Расчёт эффективных электрофизических характеристик в многомасштабной изотропной среде

Е. П. Курочкина[1], О. Н. Соболева[2]
[1]*Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*
e-mail: kurochkina@itp.nsc.ru, olga@nmsf.sscc.ru

В рамках метода подсеточного моделирования получены эффективные коэффициенты диэлектрической проницаемости и проводимости. Коррелированные поля диэлектрической проницаемости и проводимости моделируются мультипликативными каскадами с логарифмически нормальными распределениями вероятностей. Предполагается, что длина волны много больше максимального масштаба неоднородностей среды. Полученные теоретические результаты сравниваются с данными прямого численного моделирования.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, эффективные коэффициенты, подсеточное моделирование, многомасштабные случайные среды.

Введение

В геофизических задачах крупные неоднородные включения (пласты, пропластки) учитываются в математической модели непосредственно с помощью граничных условий (см., например, [1 – 3]). Пространственное распределение мелкомасштабных неоднородностей редко известно точно и часто описывается случайными полями. Поэтому задачи для сред с вариациями физических параметров на всех масштабах требуют значительных вычислительных затрат. Традиционный подход к решению задач, включающих малые масштабы, состоит в поиске более простых моделей, требующих меньших вычислительных затрат, решение которых для физических величин, например, напряжённости электрического поля, плотности тока, было бы близко в среднем к решению первоначальной полной задачи. Построение таких моделей, правильно описывающих поведение решения в крупномасштабном пределе, в литературе известно как гомогенизация, огрубление сеток, подсеточное моделирование, расчёт эффективных коэффициентов [4 – 8]. Эти подходы наиболее развиты в теории стационарной фильтрации [6 – 10].

Экспериментально показано, что нерегулярность параметров естественных сред возрастает, когда масштаб измерений уменьшается [9]. В этом случае параметры многих сред могут быть описаны фракталами или мультипликативными каскадами, т. е. полями, которые сильно меняются при переходе от одного масштаба к другому [11 – 13]. Этот факт позволяет для построения эффективных коэффициентов применять метод подсеточного моделирования.

В настоящей работе с помощью метода подсеточного моделирования получены уравнения для эффективных коэффициентов в уравнениях Максвелла в случае, если проводимость и диэлектрическая проницаемость описываются мультипликативными логарифмически нормальными каскадами.

1. Постановка задачи

Согласно [14] уравнения Максвелла для монохроматических полей $\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re} \times \times (\mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t})$, $\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}(\mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{-i\omega t})$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x}) &= (-i\omega\varepsilon(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}, \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — векторы напряжённости электрического и магнитного полей; $\varepsilon(\mathbf{x})$ — диэлектрическая проницаемость; μ — магнитная проницаемость; $\sigma(\mathbf{x})$ — электропроводность; ω — циклическая частота; $\mathbf{x}$ — вектор пространственных координат. Магнитная проницаемость μ равна магнитной проницаемости вакуума. В неограниченной области выполняются условия излучения от источника $\mathbf{F}$, т. е. на бесконечности решение системы уравнений (1) затухает. При $\sigma(\mathbf{x})/(\omega\varepsilon(\mathbf{x})) \gg 1$, когда токи проводимости значительно преобладают над токами смещения, диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\mathbf{x})$ слабо влияет на характеристики поля; амплитуда и фаза поля зависят в основном от электропроводности среды $\sigma(\mathbf{x})$. В этом случае задачу рассматривают в квазистационарном приближении. При больших сопротивлениях среды на высоких частотах появляется зависимость измеряемого сигнала от диэлектрической проницаемости. Циклическая частота, электропроводность и диэлектрическая проницаемость удовлетворяют неравенству $\sigma(\mathbf{x})/(\omega\varepsilon(\mathbf{x})) < 1$.

Для моделирования полей $\sigma(\mathbf{x})$, $\varepsilon(\mathbf{x})$ используется подход, подробно описанный в работе [15]. Пусть поле электропроводности $\sigma(\mathbf{x})$ известно. Это означает, что выполнено его измерение на некотором масштабе l_0 в каждой точке $\mathbf{x}$. Чтобы перейти к более грубой сетке масштабов, недостаточно сгладить $\sigma(\mathbf{x})_{l_0}$ по масштабу l, $l > l_0$, так как сглаженное поле не будет правильно отражать физический процесс, описываемый уравнениями (1) на интервале масштабов (l, L), где L — максимальный масштаб неоднородности среды. Это объясняется тем, что флуктуации проводимости на интервале масштабов (l_0, l) коррелируют с флуктуациями напряжённости электрического поля $\mathbf{E}$ и эти корреляции могут быть достаточно большими.

