

Глобальная оптимизация на основе гибридного метода усреднения координат и метода роя частиц

В. Д. КОШУР

*Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*
e-mail: VKoshur@sfu-kras.ru

Представлен гибридный алгоритм глобальной оптимизации, в котором взаимно дополняющими компонентами являются метод усреднения координат и метод роя частиц. Для ряда тестовых функций показаны его преимущества и особенности работы.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, метод усреднения координат, метод роя частиц.

Введение

Поиск решений нелинейных оптимизационных задач и особенно задач глобальной оптимизации (ГО) является одной из широко востребованных проблем вычислительной математики. В прикладных задачах целевая функция (ЦФ), как правило, имеет большое число переменных, не задана в аналитической форме и вычисляется как некоторая интегральная характеристика сложного динамического процесса (ЦФ-СДП), например, функция аэродинамического сопротивления проектируемого летательного аппарата.

Разработка эффективных методов, в определённой степени адаптивных к характеру изменчивости ЦФ, особенно актуальна в связи с развитием вычислительной техники и возможности использования параллельных вычислительных систем. Общие базовые положения по данной тематике приведены в работах [1 – 6], где рассмотрены оригинальные подходы и обзоры различных численных методов и их модификаций для решения задач оптимизации и ГО, а также в [7, 10], в которых представлены методы на основе неравномерных покрытий, реализованные как параллельные вычислительные алгоритмы ГО. Кроме того, необходимо отметить относительно новое направление исследований и построения алгоритмов ГО на основе методов интервального анализа, подробно изложенное в монографии [11].

В настоящей работе основное внимание уделено ряду методов “нулевого порядка”, согласно которым путём вычислительного алгоритма определяются значения ЦФ только в пробных точках, с ориентацией в дальнейшем на решение задач с ЦФ-СДП при минимальных требованиях к непрерывности и ограниченности ЦФ. Для приближённых оценок изменчивости ЦФ используются значения максимумов величин, полученных как отношения разности значений ЦФ к расстоянию для всех пар пробных точек (нижняя оценка константы Липшица).

Наиболее востребованными в практических приложениях, по мнению автора, являются следующие детерминированные, стохастические и эвристические методы:

- методы на основе различных вариантов генетического алгоритма (ГА), эволюционных вычислений и их модификаций [12–18];
- методы на основе роя частиц — Particle Swarm Optimization (PSO) с введением адаптационных модификаций [19–22];
- методы случайного поиска и моделирования отжига [23–26];
- метод усреднения координат [5] и методы на основе инверсных регрессий [27–31];
- методы, основанные на оценках константы Липшица, неравномерных покрытий [6–10] и диагональные методы [32–36].

Перечисленные методы имеют как сильные, так и слабые стороны. В настоящей работе предлагается гибридный метод ГО на основе сочетания метода усреднения координат и PSO. Это позволяет в методе усреднения координат перейти от случайного выбора пробных точек к использованию текущих координат роя частиц, коллективное движение которых происходит адаптивно, подстраиваясь под характер изменения ЦФ, а при движении роя частиц учитывать их смещения в направлении найденного усреднённого центра на основе метода усреднения координат. Таким образом, осуществляется взаимодействие двух методов. Дополнительным приёмом, ускоряющим процесс сходимости гибридного алгоритма, является включение в процесс вычислений нескольких шагов процедуры Хука — Дживса, уточняющих текущие координаты лучшей и/или худшей частицы в рое.

Следует отметить, что предлагаемый гибридный метод, как и одна из его составляющих, PSO, не дает 100%-й гарантии нахождения глобального минимума ЦФ. Его результаты носят вероятностный характер. Данный метод пока не претендует на “промышленное” использование. Для этого необходимо проведение большого объема вычислений, сравнительного анализа, статистической обработки результатов с использованием стандартизованных каталогов тестовых функций. Ниже описываются один из вариантов реализации гибридного метода и результаты проведённых вычислительных экспериментов для трёх специально выбранных тестовых функций. Эти численные результаты носят главным образом иллюстративный характер и позволяют в определённой степени оценить работоспособность метода.

1. Гибридный метод

Рассматривается ограниченная непрерывная функция $f(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Множество Ω является областью допустимых значений переменных и в простейшем случае представляет n -мерный параллелепипед с заданными сторонами $\left[x_i^{[0]} - d_i, x_i^{[0]} + d_i \right]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Необходимо найти приближённое значение глобального минимума f^* и хотя бы одну точку \mathbf{x}^* , в которой это значение достигается с заданной допустимой погрешностью ε_f для значений целевой функции:

$$f_{\min} = \min f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad f^* - \varepsilon_f \leq f_{\min} \leq f^*, \quad f^* = f(\mathbf{x}^*). \quad (1)$$

Вычислительная процедура нахождения приближённого значения координат точки \mathbf{x}^* в методе усреднения координат строится на основе итерационного процесса, который в непрерывной форме имеет вид [5]

$$x_i^{[k+1]} = \int_{\Omega^{[k]}} x_i p_s^{[k]}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

$$p_s^{[k]}(\mathbf{x}) = P_s^{[k]}(f(\mathbf{x})) / \int_{\Omega^{[k]}} P_s^{[k]}(f(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (3)$$

