

Двухэтапный метод идентификации динамических режимов одномерных рекуррентных уравнений: Использование спектрального анализа*

К. В. ШЛЮФМАН¹, Б. Е. ФИШМАН², Е. Я. ФРИСМАН¹

¹*Институт комплексного анализа региональных проблем ДВО РАН,
Владивосток, Россия*

²*Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема,
Биробиджан, Россия*

e-mail: shlufman@mail.ru, bef942@mail.ru, frisman@mail.ru

Описывается метод идентификации периодического, интервально-периодического и хаотического динамических режимов одномерного рекуррентного уравнения. В основу метода положены преобразование Фурье и статистические критерии Фишера (F -критерий) и Стьюдента (t -критерий). Показана работа метода на примере динамических режимов уравнения Рикера.

Ключевые слова: рекуррентное уравнение, уравнение Рикера, идентификация вида динамического режима, интервально-периодический режим, дискретное преобразование Фурье, спектральный анализ.

Введение

Многие биологические виды демонстрируют колебания численности, обусловленные сезонностью размножения, высокой удельной скоростью популяции и коротким жизненным циклом [1, 2]. Например, у большинства мышевидных грызунов наблюдаются ярко выраженные колебания численности с периодом 3–4 года [3]. Такой же период колебаний отмечается для некоторых лососевых видов рыб [4].

Следует отметить, что популяции со сложной возрастной структурой также могут демонстрировать колебания численности. В частности, для популяции рыси характерны колебания численности с 11-летним циклом [2]. Однако наблюдаемые флуктуации в таких популяциях по большей части вызваны влиянием внешних факторов и процессами межвидовых взаимодействий, в то время как колебания, наблюдаемые у видов с коротким жизненным циклом, часто обусловлены свойствами самой популяций, а именно, сезонностью процесса размножения и высоким репродуктивным потенциалом [1].

Для моделирования динамики численности однородных популяций с сезонностью процессов размножения широко используются детерминистические модели вида

$$x_{n+1} = F(a, x_n), \quad (1)$$

где x_n — численность n -го поколения, a — некоторый параметр зависимости F , характеризующий “ёмкость” экологической ниши и репродуктивный потенциал популяции [5].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке ДВО РАН (конкурсные проекты 12-I-П28-02, 12-II-СО-06-019) и РФФИ (региональный проект 11-01-98512-р_восток_a).

Наиболее ярким представителем такого вида моделей может служить модель Рикера, предложенная для описания связи и пополнения в популяции лососевых видов рыб.

При изучении одномерных рекуррентных уравнений вида (1) большое значение имеет задача идентификации вида динамического режима в пространстве параметров. Эта задача может возникнуть, например, при определении границ существования рассматриваемого режима. Известно [6–8], что динамические режимы уравнений (1) могут классифицироваться на стационарные, периодические и хаотические (т. е. режимы, неустойчивые по Ляпунову). Исследовать стационарные и периодические решения можно с помощью достаточно хорошо известных аналитических методов [6, 7, 9–11]. В тех случаях, когда использование аналитических методов затруднительно, для идентификации периодических решений используются численные методы [6–8]. Перечисленные методы позволяют идентифицировать периодические решения с периодом любой длины для уравнений вида (1) с любой непрерывной правой частью F .

Ранее авторами было показано [12], что из хаотических режимов можно выделить класс интервально-периодических режимов.

Упорядоченное множество $\{x_n\}$ будем называть интервально-периодической последовательностью, если:

1) можно указать не менее двух взаимно непересекающихся интервалов X_k , $k = \overline{1, l}$, $l \geq 2$ ($X_k \cap X_s = \emptyset$, $k \neq s$), содержащих все значения последовательности $\{x_n\}$;

2) можно пронумеровать интервалы X_k , $k = \overline{1, l}$, так, чтобы выполнялись соотношения $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ..., $x_l \in X_l$, $x_{l+1} \in X_1$, $x_{l+2} \in X_2$, ..., $x_{ml+k} \in X_k$, ...