Для построения модели среды, как и в работе [16], рассматривается безразмерное поле ψ, равное отношению полей, полученных сглаживанием проводимости $\sigma(\mathbf{x})_{l_0}$ по двум различным близким к (l_0) масштабам l, l'. Обозначим через $\sigma(\mathbf{x})_l$ сглаженное по масштабу l поле $\sigma_{l_0}(\mathbf{x})$. Тогда $\psi(x, l, l') = \sigma(\mathbf{x})_{l'}/\sigma(\mathbf{x})_l$, $l' < l$. Случайное поле ψ меняется плавно по сравнению с полями $\sigma(\mathbf{x})_{l'}$, $\sigma(\mathbf{x})_l$. Раскладывая поле ψ в ряд относительно $l' - l$ и оставляя только члены первого порядка малости при $l' \to l$, получим уравнение

$$\frac{\partial \ln \sigma(\mathbf{x})_l}{\partial \ln l} = \varphi(\mathbf{x}, l), \tag{2}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, l') = (\partial\psi(\mathbf{x}, l', l'y)/\partial y)\,|_{y=1}$. Фактически мелкомасштабные флуктуации поля φ могут наблюдаться только в некотором конечном диапазоне масштабов $l_0 < l < L$. Решение уравнения (2) имеет вид

$$\sigma_{l_0}(\mathbf{x}) = \sigma_0 \exp\left(-\int_{l_0}^{L} \varphi(\mathbf{x}, l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right), \tag{3}$$

где σ_0 — константа. Согласно теореме о суммах независимых случайных полей [18], если дисперсия $\varphi(\mathbf{x}, l)$ в данной точке конечна, то при больших значениях L/l_0 интеграл в (3) стремится к полю с нормальным распределением вероятностей. Если дисперсия поля $\varphi(\mathbf{x}, l)$ бесконечна и существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение суммы случайных величин, то это распределение является устойчивым. В данной работе предполагается, что поле $\varphi(\mathbf{x}, l)$ имеет нормальное распределение и изотропную однородную корреляционную функцию

$$\begin{aligned} &< \varphi(\mathbf{x}, l)\ \varphi(\mathbf{y}, l') > - < \varphi(\mathbf{x}, l) >< \varphi(\mathbf{y}, l') >= \\ &= \Phi^{\varphi\varphi}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, l, l')\delta(\ln l - \ln l') \end{aligned} \tag{4}$$

(угловые скобки означают статистическое усреднение). Из формулы (4) следует, что флуктуации поля φ в разных масштабах не коррелируют. Это обычное предположение для скейлинговых моделей соответствует тому факту, что статистическая зависимость становится незначительной в случае, если масштабы флуктуаций параметров различны по величине [16]. Если же среда масштабноинвариантная, то для любого положительного значения K выполняется условие

$$\Phi^{\varphi\varphi}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, l, l') = \Phi^{\varphi\varphi}(K|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, Kl, Kl').$$

Коэффициент диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{x})$ моделируется мультипликативным каскадом так же, как поле проводимости:

$$\varepsilon_{l_0}(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 \exp\left(-\int_{l_0}^{L} \chi(\mathbf{x}, l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right). \tag{5}$$

Предполагается, что функция $\chi(\mathbf{x}, l)$ имеет нормальное распределение вероятностей и дельтокоррелированна по логарифму от масштаба l. Если диэлектрическая проницаемость для любого l удовлетворяет условию $< \varepsilon_l(\mathbf{x}) >= \varepsilon_0$ и масштабноинвариантна, то

$$\Phi_0^{\chi\chi} = 2 < \chi > . \tag{6}$$

Корреляционная функция между полями проводимости и диэлектрической проницаемостью определяется корреляцией между полями $\chi(\mathbf{x}, l)$ и $\varphi(\mathbf{x}, l)$:

$$\Phi^{\varphi\chi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, l, l') = \langle\varphi(\mathbf{x}, l)\chi(\mathbf{y}, l')\rangle - \langle\varphi(\mathbf{x}, l)\rangle\langle\chi(\mathbf{y}, l')\rangle = \Phi^{\varphi\chi}(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, l, l')\delta(\ln l - \ln l'). \tag{7}$$

При не масштабноинвариантной среде величины $\Phi_0^{\varphi\varphi}, \Phi_0^{\chi\chi}$, $\Phi^{\varphi\chi}$ зависят от масштаба l.

2. Подсеточная модель

Функции проводимости и диэлектрической проницаемости $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})_{l_0}$, $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x})_{l_0}$ разделим на две компоненты относительно масштаба l. Крупномасштабные (надсеточные) компоненты $\sigma(\mathbf{x}, l)$, $\varepsilon(\mathbf{x}, l)$ получены статистическим усреднением по всем $\varphi(x, l_1)$ и $\chi(x, l_1)$ для $l_0 < l_1 < l$, $l - l_0 = dl$, где dl мало. Мелкомасштабные (подсеточные) компоненты равны $\sigma'(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \sigma(x,l)$, $\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}) - \varepsilon(\mathbf{x},l)$:

$$\varepsilon(\mathbf{x},l) = \varepsilon_0 \exp\left[-\int\limits_l^L \chi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\left\langle \exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \chi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\right\rangle,$$

$$\varepsilon'(\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x},l)\left[\frac{\exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \chi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]}{\left\langle\exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \chi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\right\rangle} - 1\right], \quad \langle\varepsilon'(\mathbf{x})\rangle = 0,$$

$$\sigma(\mathbf{x},l) = \sigma_0 \exp\left[-\int\limits_l^L \varphi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\left\langle \exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\right\rangle,$$

$$\sigma'(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x},l)\left[\frac{\exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]}{\left\langle\exp\left[-\int\limits_{l_0}^l \varphi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\right\rangle} - 1\right], \quad \langle\sigma'(\mathbf{x})\rangle = 0. \tag{8}$$