здесь k — номер шага вычислительного процесса, $\Omega^{[k]}$ — область усреднения координат на шаге k . При этом вводится последовательность непрерывных функций $P_s(y)$, $s = 1, 2, 3, \dots$, таких, что $\forall y \in \mathbb{R}$ значения $P_s(y) \geq 0$, и для последовательности вида $P_s(y)/P_s(z)$ выполняется условие монотонного неограниченного возрастания при увеличении параметра селективности s и любых фиксированных значениях y, z с условием $y < z$. Примерами функций $P_s(y)$, в частности, являются функции $\exp(-sy)$, s^{-y} , y^{-s} , а также класс функций вида $(1 - y^r)^s$ при $y \in [0, 1]$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Для приведённых ниже примеров численной минимизации использована функция $(1 - y^2)^s$.

По мере роста s крутизна ядер $p_s^{[k]}(\mathbf{x})$ увеличивается, что в свою очередь приводит к увеличению веса координат, которые соответствуют лучшим значениям ЦФ, и в предельном случае последовательность усреднённых координат сходится к глобальному минимуму (соответствующая теорема сходимости доказана в работе [5]).

Для численной реализации метода усреднения координат одним из эффективных способов повышения точности вычисления интегралов (2) является последовательное увеличение количества пробных точек $\mathbf{x}^{(j)[k]}$, $j = 1, 2, \dots, M^{[k]}$, на k -м шаге итерационного процесса, т. е. $M^{[k]} \geq M^{[k-1]}$. Чтобы случайно не исключить точку глобального минимума, область усреднения $\Omega^{[k]}$ в данном случае может рассматриваться как адаптивно изменяющейся [5], так и неизменной.

В предлагаемой модификации алгоритма итерационного вычисления усреднённых координат введено адаптивное смещение пробных точек, реализуемое как движение роя частиц в методе PSO с модификацией FDR (fitness-distance ratio based PSO) [22]. При этом вводится дополнительное смещение частиц роя к найденному центру усреднённых координат, что вносит в алгоритм PSO новый фактор обмена информацией между частицами и дополнительную стабилизацию процесса коллективного поиска роем частиц глобального минимума ЦФ.

При вычислении интегралов в формулах (2), (3) используется суммирование значений подынтегральных выражений на множестве пробных точек с учётом объёмов подобластей дискретизации области интегрирования $\Omega^{[k]}$. В предлагаемом гибридном алгоритме координаты пробных точек отождествляются с координатами роя частиц, которые изменяются в процессе коллективного поиска глобального минимума и в начале вычислительного процесса задаются в узлах некоторой расчётной сетки или генерируются датчиком случайных чисел с равномерным распределением на интервалах $[x_i^{[0]} - d_i, x_i^{[0]} + d_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. В дискретной форме соотношения (2), (3) принимают вид

$$x_i^{[k+1]} = \sum_{j=1}^{M^{[k]}} x_i^{(j)[k]} p_s^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}) V^{(j)[k]}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$p_s^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}) = \frac{P_s^{[k]}(g^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}))}{\sum_{j=1}^{M^{[k]}} P_s^{[k]}(g^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]})) V^{(j)[k]}}, \quad (5)$$

где $V^{(j)[k]}$ соответствует n -мерному объёму при разбиении области $\Omega^{[k]}$ на подобласти, связанные с семейством точек интегрирования $\mathbf{x}^{(j)[k]}$, $j = 1, 2, \dots, M^{[k]}$. Здесь $g^{[k]}(\mathbf{x})$ — вспомогательные функции, масштабирующие значения целевой функции $f(\mathbf{x}^{(j)[k]})$ к диапазону $[0, 1]$, которые определяются как

$$g^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}) = \frac{f(\mathbf{x}^{(j)[k]}) - f_{\min}^{[k]}}{f_{\max}^{[k]} - f_{\min}^{[k]}}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\min}^{[k]} &= \min \left(f(\mathbf{x}^{(1)[k]}), f(\mathbf{x}^{(2)[k]}), \dots, f(\mathbf{x}^{(M^{[k]})[k]}) \right), \\ f_{\max}^{[k]} &= \max \left(f(\mathbf{x}^{(1)[k]}), f(\mathbf{x}^{(2)[k]}), \dots, f(\mathbf{x}^{(M^{[k]})[k]}) \right). \end{aligned}$$

Предполагая, что для пробных точек — текущих координат роя частиц — в формулах (4), (5) при реализации приближённого интегрирования можно выбрать подобласти так, чтобы величины их объёмов $V^{(j)[k]}$, $j = 1, 2, \dots, M^{[k]}$, были приблизительно равными, расчётные формулы упрощаются к виду

$$x_i^{[k+1]} = \sum_{j=1}^{M^{[k]}} x_i^{(j)[k]} p_s^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

$$p_s^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}) = \frac{P_s^{[k]}(g^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}))}{\sum_{j=1}^{M^{[k]}} P_s^{[k]}(g^{[k]}(\mathbf{x}^{(j)[k]}))}. \quad (8)$$

Следует отметить, что для вычислительного алгоритма усреднения координат [5] конкретный вид подобластей дискретизации области интегрирования $\Omega^{[k]}$ является не существенным, поэтому использование более простых при численной реализации соотношений (7), (8) вместо (4), (5) вполне оправданно.