Интервально-периодический режим представляет собой цикл конечной длины l с флуктуирующими элементами цикла, причём флуктуации происходят в ограниченных диапазонах значений X_k . Интервально-периодические режимы, будучи по характеру флуктуаций близкими к циклическим динамикам, не требуют включения в модель дополнительной случайной составляющей. При этом данные режимы в случаях не очень больших флуктуаций визуально оказываются по характеру колебаний близкими к наблюдаемым циклическим динамикам. Таким образом, без включения в модель дополнительной случайной составляющей могут быть получены режимы с нестрогим периодическим характером, что для интерпретации фактических данных имеет большое практическое значение [13–15]. Так, численности леммингов и полёвок демонстрируют чётко выраженные популяционные циклы [3]. В частности, согласно приведённым в [3] данным, абсолютная численность популяционных циклов *Lemmus sibiricus* в Колымской низменности имела трёхлетнюю периодичность с амплитудой колебаний порядка 30 крат, причём динамика численности была сходна с таковой интервально-периодических режимов моделей вида (1).

Решение задачи идентификации интервально-периодических режимов означает разработку метода, позволяющего однозначно выделять эти режимы. Искомый метод должен носить объективный характер и реализовываться, например, с помощью компьютерных программ. Такой метод может быть построен одним из двух способов: 1) на основе определённой характеристики множества значений x_n решения $\{x_n\}$, 2) на основе определённой характеристики образа конкретного преобразования решения $\{x_n\}$. Во втором случае важно, чтобы выбранное преобразование максимально сохраняло информацию о виде диагностируемого динамического режима уравнения (1).

В работе [12] была представлена реализация первого из указанных способов для определения интервально-периодического режима. При этом использовался метод кластерного анализа, выполняющий деление значений x_n решения $\{x_n\}$ уравнения (1) на

кластеры \hat{X}_k , $k = 1, \dots, K$ (K — количество кластеров). Предполагалось, что каждый полученный кластер значений \hat{X}_k можно использовать для оценки границ одного интервала X_k значений решения $\{x_n\}$, а K — количество полученных кластеров \hat{X}_k — соответствует L — количеству интервалов X_k значений x_n интервально-периодического решения $\{x_n\}$ уравнения (1). Особенностью предложенного метода является необходимость задания порогового значения, которое определяет решение, включать или не включать очередное значение x_n в конкретный кластер. Однако выбор порогового значения не является произвольным. Чем меньше задается величина этого значения, тем выше может быть обеспечена точность выделения кластеров, но тем больший фрагмент решения $\{x_n\}$ необходимо использовать для обеспечения надёжности выделения кластера. Верное определение количества и границ кластеров, интерпретируемых как интервалы существования значений решения $\{x_n\}$, возможно только при корректном выборе порогового значения и длины фрагмента решения.

К недостаткам реализации первого способа определения интервально-периодического режима с помощью методов кластерного анализа относится то, что данный способ не позволяет различить периодический и интервально-периодический режимы.

В настоящей работе исследуется вторая возможность построить объективный метод идентификации вида динамического режима уравнения (1). Для этого рассматриваются характеристики дискретного преобразования Фурье фрагмента решения $\{x_n\}$. Выбор данного преобразования связан с тем, что фурье-образ сохраняет полную информацию о периодических свойствах решения $\{x_n\}$, в силу чего по характеристикам этого образа можно судить о наличии периодического или интервально-периодического вида динамики. В качестве инструмента для идентификации указанных режимов в статье использована спектрограмма, получаемая при дискретном преобразовании Фурье конечного фрагмента решения уравнения (1).

1. Метод идентификации вида динамического режима

Рассмотрим возможности определения вида динамического режима уравнения (1) по одному фрагменту решения длиной N значений x_n . Количество N выбирается так, чтобы оно было наименьшим общим делителем всех искомым периодов периодических и интервально-периодических режимов. Заметим, что динамический режим, имеющий период, не удовлетворяющий этому условию, предложенным методом может идентифицироваться как хаос.

Метод идентификации состоит из двух последовательно выполняемых этапов проверки гипотез о виде динамического режима с использованием значений спектрограммы на фурье-частотах. На первом этапе проверяется справедливость гипотезы H_0 о том, что наблюдаемый динамический режим является периодическим. Для этого выполняется проверка равенства нулю значений спектрограммы на фурье-частотах и выделяются неравные нулю значения (равенство нулю проверяется с достижимой вычислительной точностью). Если обнаружится, что имеются значения спектрограммы, отличные от нуля, и они расположены только на эквидистантных (равноотстоящих) частотах Фурье, то принимается решение о том, что гипотеза H_0 верна.