Из формул (8) следует, что с точностью до членов второго порядка малости

$$\varepsilon(\mathbf{x},l) \simeq \left[1 - \langle\chi\rangle\frac{dl}{l} + \frac{1}{2}\Phi_0^{\chi\chi}(l)\frac{dl}{l}\right]\varepsilon_l(\mathbf{x}),$$
$$\sigma(\mathbf{x},l) \simeq \left[1 - \langle\varphi\rangle\frac{dl}{l} + \frac{1}{2}\Phi_0^{\varphi\varphi}(l)\frac{dl}{l}\right]\sigma_l(\mathbf{x}). \tag{9}$$

Крупномасштабные компоненты напряжённости электрического и магнитного полей $\mathbf{E}(\mathbf{x},l)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x},l)$ получаются как усреднённые решения системы уравнений (1), в которых крупномасштабные компоненты $\sigma(\mathbf{x},l)$, $\varepsilon(\mathbf{x},l)$ фиксированы, а мелкомасштабные $\sigma'(\mathbf{x})$, $\varepsilon'(\mathbf{x})$ — случайные поля. Подсеточные компоненты электрического и магнитного полей равны $\mathbf{E}'(\mathbf{x}) = \mathbf{E}(\mathbf{x}) - \mathbf{E}(\mathbf{x},l)$, $\mathbf{H}'(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{H}(\mathbf{x},l)$. Подставим выражения для $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\sigma(\mathbf{x})$, $\varepsilon(\mathbf{x})$ в систему уравнений (1) и усредним по мелкомасштабным компонентам:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x},l) = (-i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l) + \sigma(\mathbf{x},l))\mathbf{E}(\mathbf{x},l) + \langle(-i\omega\varepsilon' + \sigma')\mathbf{E}'\rangle + \mathbf{F},$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x},l) = \mu i\omega\mathbf{H}(\mathbf{x},l). \tag{10}$$

Подсеточный член $\langle(-i\omega\varepsilon' + \sigma')\mathbf{E}'\rangle$ в системе (10) не известен и не может не учитываться без предварительной оценки. Несмотря на то что мелкомасштабные компоненты ε', σ' малы, корреляция с подсеточной напряжённостью электрического поля может быть значительной. Оценка этого члена определяет подсеточную модель. Подсеточный член оценивается с помощью теории возмущений. Вычитая систему (10) из системы (1) и оставляя только члены первого порядка малости, получим подсеточные уравнения

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}' = (-i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l) + \sigma(\mathbf{x},l))\mathbf{E}' + (-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x}) + \sigma'(\mathbf{x}))\mathbf{E}(\mathbf{x},l),$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E}' = \mu i\omega\mathbf{H}'. \tag{11}$$

Переменная состояния $\mathbf{E}(\mathbf{x},l)$ в правой части (11) считается известной. Решение системы уравнений (11) равно [19]

$$E'_\alpha=\frac{1}{4\pi}i\omega\mu\int\frac{1}{r}e^{ikr}\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x}')+\sigma'(\mathbf{x}')\right)E_\alpha(\mathbf{x}',l)\,d\mathbf{x}'+$$
$$+\frac{1}{4\pi\left(-i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)+\sigma(\mathbf{x},l)\right)}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\frac{1}{r}e^{ikr}\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x}')+\sigma'(\mathbf{x}')\right)E_\beta(\mathbf{x}',l)\,d\mathbf{x}',\qquad(12)$$

где $r=|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$, $k^2=\omega\mu\left(\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)+i\sigma(\mathbf{x},l)\right)$. Для определённости выбрано то значение корня, при котором $\operatorname{Re}k>0$, $\operatorname{Im}k>0$. Из (12) следует, что подсеточный член в (10) равен

$$\left\langle\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x})+\sigma'(\mathbf{x})\right)E'_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle=$$
$$=\frac{1}{4\pi}i\omega\mu\int\int\frac{1}{r}e^{ikr}\left\langle\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x})+\sigma'(\mathbf{x})\right)\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x}')+\sigma'(\mathbf{x}')\right)\right\rangle E_\alpha(\mathbf{x}',l)\,d\mathbf{x}'+$$
$$+\left\langle\frac{\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x})+\sigma'(\mathbf{x})\right)}{4\pi\left(-i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)+\sigma(\mathbf{x},l)\right)}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\int\frac{1}{r}e^{ikr}\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x}')+\sigma'(\mathbf{x}')\right)\right\rangle E_\beta(\mathbf{x}',l)\,d\mathbf{x}'.\qquad(13)$$