Адаптивное изменение координат роя частиц при переходе на $(k + 1)$ -й шаг проводится по схеме PSO [19–22], и дополнительно вводится составляющая движения к усреднённому центру координат $\mathbf{x}^{[k]}$ для каждой j -й частицы роя в следующей форме:

$$\mathbf{x}^{(j)[k+1]} = \mathbf{x}^{(j)[k]} + \alpha \mathbf{Y}^{(j)[k]} + \mathbf{D}^{(j)[k]} + \mathbf{U}[0, \beta_0] \otimes (\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{(j)[k]}). \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{Y}^{(j)[k]}$ — инерционная составляющая движения j -й частицы, $\mathbf{D}^{(j)[k]}$ — вектор адаптивного смещения j -й частицы, определяемый тремя слагаемыми случайного смещения этой частицы [22]:

$$\mathbf{D}^{(j)[k]} = \mathbf{d}_1^{(j)[k]} + \mathbf{d}_2^{(j)[k]} + \mathbf{d}_3^{(j)[k]}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1^{(j)[k]} &= \mathbf{U}[0, \beta_1] \otimes (\mathbf{x}_b^{(j)[k]} - \mathbf{x}^{(j)[k]}), \\ \mathbf{d}_2^{(j)[k]} &= \mathbf{U}[0, \beta_2] \otimes (\mathbf{x}_g^{[k]} - \mathbf{x}^{(j)[k]}), \\ \mathbf{d}_3^{(j)[k]} &= \mathbf{U}[0, \beta_3] \otimes (\mathbf{x}^{(q(j))^{[k]}} - \mathbf{x}^{(j)[k]}). \end{aligned} \quad (11)$$

В этих формулах использованы обозначения: $\mathbf{x}_b^{(j)[k]}$ — лучшие координаты j -й частицы за k итераций, определяемые по значению ЦФ ($\mathbf{d}_1^{(j)[k]}$ — когнитивная составляющая смещения частицы); $\mathbf{x}_g^{[k]}$ — координаты лучшей частицы в рою с минимальным значением ЦФ за k итераций ($\mathbf{d}_2^{(j)[k]}$ — социальная составляющая смещения частицы); $\mathbf{x}^{(q(j))[k]}$ — координаты частицы с номером $q(j)$, в направлении которой скорость убывания целевой функции наибольшая ($\mathbf{d}_3^{(j)[k]}$ — составляющая изменчивости ЦФ по локальной оценке константы Липшица); $\mathbf{U}[0, \beta]$ — вектор с компонентами равномерно распределённых случайных чисел в интервале $[0, \beta]$; символом \otimes обозначено покомпонентное умножение векторов; коэффициенты $\alpha, \beta_m, m = 0, 1, 2, 3$, являются настраиваемыми параметрами гибридного вычислительного алгоритма.

Таким образом, соотношения (4)–(11) после конкретизации вида ядер $P_s^{[k]}(y)$ с возрастающим параметром селективности s и задания конкретных значений коэффициентов $\alpha, \beta_m, m = 0, 1, 2, 3$, полностью определяют гибридный вычислительный алгоритм ГО на основе методов усреднения координат и роя частиц. Выбор коэффициентов численного алгоритма ГО может быть осуществлен путём мета-оптимизации [37] и выходит за рамки статьи.

2. Результаты вычислительных экспериментов

Для наглядного представления работы предлагаемого гибридного алгоритма ниже в графической форме приведены результаты вычислительного процесса поиска глобального минимума для трёх тестовых функций.

