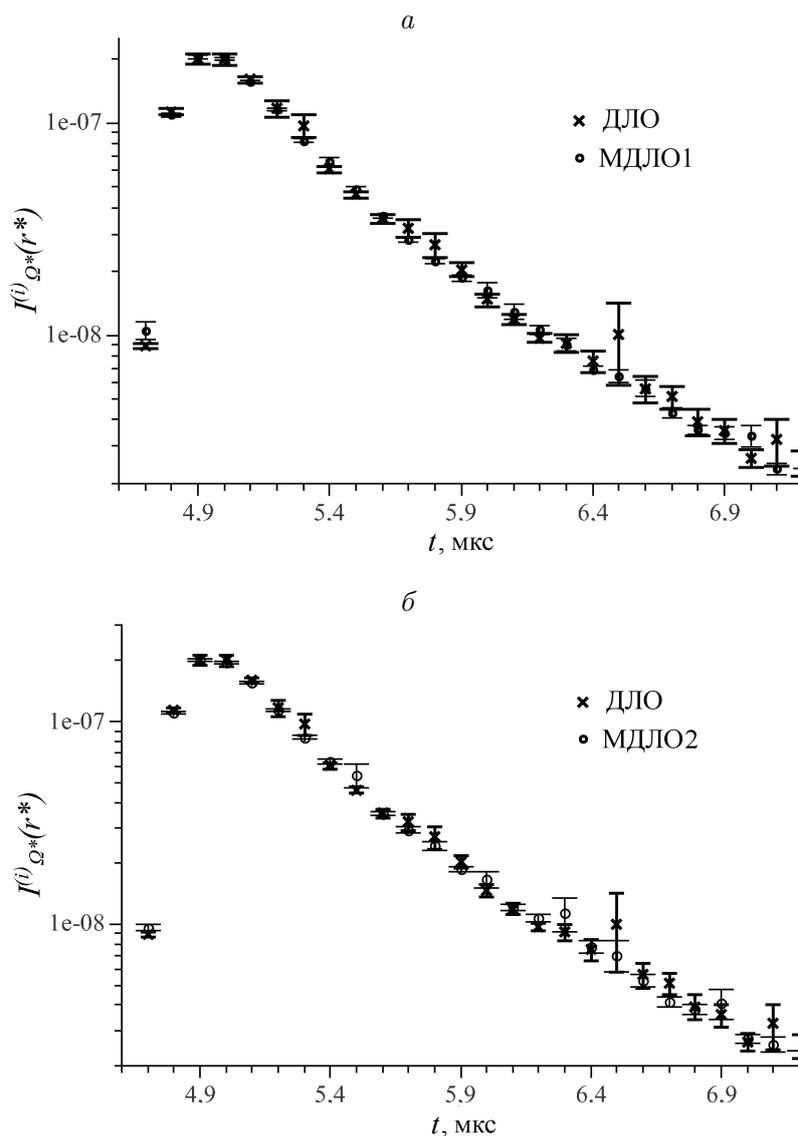


Рис. 2. Оценка временного распределения интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$  при  $\alpha = 0.8$ ,  $\theta^* = 30''$ : а — ДЛО, МДЛО1, б — ДЛО, МДЛО2

Т а б л и ц а 2. Результаты вычисления интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  различными методами для  $\theta^* = 1'$  ( $\alpha$  — параметр индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна)

Метод	$I_{\Omega^*}(r^*) \cdot 10^7$	$\sigma \cdot 10^7$	$t, c$	$S \cdot 10^{13}$
$\alpha = 0.8$				
ЛО	1.48	0.20	15025	60
ДЛО	1.47	0.03	30880	2.8
МДЛО1	1.44	0.009	42970	0.8
МДЛО2	1.45	0.02	42430	1.7
$\alpha = 0.7$				
ЛО	1.14	0.118	20200	28
ДЛО	1.19	0.043	42500	7.7
МДЛО1	1.12	0.012	7300	0.11
МДЛО2	1.14	0.010	7150	0.08

В табл. 3 показана трудоёмкость  $S$  локальных оценок для различных углов раствора детектора  $\theta^*$  и параметров индикатрисы рассеяния  $\alpha = 0.7, 0.8$ . Приведенные данные подтверждают, что трудоёмкость оценок МДЛО1 и МДЛО2 меньше трудоёмкости  $S$  оценки ДЛО для всех представленных параметров  $\theta^*, \alpha$ .