Для полей, в которых небольшое изменение масштаба влечёт значительные изменения самого поля (это характерно для сильно меняющихся физических параметров, описываемых мультикапликативными каскадами), можно считать, что $\sigma(\mathbf{x},l)$, $\varepsilon(\mathbf{x},l)$, $\mathbf{E}(\mathbf{x},l)$ и их производные меняются медленнее, чем σ', ε', $\mathbf{E}'$ и их производные. Поэтому $\sigma(\mathbf{x},l)$, $\varepsilon(\mathbf{x},l)$, $E_\beta(\mathbf{x}',l)$ можно выносить за знак интеграла. Переходя к сферическим координатам, интегрируя по частям и оставляя только первые члены малости dl/l, при условии $\sigma(\mathbf{x})/\left(\omega\varepsilon(\mathbf{x})\right)<1$ получим оценку

$$\left\langle\left(-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x})+\sigma'(\mathbf{x})\right)E'_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle\approx$$
$$\approx-\frac{1}{3}\left(2\mu\omega^2\varepsilon(\mathbf{x},l)-i\omega\mu\sigma(\mathbf{x},l)\right)\int\limits_0^\infty re^{ikr}\Phi^{\chi\chi}(r)\,dr\frac{dl}{l}i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)E_\alpha(\mathbf{x},l)+$$
$$+\frac{2}{3}\left(2\mu\omega^2\varepsilon(\mathbf{x},l)-i\omega\mu\sigma(\mathbf{x},l)\right)\int\limits_0^\infty re^{ikr}\Phi^{\chi\sigma}(r)\,dr\frac{dl}{l}\sigma(\mathbf{x},l)E_\alpha(\mathbf{x},l)+$$
$$+i\omega\mu\sigma(\mathbf{x},l)\int\limits_0^\infty re^{ikr}\Phi^{\sigma\sigma}(r)\,dr\frac{dl}{l}\sigma(\mathbf{x},l)\,E_\alpha(\mathbf{x},l)+$$
$$+\frac{1}{3}\Phi_0^{\chi\chi}\frac{dl}{l}i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)E_i(\mathbf{x},l)+\left(\frac{1}{3}\Phi_0^{\chi\chi}-\frac{2}{3}\Phi_{(0)}^{\chi\sigma}\right)\frac{dl}{l}\sigma(\mathbf{x},l)E_i(\mathbf{x},l).\qquad(14)$$

Если $\omega\mu L^2\left|\left(i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)+\sigma(\mathbf{x},l)\right)\right|\ll 1$, то интегралы в (14) малы [20]. Поскольку максимальный масштаб неоднородностей много меньше длины волны, это неравенство не является слишком ограничительным. Можно записать

$$\left\langle-i\omega\varepsilon'(\mathbf{x})\,E'_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle+\left\langle\sigma'(\mathbf{x})\,E'_\alpha(\mathbf{x})\right\rangle\approx-\frac{1}{3}\Phi^{\chi\chi}(0)\left(-i\omega\varepsilon(\mathbf{x},l)E_\alpha(\mathbf{x},l)\right)\frac{dl}{l}-$$
$$-\left(\frac{2}{3}\Phi^{\chi\sigma}(0)-\frac{1}{3}\Phi^{\chi\chi}(0)\right)\frac{dl}{l}\sigma(\mathbf{x},l)E_\alpha(\mathbf{x},l).\qquad(15)$$

Подставим (15) в (10):

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}\left(\mathbf{x},l\right)=-i\omega\varepsilon_{l0}\exp\left[-\int\limits_{l}^{L}\chi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right)+\sigma_{l0}\exp\left[-\int\limits_{l}^{L}\varphi(\mathbf{x},l_1)\frac{dl_1}{l_1}\right]\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right),$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right)=i\omega\mu\mathbf{H}\left(\mathbf{x},l\right),$$

$$\varepsilon_{l0}=\left(1-\frac{\Phi_0^{\chi\chi}}{3}\frac{dl}{l}\right)\left[1+\left(\frac{\Phi_0^{\chi\chi}}{2}-\langle\chi\rangle\right)\frac{dl}{l}\right]\varepsilon_0,$$

$$\sigma_{l0}=\left(1-\left(\frac{2}{3}\Phi^{\chi\varphi}\left(0\right)-\frac{1}{3}\Phi^{\chi\chi}\left(0\right)\right)\frac{dl}{l}\right)\left[1+\left(\frac{\Phi_0^{\varphi\varphi}}{2}-\langle\varphi\rangle\right)\frac{dl}{l}\right]\sigma_0. \qquad (16)$$