На рис. 1 показаны результаты процесса минимизации функции двух переменных вида

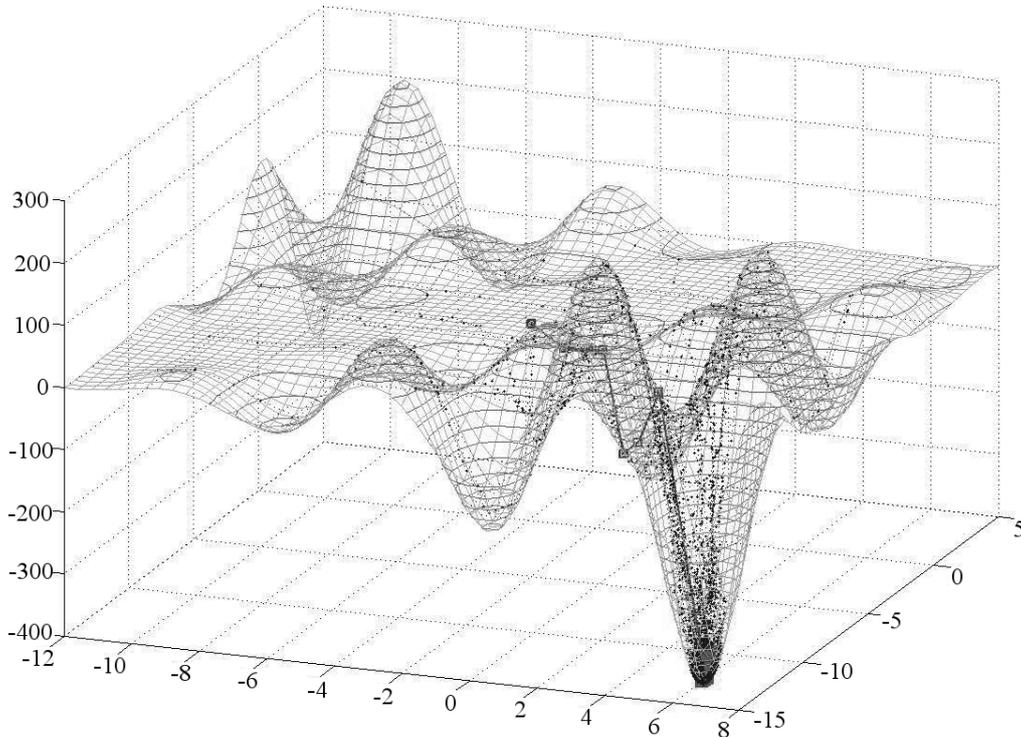


Рис. 1. Результаты процесса минимизации целевой функции (12) гибридным алгоритмом

$$f(x, y) = (x - y)^2 \cos(x) \cos\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) + 2 \quad (12)$$

в прямоугольной области $[-12, 8] \times [-15, 5]$ после 100 итераций (здесь точки и пунктирные линии — соответственно промежуточные положения и траектории 25 частиц в рое). Стартовые координаты частиц задавались в узлах регулярной сетки 5×5 расчётной области, значения коэффициентов $\alpha = 0$, $\beta_0 = 0.1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 0.2$; при этом достигнутое значение параметра селективности $s = 212$. Сплошной ломаной линией с маркерами показаны положения точек на поверхности функции для последовательно уточняемых значений усреднённых координат $\mathbf{x}^{[k]}$. Проведено 100 запусков программы, приемлемая точность (порядка 10^{-2}) по значениям координат лучшей частицы достигалась за 10–15 итераций, в дальнейшем происходила последовательная концентрация частиц в окрестности глобального минимума. Следует отметить, что метод является статистическим и для получения “надежного результата по вероятности” необходимо проведение многократных запусков программы с измененными значениями случайных векторов $\mathbf{U}[0, \beta]$.

На рис. 2 представлены карта изолиний целевой функции (12) и результаты поиска глобального минимума при аддитивной случайной помехе с равномерным распределением, составляющей 20% амплитуды изменения значений ЦФ (здесь пунктирные линии — траектории частиц, сплошная линия — изменение усреднённых координат). В расчёте использовано 36 частиц со стартовыми значениями в узлах регулярной сетки 6×6 расчётной области.

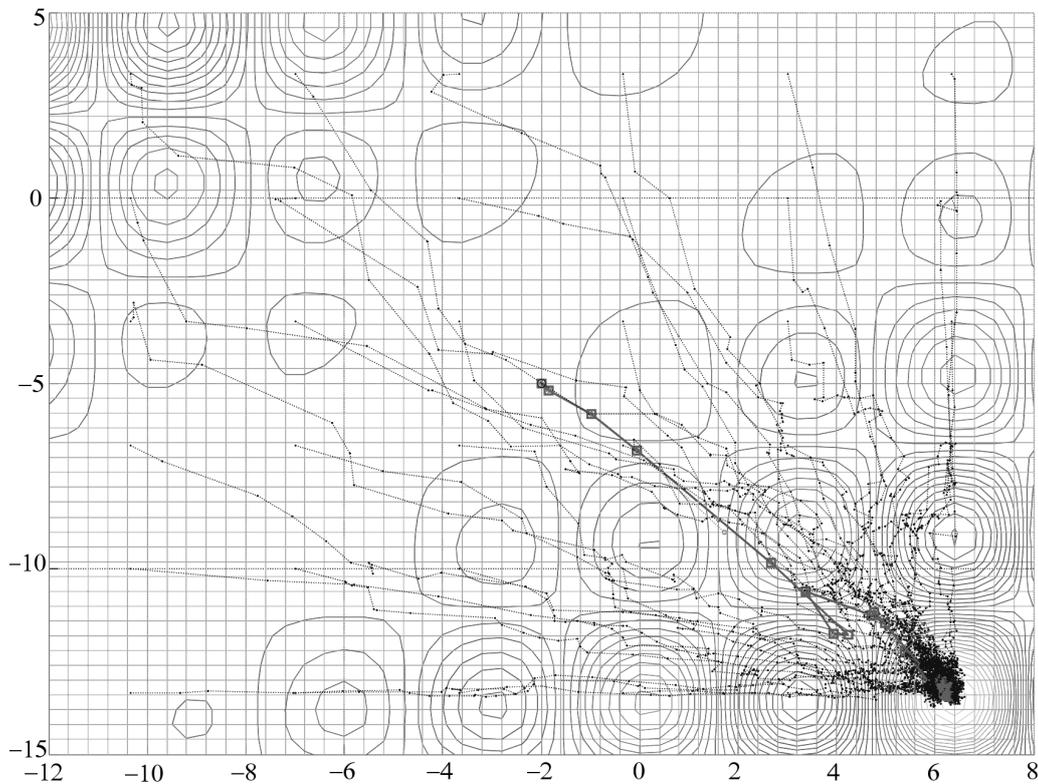


Рис. 2. Карта изолиний целевой функции (12) и результаты поиска глобального минимума при аддитивной случайной помехе

На рис. 3 приведён вариант вычислительного процесса минимизации классической тестовой функции Розенброка

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2. \quad (13)$$

Для данного расчёта было использовано 36 частиц в узлах сетки 6×6 , параметры гибридного вычислительного алгоритма не изменялись. Следует отметить, что движение роя частиц в этом случае напоминает физический процесс постепенного скатывания капель воды в пологом желобе.