В ряде случаев применение аппроксимации подынтегральной функции в качестве плотности моделирования дополнительного случайного узла интегрирования  $\rho$  позволяет незначительно сократить трудоёмкость модифицированной оценки МДЛО1 по сравнению с МДЛО2, где в качестве плотности дополнительного узла интегрирования

Т а б л и ц а 3. Трудоёмкость  $S$  рассмотренных методов для  $\theta^* = \{1^0, 30', 1', 30''\}$  с параметром индикатрисы рассеяния Хеньи – Гринштейна  $\alpha = 0.7, K_2 = 40, K_3 = 60, K_4 = 100$  и  $\alpha = 0.8, K_2 = 20, K_3 = 30, K_4 = 50$

Метод	$1^0$	$30'$	$1'$	$30''$
$\alpha = 0.7, K_2 = 40, K_3 = 60, K_4 = 100$				
ЛО	$2.3 \cdot 10^{-8}$	$7.0 \cdot 10^{-9}$	—	—
ДЛО	$54 \cdot 10^{-8}$	$49 \cdot 10^{-9}$	$7.7 \cdot 10^{-13}$	$3.4 \cdot 10^{-14}$
МДЛО1	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$	$0.11 \cdot 10^{-13}$	$0.13 \cdot 10^{-14}$
МДЛО2	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$0.08 \cdot 10^{-13}$	$0.07 \cdot 10^{-14}$
$\alpha = 0.8, K_2 = 20, K_3 = 30, K_4 = 50$				
ЛО	$6.9 \cdot 10^{-8}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	—	—
ДЛО	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$
МДЛО1	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$8.2 \cdot 10^{-14}$	$2.5 \cdot 10^{-15}$
МДЛО2	$1.7 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.7 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-15}$

Т а б л и ц а 4. Оценки интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  и среднеквадратичного отклонения  $\sigma$  для различных радиусов  $\varepsilon$  шара  $B_\varepsilon$ ;  $\theta^* = 30''$ ,  $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$

$\varepsilon$	ДЛО $(I_{\Omega^*}(r^*) \pm \sigma) \cdot 10^8$	МДЛО1 $(I_{\Omega^*}(r^*) \pm \sigma) \cdot 10^8$	МДЛО2 $(I_{\Omega^*}(r^*) \pm \sigma) \cdot 10^8$
$\alpha = 0.6$			
$4 \cdot 10^{-5}$	$2.064 \pm 0.053$	$2.052 \pm 0.017$	$2.046 \pm 0.025$
$1 \cdot 10^{-4}$	$2.064 \pm 0.053$	$2.049 \pm 0.016$	$2.045 \pm 0.025$
$4 \cdot 10^{-4}$	$2.041 \pm 0.051$	$2.022 \pm 0.014$	$2.009 \pm 0.014$
$\alpha = 0.7$			
$1 \cdot 10^{-4}$	$2.590 \pm 0.044$	$2.767 \pm 0.034$	$2.709 \pm 0.025$
$2 \cdot 10^{-4}$	$2.590 \pm 0.044$	$2.756 \pm 0.033$	$2.703 \pm 0.025$
$4 \cdot 10^{-4}$	$2.589 \pm 0.044$	$2.728 \pm 0.027$	$2.686 \pm 0.024$
$8 \cdot 10^{-4}$	$2.561 \pm 0.041$	$2.679 \pm 0.017$	$2.518 \pm 0.017$
$\alpha = 0.8$			
$5 \cdot 10^{-5}$	$3.343 \pm 0.058$	$3.527 \pm 0.132$	$3.395 \pm 0.025$
$1 \cdot 10^{-4}$	$3.333 \pm 0.058$	$3.395 \pm 0.023$	$3.395 \pm 0.025$
$5 \cdot 10^{-4}$	$3.317 \pm 0.057$	$3.349 \pm 0.022$	$3.339 \pm 0.021$
$1 \cdot 10^{-3}$	$3.232 \pm 0.051$	$3.278 \pm 0.020$	$3.328 \pm 0.019$
$\alpha = 0.9$			
$4 \cdot 10^{-5}$	$3.390 \pm 0.250$	$3.028 \pm 0.053$	$3.263 \pm 0.103$
$1 \cdot 10^{-4}$	$3.390 \pm 0.250$	$3.028 \pm 0.053$	$3.244 \pm 0.103$
$4 \cdot 10^{-4}$	$3.349 \pm 0.248$	$3.002 \pm 0.052$	$3.216 \pm 0.103$
$1 \cdot 10^{-3}$	$3.266 \pm 0.245$	$2.955 \pm 0.051$	$3.129 \pm 0.099$