Из (16) с точностью до членов второго порядка по dl/l следует, что новые коэффициенты σ_{l0} и ε_{l0} удовлетворяют следующим равенствам:

$$\varepsilon_{l0}=\varepsilon_0+\left(\frac{\Phi_0^{\chi\chi}}{6}-\langle\chi\rangle\right)\varepsilon_0\frac{dl}{l},$$

$$\sigma_{l0}=\sigma_0+\left(-\frac{2}{3}\Phi_0^{\chi\varphi}+\frac{1}{3}\Phi_0^{\chi\chi}+\frac{1}{2}\Phi_0^{\varphi\varphi}-\langle\varphi\rangle\right)\sigma_0\frac{dl}{l}.$$

Устремляя в этих равенствах dl к нулю, получим уравнения

$$\frac{d\ln\varepsilon_{0l}}{d\ln l}=\frac{1}{6}\Phi_0^{\chi\chi}-\langle\chi\rangle,$$

$$\frac{d\ln\sigma_{0l}}{d\ln l}=-\frac{2}{3}\Phi_0^{\chi\varphi}+\frac{1}{3}\Phi_0^{\chi\chi}+\frac{1}{2}\Phi_0^{\varphi\varphi}-\langle\varphi\rangle. \qquad (17)$$

В масштабноинвариантной среде решение данной системы уравнений зависит от масштаба l степенным образом и эффективные уравнения имеют вид

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}\left(\mathbf{x},l\right)=-i\omega\left(\frac{l}{L}\right)^{\langle\chi\rangle-\Phi_0^{\chi\chi}/6}\varepsilon_l\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right)+\left(\frac{l}{L}\right)^{\langle\varphi\rangle+\frac{2}{3}\Phi_0^{\chi\varphi}-\frac{1}{3}\Phi_0^{\chi\chi}-\frac{1}{2}\Phi_0^{\varphi\varphi}}\sigma_l\left(\mathbf{x}\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right),$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}\left(\mathbf{x},l\right)=i\omega\mu\mathbf{H}\left(\mathbf{x},l\right). \qquad (18)$$

3. Численное моделирование

Для проверки приведённых выше формул численно решается задача (1). Используются следующие безразмерные переменные: $\widehat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/L_0$, $\widehat{\sigma}=\sigma/\sigma_0$, $\widehat{\mathbf{H}}=\mathbf{H}/H_0$, $\widehat{\mathbf{E}}=\dfrac{L_0\sigma_0}{k_1H_0}\mathbf{E}$, $k_1=L_0\sqrt{\sigma_0\mu\omega}$, $k=k_1\sqrt{\widehat{\sigma}-i\kappa\widehat{\varepsilon}}$, $\kappa=\dfrac{\omega\varepsilon_0}{\sigma_0}$. В расчётах $\kappa=5$, $k_1=4\sqrt{2}$. Таким образом, задача решается при $\sigma_0=1$, $\varepsilon_0=1$. В безразмерном виде уравнения имеют вид

$$\mathrm{rot}\widehat{\mathbf{H}}=\left(\widehat{\sigma}-i\kappa\widehat{\varepsilon}\right)k_1\widehat{\mathbf{E}},$$

$$\mathrm{rot}\widehat{\mathbf{E}}=ik_1\widehat{\mathbf{H}}. \qquad (19)$$

Область интегрирования разбивается на три подобласти. В области $0\le\widehat{x}_i<0.1$, $1.5<\widehat{x}_i\le1.6$ помещается поглощающий слой [21]. Для этого производится замена переменных $s_{x_i}(\widehat{x}_i) = \dfrac{d\xi_i}{d\widehat{x}_i} = 1 + i\eta(\widehat{x}_i)$, которая обеспечивает экспоненциальное затухание волны в поглощающем слое. Функция $\eta(\widehat{x}_i)$ для наших данных выбиралась в виде

$$\eta(\widehat{x}_i) = \begin{cases} 3.5\left(\dfrac{0.1-\widehat{x}_i}{0.1}\right)^2, & 0 \le \widehat{x}_i < 0.1, \\ 0, & 1.1 \le \widehat{x}_i < 1.5, \\ 3.5\left(\dfrac{1.6-\widehat{x}_i}{0.1}\right)^2, & 1.5 \le \widehat{x}_i < 1.6. \end{cases}$$

Таким образом, переменные ξ_i отличаются от переменных $\widehat{x}_i$ только в поглощающем слое. В областях $0.1 \le \widehat{x}_i < 0.3,\ 1.3 \le \widehat{x}_i < 1.5$ коэффициенты $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\sigma}$ равны 1. В точке $(0,0,0.2)$ находится источник $F_{\widehat{x}_1} = 0$, $F_{\widehat{x}_2} = 0$, $F_{\widehat{x}_3} = 0.5\exp{-q^2(\widehat{x}_3-0.2)^2}$, $q = 60$. В области $0.3 \le \widehat{x}_i < 1.3$ проводимость и диэлектрическая проницаемость моделируются мультипликативными каскадами. Интегралы (3), (5) аппроксимируются конечно-разностными формулами, в которых удобно перейти к логарифму по основанию 2:

$$\sigma(\widehat{\mathbf{x}})_{l_0} = \exp\left[-\ln 2 \int\limits_{\log_2 l_0}^{\log_2 L} \varphi(\widehat{\mathbf{x}},\tau_i)\, d\tau\right] \approx 2^{-\sum\limits_{i=-8}^{0}\varphi(\widehat{\mathbf{x}},\tau_i)\Delta\tau},$$
$$\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}})_{l_0} = \exp\left[-\ln 2 \int\limits_{\log_2 l_0}^{\log_2 L} \chi(\widehat{\mathbf{x}},\tau)\, d\tau\right] \approx 2^{-\sum\limits_{i=-8}^{0}\chi(\widehat{\mathbf{x}},\tau_i)\Delta\tau}. \tag{20}$$