Переход к большим размерностям варьируемых переменных приводит к необходимости экспоненциального роста количества пробных точек или частиц в рое. Возможность проведения параллельных вычислений указывает на целесообразность использования в алгоритме нескольких семейств роев частиц. На рис. 4 показаны результаты итерационного процесса вычисления глобального минимума после 10 итераций для размерности $n = 50$ негладкой четырехэкстремальной функции вида

$$f(\mathbf{x}) = -5 \exp(-3S_1) - 10 \exp(-2S_2) - 7 \exp(-2.5S_3) - 3 \exp(-S_4), \quad (14)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + 1|^{0.6}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad S_3 = \sum_{i=1}^n |x_i - 1|^{0.8}, \quad S_4 = \sum_{i=1}^n |x_i - 2|^{0.9}.$$

При этом были использованы 50 роев по 100 частиц в каждом, усреднение координат проводилось по всем частицам, значения координат лучшей частицы в каждом рое

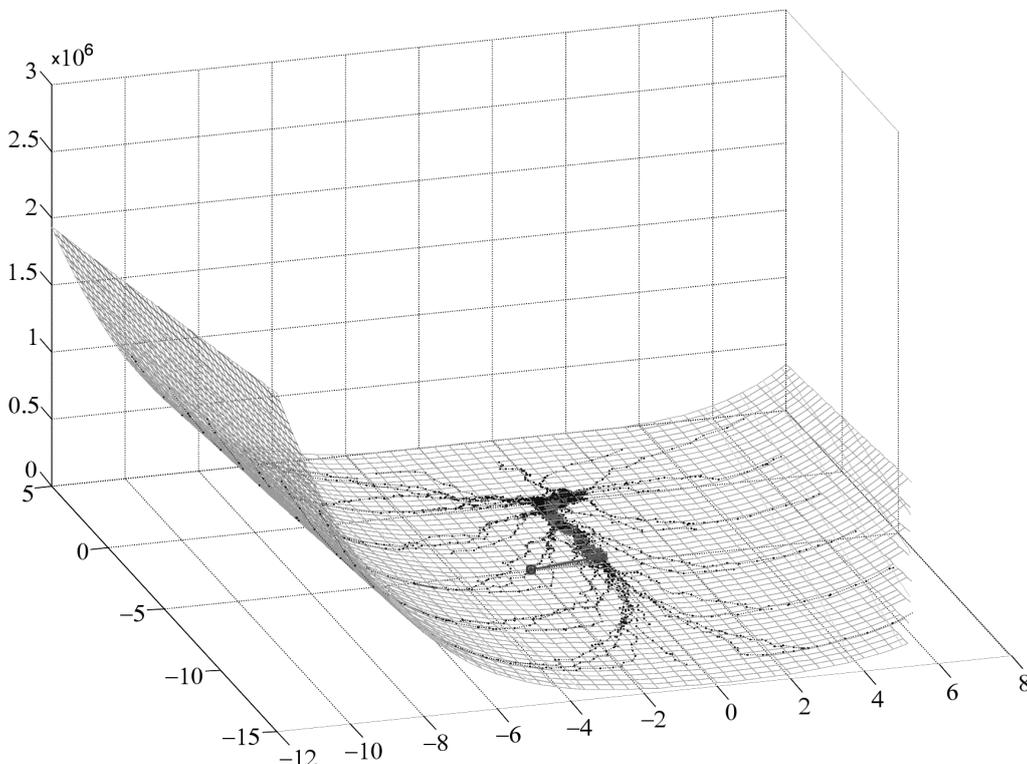


Рис. 3. Процесс минимизации функции Розенброка

уточнялись процедурой Хука — Дживса с начальным шагом $h_0 = 1.1$ и числом внутренних итераций, равным пяти, параметры гибридного алгоритма приняты следующими: $\alpha = 0.4$, $\beta_0 = 1.0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1.0$, $\beta_3 = 2.0$.