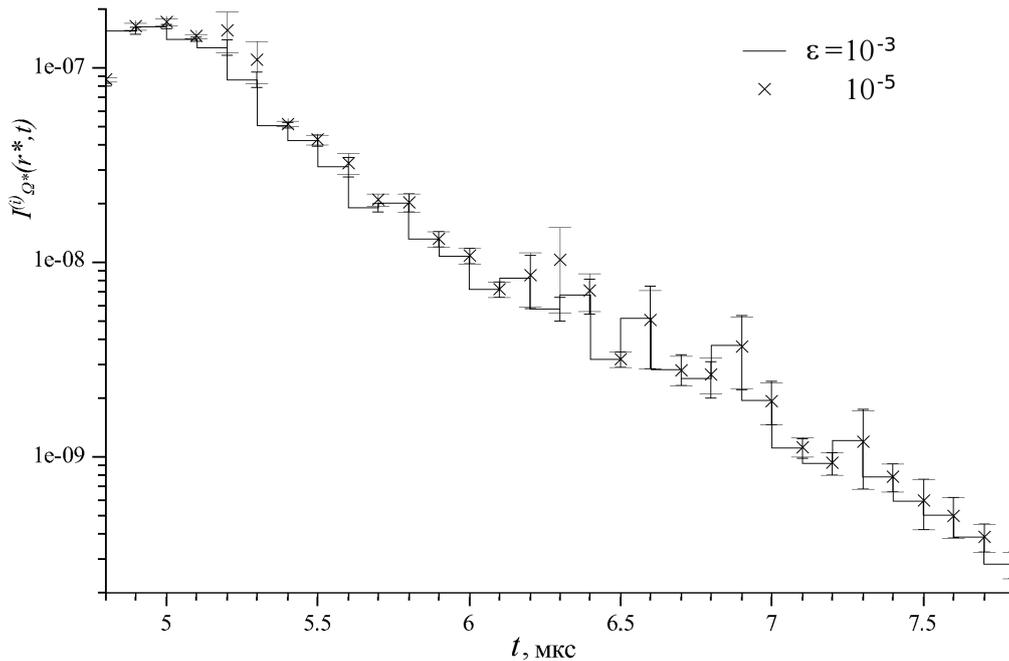


Рис. 3. Модифицированная двойная локальная оценка временного распределения интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$  для различных радиусов  $\epsilon$  шара  $B_\epsilon$ ;  $\theta^* = 30''$ ,  $\alpha = 0.9$

берется плотность (9). Для улучшения результата необходима более точная аппроксимация подынтегральной функции в (7) при малом числе узлов аппроксимации.

Для обеспечения конечности дисперсии двойных локальных оценок вычислялись смещенные оценки интенсивности излучения, в которых для точек столкновения  $\{x_n \in X : r_n \in \tilde{G}\}$  дополнительные узлы интегрирования  $\rho_k$  моделировались в области  $\tilde{G} \setminus B_\epsilon$ ,  $B_\epsilon = \{\tilde{r} \in R^3 : |r_n - \tilde{r}| < \epsilon\}$ . В табл. 4 (см. с. 80) показано поведение значений двойных локальных оценок интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}(r^*)$  в зависимости от линейного размера  $\epsilon$  шара  $B_\epsilon$ . Рассмотрена задача с углом  $\theta^* = 30''$  и параметрами индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна  $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ . Для данной задачи  $\epsilon \approx 4 \cdot 10^{-4}$  приводит к незначительному смещению (порядка погрешности  $\sigma$ ) оценки  $I_{\Omega^*}(r^*)$  и уменьшает среднеквадратичное отклонение  $\sigma^{(i)}$  в оценке временного распределения интенсивности  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$ . Это отражено на рис. 3, где представлена модифицированная двойная локальная оценка МДЛО2 временного распределения интенсивности излучения  $I_{\Omega^*}^{(i)}(r^*, t)$  для задачи с параметрами  $\theta^* = 30''$ ,  $\alpha = 0.9$ ,  $K_2 = 10$ ,  $K_3 = 20$ ,  $K_4 = 30$ .

Из сравнения двойной локальной оценки с модификациями МДЛО1 и МДЛО2 следует, что применение метода “расщепления” позволяет значительно снизить трудоёмкость алгоритма. Это наиболее заметно для задач с “гладкими” индикатрисами рассеяния ( $\alpha = 0.6 \div 0.8$ ) и достаточно большими углами раствора приемника  $\theta^*$ . Но и для вытянутых индикатрис, а также малых углов  $\theta^*$  предложенные модификации в сравнении с двойной локальной оценкой сохраняют свое преимущество.

## Список литературы

- [1] ДЖЕТЫБАЕВ Е.О. К решению нестационарного уравнения переноса излучения методом Монте-Карло. Новосибирск, 1982 (Препр. ВЦ СО АН СССР; № 346).

- [2] КРЕКОВ Г.А. Метод Монте-Карло в проблемах атмосферной оптики // Оптика атмосферы и океана. 2007. Т. 20, № 9. С. 826–834.
- [3] МАРЧУК Г.И., МИХАЙЛОВ Г.А., НАЗРАЛИЕВ М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. М.: Наука, 1976.
- [4] МИХАЙЛОВ Г.А., ВОЙТИШЕК А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.

*Поступила в редакцию 2 апреля 2012 г.*