Здесь $\langle\sigma(\widehat{\mathbf{x}})_{l_0}\rangle = 1$, $\langle\varepsilon(\widehat{\mathbf{x}})_{l_0}\rangle = 1$, $l = 2^\tau$, $\Delta\tau$ — шаг по τ. В расчётах $\Delta\tau$ выбирается равным 1. В показателе степени (20) стоит сумма статистически независимых слагаемых, поскольку предполагается статистическая независимость для полей с различными масштабами. Для расчётов используются два слагаемых с $i = -5$, $i = -4$. Остальные слагаемые полагаются равными нулю. Количество слагаемых выбиралось так, чтобы масштаб самых крупных вариаций проводимости и диэлектрической проницаемости позволил заменить приближённо вероятностные средние величины осреднёнными по пространству, а самых мелких — так, чтобы разностная задача хорошо аппроксимировала уравнения (19). При каждом i поля строятся по формулам

$$\varphi(\widehat{\mathbf{x}},\tau_k) = \sqrt{\frac{\Phi_0^{\varphi\varphi}}{\ln 2}}\zeta_1(\widehat{\mathbf{x}},\tau_k) + \frac{\Phi_0^{\varphi\varphi}}{2},$$
$$\chi(\widehat{\mathbf{x}},\tau_k) = \sqrt{\frac{\Phi_0^{\chi\chi}}{\ln 2}}\left(r\zeta_1(\widehat{\mathbf{x}},\tau_k) + \sqrt{1-r^2}\zeta_2(\widehat{\mathbf{x}},\tau_k)\right) + \frac{\Phi_0^{\chi\chi}}{2},$$

где поля ζ_1, ζ_2 — независимые, гауссовы, с единичной дисперсией, нулевым средним и корреляционной функцией

$$\langle\zeta_1(\widehat{\mathbf{x}},\tau_i)\zeta_1(\widehat{\mathbf{y}},\tau_j)\rangle_c = \langle\zeta_2(\widehat{\mathbf{x}},\tau_i)\zeta_2(\widehat{\mathbf{y}},\tau_j)\rangle_c = \exp\left[-(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2/2^{2\tau_i}\delta_{ij}\right].$$

Коэффициент $\Phi_0^{\varphi\chi}$ в этом случае равен $r\sqrt{\Phi_0^{\chi\chi}\Phi_0^{\varphi\varphi}}$. Поля ζ_1, ζ_2 моделируются с помощью метода, изложенного в [22]. При расчётах r полагалось равным единице. Коэффициенты Φ_0 должны выбираться из экспериментальных данных. В нашем расчёте они равны 0.4, а $<\varphi>=<\chi>= 0.2$. На рис. 1 приведено поле проводимости для выбранных

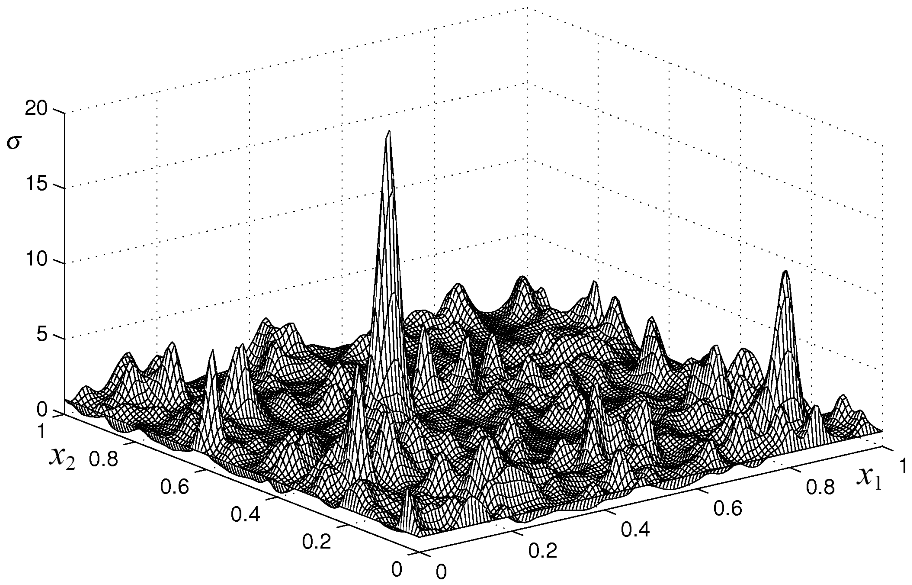

Рис. 1. Поле проводимости для двух масштабов $i = -5, -4$ вычисленное по формуле (20) в среднем сечении $x_3 = 1/2$