Для данного варианта расчёта на рис. 5 представлены распределение значений целевой функции по частицам одного роя и значения координат лучшей частицы (с номером 37), которая достигла глобального минимума в точке $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

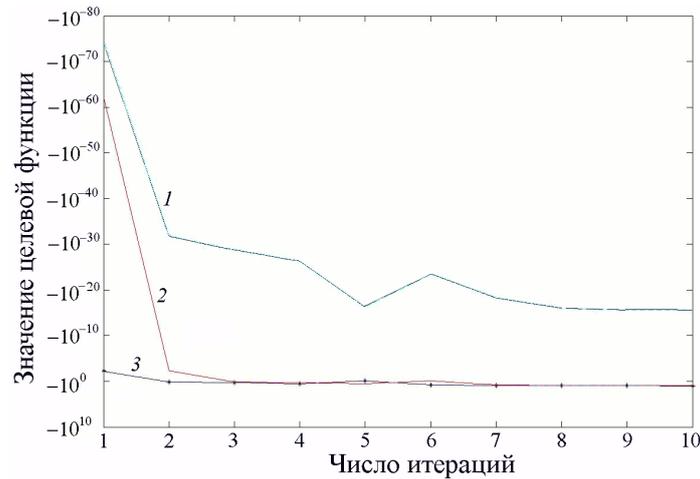


Рис. 4. Минимизация функции (14) при $n = 50$: 1 — изменение максимальных значений ЦФ в списке частиц, 2 — изменение значений ЦФ в улучшаемых усреднённых координатах, 3 — изменение минимальных значений ЦФ в списке частиц

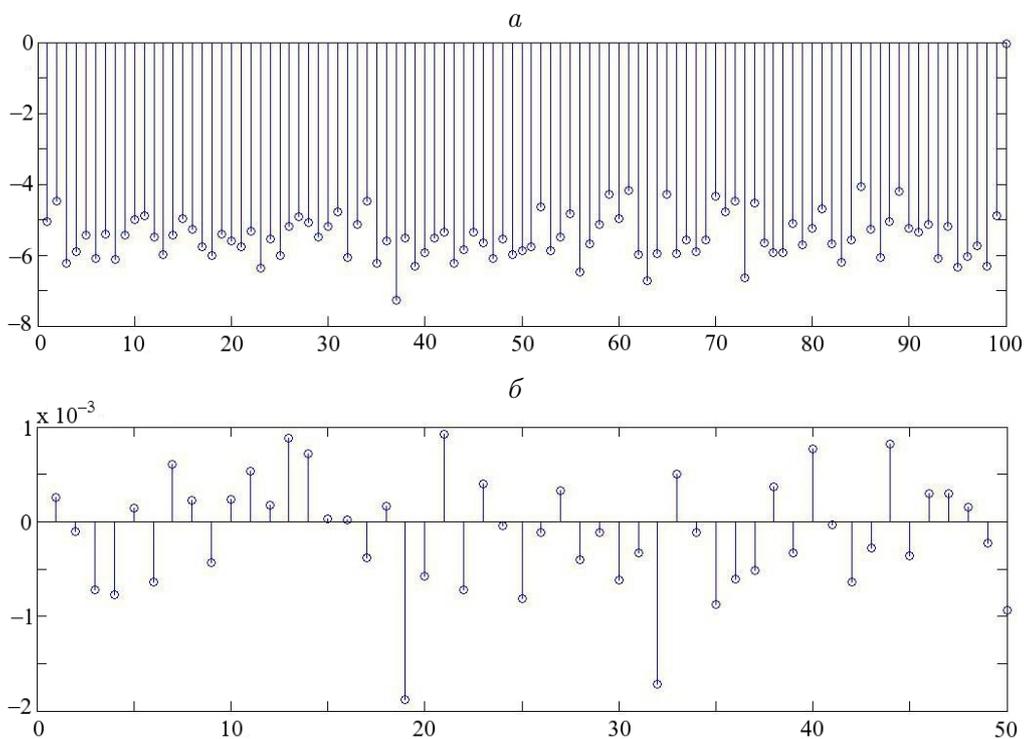


Рис. 5. Распределение значений целевой функции по частицам одного роя (а) и значения 50 координат лучшей частицы, которая достигла глобального минимума функции (14) (б)