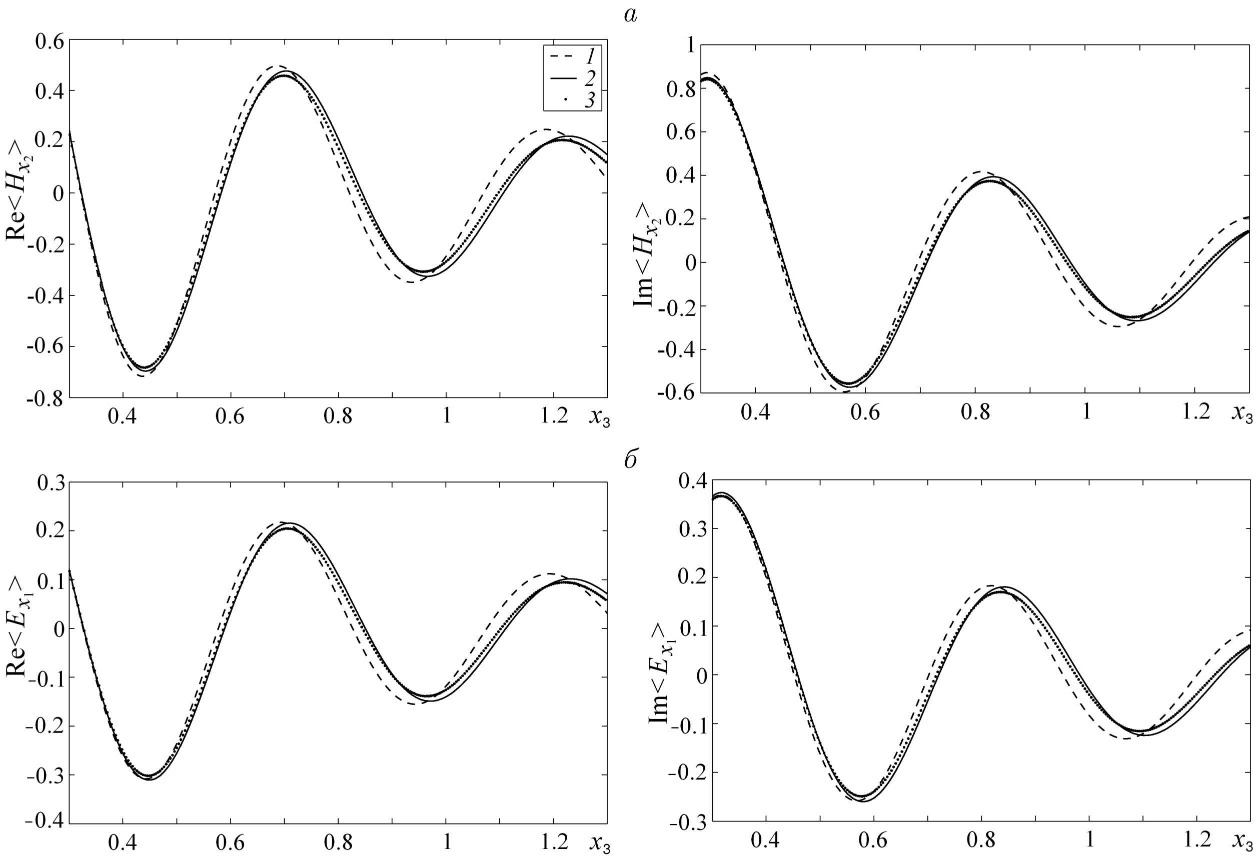

Рис. 2. Результаты расчёта компонент реальной и мнимой частей напряжённостей магнитного поля по оси x_2 (*а*) и электрического поля по оси x_1 (*б*): *1* — для усреднённых коэффициентов (при $\sigma = 1$, $\varepsilon = 1$); *2* — для эффективных коэффициентов; *3* — усреднённый по 48 реализациям результат, полученный с помощью прямого численного моделирования

масштабов в среднем сечении $x_3 = 0.5$. Для решения уравнений (19) использовались метод, основанный на конечно-разностной схеме Yee, и метод декомпозиции, предложенный в [23]. Последний позволяет разбить задачу на восемь подзадач, каждая из которых решалась независимо на параллельной машине. Затем собиралось общее решение. Задача решалась на сетке $412 \times 412 \times 412$ с постоянным шагом по всем переменным $1/256$. Результаты расчётов приведены на рис. 2. В соответствии с процедурой вывода подсеточных формул для проверки необходимо много раз решить полную задачу и выполнить вероятностное усреднение по мелкомасштабным вариациям (кривая *3*). В итоге получится решение, которое можно сопоставить с решением эффективных уравнений (18). Для сравнения приводится также решение уравнений со средними значениями коэффициентов проводимости и диэлектрической проводимости (кривая *1*). Усреднение по ансамблю Гиббса требует многократного решения полной задачи. В работе применяется более экономный вариант проверки. Решение при каждом значении x_3 усредняется по плоскостям (x_1, x_2), а затем проводится доусреднение по ансамблю. В расчётах использовались 48 реализаций.