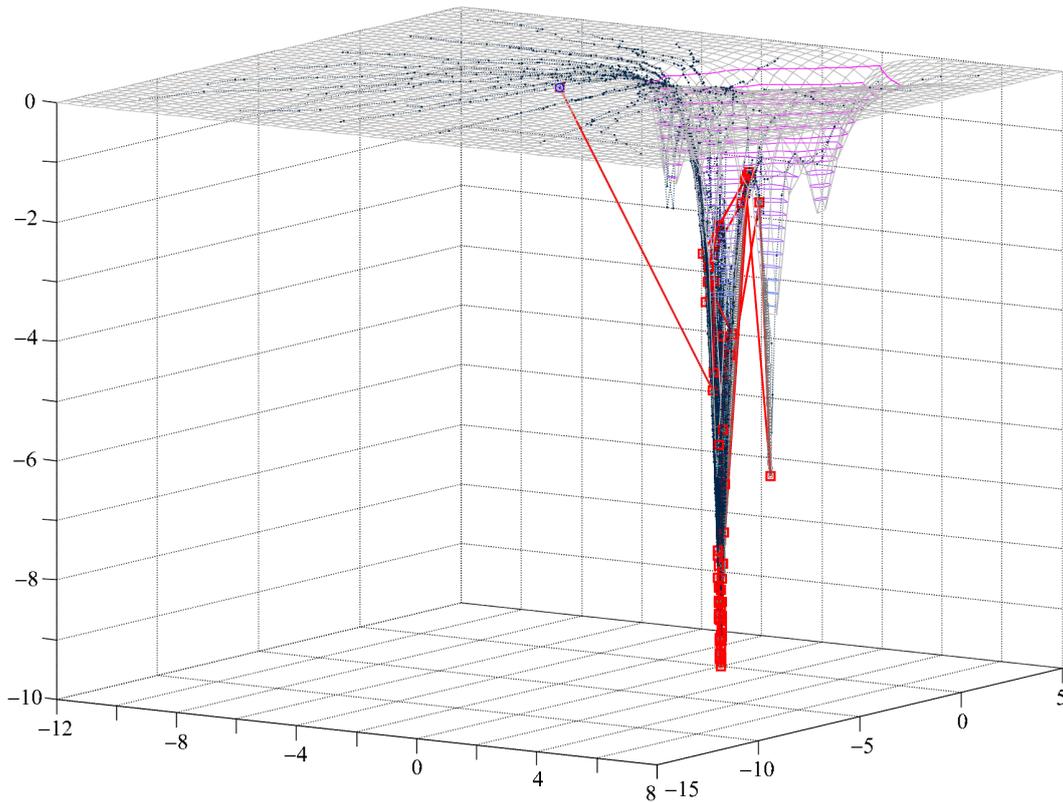


Рис. 6. Движение 36 частиц одного роя и изменение усреднённых координат в вычислительном процессе минимизации функции (14) для двух переменных

Проведённые вычислительные эксперименты по минимизации функции (14) при $n = 100$ показали, что если общее количество частиц не увеличивать, то гибридный алгоритм приводит к одному из локальных минимумов, чаще всего попадая в точку, где все координаты равны 2. Это объясняется тем, что данный локальный минимум имеет наиболее широкую область притяжения (последнее слагаемое в формуле (14)), в силу чего с большей вероятностью хотя бы одна из частиц попадает в указанную область и оказывает максимальное влияние на дальнейшее поведение роя частиц.

Для наглядности вид поверхности ЦФ (14) и вычислительный процесс минимизации для двух переменных показан на рис. 6. В этом вычислительном эксперименте было использовано 36 частиц одного роя с начальным положением частиц в узлах регулярной сетки 6×6 .

Следует отметить, что использование нескольких семейств роев частиц позволяет в ряде случаев находить одновременно как глобальный минимум, так и локальные минимумы целевой функции, что может представлять интерес при решении прикладных задач.

Заключение

Представлены гибридный метод глобальной оптимизации на основе сочетания методов роя частиц и усреднения координат и его модификации с использованием нескольких роев частиц и включением процедуры Хука — Дживса. Для целевых функций с большим количеством переменных и высоким значением константы Липшица, как правило,

требуется эффективный выбор параметров алгоритма [37]. Предполагается дальнейшая разработка гибридного метода с нейросетевой подстройкой изменения параметров алгоритма, т. е. адаптивное управление этими параметрами, в частности, когда каждый из роев частиц осуществляет поиск самостоятельно и в то же время периодически обменивается информацией об успешном поиске с другими роями частиц по аналогии с компьютерной технологией мультиагентных систем [38]. Это направление исследований может стать определённой альтернативой экспоненциальному увеличению количества пробных точек при решении оптимизационных задач большой размерности.

Список литературы

- [1] РАСТРИГИН Л.А. Статистические методы поиска. М.: Наука, 1968.
- [2] СУХАРЕВ А.Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания. М.: Изд. МГУ, 1981.
- [3] ЖИГЛЯВСКИЙ А.А., ЖИЛИНСКАС А.Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
- [4] HORST R., PARDALOS P.M., ET AL. Handbook of Global Optimization. Dordrecht: Kluwer, 1995.
- [5] РУБАН А.И. Глобальная оптимизация методом усреднения координат. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 302 с.
- [6] ЕВТУШЕНКО Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
- [7] ЕВТУШЕНКО Ю.Г., МАЛКОВА В.У., СТАНЕВИЧЮС А.А. Параллельный поиск глобального экстремума функций многих переменных // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2009. Т. 49, № 2. С. 255–269.
- [8] ЕВТУШЕНКО Ю.Г., ЖАДАН В.Г. Об одном подходе реализации численных методов нелинейного программирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 1. С. 47–59.
- [9] ЕВТУШЕНКО Ю.Г., ПОСЫПКИН М.А. Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2011. Т. 51, № 8. С. 1376–1389.
- [10] ЕВТУШЕНКО Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // Там же. 1971. Т. 11, № 6. С. 1390–1403.
- [11] ХАНСЕН Э., УОЛСТЕР ДЖ.У. Глобальная оптимизация с помощью методов интервального анализа. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2012. 516 с.
- [12] HOLLAND J.H. Adaptation in Natural and Artificial System. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1975.
- [13] GOLDBERG D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Addison-Wesley, 1989.
- [14] КУРЕЙЧИК В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 1. С. 144–160.
- [15] MICHALEWICZ Z. Genetic Algorithm + Data Structures = Evolution Programs. 3rd Edn. New York: Springer-Verlag, 1996.