Результаты численного моделирования показали, что длина волны для усреднённых полей увеличивается на 5 % по сравнению с длиной, полученной для средних коэффициентов (кривые *1*, *3*, см. рис. 2). Эффективные коэффициенты (кривая *2*) дают ошибку по длине волны только 0.5 %. Ошибка по амплитуде для эффективного решения меньше в два раза по сравнению с ошибкой, которую дают усреднённые коэффициенты.

Заключение

В работе рассчитаны эффективные коэффициенты для уравнений Максвелла в случае, если коэффициенты в этих уравнениях описываются крайне нерегулярными множествами, близкими к мультифракталам. Мультифракталы получаются при устремлении минимального масштаба l_0 к нулю. Поскольку минимальный масштаб остается конечным, то какие-либо сингулярности отсутствуют. Канторовы множества при этом не возникают, и весь анализ не выходит за пределы аппарата дифференциальных уравнений и теории случайных процессов. В масштабноинвариантной среде эффективные коэффициенты степенным образом зависят от масштаба сглаживания. Показано, что рассчитанные эффективные коэффициенты дают хорошее согласие с усреднённым решением, полученным прямым численным моделированием.

Список литературы

[1] Mikhailenko B.G., Soboleva O.N. Mathematical modeling of seismomagnetic effects arising in the seismic wave motion in Earthes's constant magnetic field // Appl. Math. Lett. 1997. Vol. 10, No. 3. P. 47–55.

[2] Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г. Численное решение уравнений Максвелла в анизотропных средах на основе спектрального преобразования Лагерра // Геология и геофизика. 2008. № 8. С. 819–829.

[3] Эпов М.И., Шурина Э.П., Нечаев О.В. Прямое трёхмерное моделирование векторного поля для задач электромагнитного каротажа // Там же. 2007. № 9. С. 989–995.

[4] Yukalov V.I., Gluzman S. Self-semilar bootstrap of divergent series // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 55. P. 6552–6570.

[5] Yukalov V.I. Self-semilar approximations for strongly interacting systems // Phys. A. 1990. Vol. 167. P. 833–860.

[6] Gluzman S., Sornette D. Self-similar approximants of the permeability in heterogeneous porous media from moment equation expansions // Transport in Porous Media. 2008. Vol. 71. P. 75–97.

[7] Germano M., Moin P. Piomelly U., Cabot W.H. A dynamic subgrid scale eddy viscosity model // Phys. Fluids. A. 1991. Vol. 3, No. 7. P. 1760–1765.

[8] Germano M., Sagat P. Large Eddy Simmulation for Incompressible Flow. Berlin, Heidelberg: Springer, 1998.

[9] Sahimi M. Flow phenomena in rocks: From continuum models, to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing // Rev. of Modern Phys. 1993. Vol. 65. P. 1393–1534.

[10] Dagan G. Higher-order correction of effective permeability of heterogeneous isotropic formations of lognormal conductivity distribution // Transport in Porous Media. 1993. Vol. 12. P. 279–290.

[11] Biswal B, Manwart C., Hilfer R. Three-dimensional local porosity analysis of porous media // Phys. A. 1998. Vol. 255. P. 221–241.

[12] Бобров Н.Ю., Любчич В.А., Крылов С.С. Масштабная зависимость кажущегося сопротивления и фрактальная структура железистых кварцитов // Изв. РАН. Физика Земли. 2002. № 12. С. 14–21.

[13] Bekele A., Hudnall H.W., Daigle J.J. et al. Scale dependent variability of soil electrical conductivity by indirect measures of soil properties // J. of Terramech. 2005. Vol. 42. P. 339–351.

[14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

[15] Кузьмин Г.А., Соболева О.Н. Подсеточное моделирование фильтрации в пористых автомодельных средах // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 4. С. 115–126.

[16] Kolmogorov A.N. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. P. 82–85.

[17] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. М.: Наука, 1975.

[18] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Л.: Гостехиздат, 1954.

[19] Глинер Э.Б., Кошляков Н.С., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения матаматической физики. М.: Физматгиз, 1962.

[20] Кравцов Ю.А., Рытов С.М., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1978.

[21] Chew W., Jin J., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech House, 2001.

[22] Ogorodnikov V.A., Prigarin S.M. Numerical Modeling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. Utrecht, Netherlands, 1996.

[23] Davydycheva S., Drushkin V., Habashy T. An efficient finite-difference scheme for electromalnetic logging in 3D anisotropic inhomogeneous media // Geophysics. 2003. Vol. 68. P. 1525–1536.

Поступила в редакцию 21 августа 2012 г.