- [16] STOM R., PRICE K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *J. of Global Optimizat.* 1997. Vol. 11. P. 341–359.
- [17] КОШУР В.Д., ИЛЬИН В.А. Нейронная сеть Хопфилда как кроссовер генетического алгоритма // V Всероссийская научно-техн. конф. “Нейроинформатика-2003”. Сб. науч. тр. Ч. 1. М.: МИФИ, 2003. С. 92–100.
- [18] РУТКОВСКАЯ Д., ПИЛИНСКИЙ М., РУТКОВСКИЙ Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия — Телеком, 2004.
- [19] KENNEDY J., EVERHARD R. Particle swarm optimization // *Proc. of IEEE Intern. Conf. on Neural Networks.* 1995. Vol.4. P. 1942–1948.
- [20] MENDES R., KENNEDY J., NEVES J. The fully informed particle swarm: Simpler, maybe better // *IEEE Trans. on Evolutionary Comput.* 2004. Vol. 8. P. 204–210.
- [21] KENNEDY J., MENDES R. Neighborhood topologies in fully informed and best-of-neighborhood particle swarms // *Systems, Man, and Cybernetics.* 2006. Vol. 36. P. 515–519.
- [22] КАРПЕНКО А.П., СЕЛИВЕРСТОВ Е.Ю. Обзор методов роя частиц (particle swarm optimization) // Электронное научно-техн. издание “Наука и образование”. 2009. № 3. <http://technomag.edu.ru/doc/116072.html>.
- [23] AARTS E.N.L., LAARHOVEN P.J.M. Simulated Annealing: Theory and Applications. London: Kluwer, 1987.
- [24] ALI M., STOREY C. Aspiration based simulated annealing algorithm // *J. of Global Optimizat.* 1996. No. 11. P. 181–191.
- [25] НАММА В., ВИТТАНЕН С., ТОРН А. Parallel continuous simulated annealing for global optimization // *Optimization Methods and Software.* 2000. Vol. 13, No. 2. P. 93–116.
- [26] ОРЛЯНСКАЯ И.В. Современные подходы к построению методов глобальной оптимизации // Электронный журнал “Исследовано в России”. 2002. С. 2097–2108. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/189.pdf>.
- [27] КОШУР В.Д. Адаптивный алгоритм глобальной оптимизации на основе взвешенного усреднения координат и нечётко-нейронных сетей // *Нейроинформатика. Электронный рецензируемый журнал.* 2006. Т. 1, № 2. С. 106–124. <http://www.niisi.ru/iont/ni/Journal/N2/Koshur.pdf>.
- [28] КОШУР В.Д., ПУШКАРЁВ К.В. Глобальная оптимизация на основе инверсных соотношений и обобщённо регрессионных нейронных сетей // X Всероссийская научно-техн. конф. “Нейроинформатика-2008”. Сб. науч. тр. Ч. 2. М.: МИФИ, 2008. С. 182–192.
- [29] KOSHUR V., KUZMIN D., LEGALOV A., PUSHKARYOV K. Solution of large-scale problems of global optimization on the basis of parallel algorithms and cluster implementation of computing processes // *Parallel Comput. Technolog. 10th Intern. Conf., PaCT 2009.* Springer, 2009. P. 121–125.
- [30] КОШУР В.Д., ПУШКАРЁВ К.В. Дуальные обобщённо-регрессионные нейронные сети для решения задач глобальной оптимизации // XII Всероссийская научно-техн. конф. “Нейроинформатика-2010”. Сб. науч. тр. Ч. 2. М.: НИЯУ МИФИ, 2010. С. 219–227.
- [31] КОШУР В.Д., ПУШКАРЁВ К.В. Глобальная оптимизация на основе нейросетевой аппроксимации инверсных зависимостей // XIII Всероссийская научно-техн. конф. “Нейроинформатика-2011”. Сб. науч. тр. Ч. 1. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. С. 89–98.
- [32] СТРОНГИН Р.Г. Поиск глобального минимума. М.: Знание, 1990.

- [33] НЕФЁДОВ В.Н. Некоторые вопросы решения липшицевых задач глобальной оптимизации с использованием метода ветвей и границ // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1992. Т. 32, № 4. С. 512–529.
- [34] HANSEN P., JAUMARD B. Lipschitz optimization // Handbook of Global Optimization / Eds. R. Horst, P.M. Pardalos. 1995. Vol. 1. P. 407–493.
- [35] SERGEYEV Y.D. On convergence of “Divide the Best” global optimization algorithms // Optimization. 1998. Vol. 44, No. 3. P. 303–325.
- [36] СЕРГЕЕВ Я.Д., КВАСОВ Д.Е. Диагональные методы глобальной оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [37] PEDERSEN M.E.H. Tuning & Simplifying Heuristical Optimization: Thesis for the degree of Doctor of Philosophy. Univ. of Southampton, School of Eng. Sci., Comput. Eng. and Design Group, 2010. 204 p.
- [38] SHOHAM Y., LEYTON-BROWN K. Multiagent Systems. Algorithmic, Game-Theoretic, and Logical Foundations. Cambridge Univ. Press, 2009.

*Поступила в редакцию 29 ноября 2011 г.,
с доработки — 10 июня 2013 г.*