В случае принятия гипотезы H_0 второй этап не выполняется. Если же гипотеза H_0 отвергается (т. е. имеются значения спектрограммы, отличные от нуля, что не удовлетворяет условию эквидистантности), то это означает, что исследуемая динамика не является строго периодической. Нарушение строгой периодичности может быть вызвано

флуктуацией элементов интервально-периодического режима. Идентификация интервально-периодического режима в предлагаемом методе выполняется на втором этапе, когда проверяется справедливость гипотезы H_1 о том, что наблюдаемый динамический режим является интервально-периодическим. Такая проверка выполняется путём выделения статистически значимых значений спектрограммы на частотах Фурье. Если выделенные значения спектрограммы расположены на эквидистантных частотах Фурье, то динамический режим идентифицируется как интервально-периодический.

Одновременное непринятие гипотез H_0 и H_1 означает, что справедлива гипотеза H_2 о том, что динамический режим является хаотическим. Такой вывод можно сделать исходя из того, что гипотезы H_0 , H_1 и H_2 образуют полную группу несовместных событий [12].

Заметим, что спектрограмма для фрагмента решения уравнения (1) длиной N , с помощью которой выполняется идентификация вида динамического режима, вычисляется на частотах Фурье

$$f_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2},$$

по формуле [16]

$$\rho_k^2 = \frac{1}{N^2} \left(\sum_{n=1}^N x_n \exp(-if_k n) \right)^2, \quad k = 0, \dots, \frac{N}{2},$$

где x_n — значения рассматриваемого фрагмента решения уравнения (1).

2. Первый этап идентификации вида динамического режима

На первом этапе метода идентифицируется периодический режим уравнения (1). Под периодическим понимается такой динамический режим, для которого существует l чисел $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$ таких, что

$$x_{n+1} = F(a, x_n), \quad x_{n+2} = F(a, x_{n+1}), \quad \dots, \quad x_n = F(a, x_{n+l-1}).$$

Если все числа $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+l}$ различны, то периодический режим называется циклом длины l , а число l — периодом динамического режима системы (1).

Длина N фрагмента исследуемого решения $\{x_n\}$ выбирается так, чтобы она была наименьшим общим делителем всех искомым периодов l периодических режимов. Динамический режим, имеющий период, не удовлетворяющий этому условию, предложенный метод не идентифицирует.

Для идентификации периодического режима проверяется равенство значений спектрограммы нулю с вычислительной точностью. Значение спектрограммы ρ_k^2 считается равным нулю с вычислительной точностью, если полученное при вычислении значение ρ_k^2 не превышает порогового η , определённого вычислительной погрешностью метода вычисления значений ρ_k^2 при используемых порядке и способе округления вещественных чисел. Заметим, что округления возникают в силу ограниченности объёма памяти, выделяемой компьютерной программой для хранения значений вещественных чисел.

Если значения спектрограммы, отличные от нуля, расположены только на эквидистантных частотах Фурье, то принимается гипотеза H_0 , а гипотезы H_1 и H_2 отклоняются. Этот вывод основан на хорошо известном факте [17]: спектрограммы периодических динамических режимов негармонического характера имеют значения, отличные

от нуля $\rho_{k_j}^2 \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, q$, только на эквидистантно расположенных частотах Фурье $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_q}$. В противном случае (непринятия гипотезы H_0) необходимо перейти к выполнению второго этапа идентификации.

3. Второй этап идентификации вида динамического режима

На втором этапе метода идентифицируется интервально-периодический режим уравнения (1).

Если динамика уравнения (1) характеризуется положительным показателем Ляпунова и значения x_n динамики системы в фазовом пространстве образуют l ($l > 1$) взаимно непересекающихся интервалов X_k , $k = \overline{1, l}$ ($X_k \cap X_s = \emptyset$, $k \neq s$), и при этом в динамике системы сохраняется порядок прохождения этих интервалов X_k

$$\begin{aligned} x_{n+1,2} &= F(a, x_{n,1}), \\ x_{n+2,3} &= F(a, x_{n+1,2}), \\ &\dots \\ x_{n+l,1} &= F(a, x_{n+l-1,l}), \end{aligned}$$

где $x_{n+k-1,k}$ — значение решения уравнения (1), принадлежащее интервалу X_k : $x_{n+k-1,k} \in X_k$, то можно говорить об особом виде хаотической динамики, именуемой интервально-периодической [12].

Для идентификации интервально-периодического режима из значений спектрограммы ρ_k^2 на втором этапе выделяют статистически значимые значения. Понятие *статистическая значимость значений спектрограммы* используется в задачах построения аппроксимации временных рядов, выделяющей регулярные колебания и представляющей их в виде суперпозиции небольшого количества гармонических слагаемых, взятых из разложения временного ряда в ряд Фурье. В таких задачах принадлежность гармонических слагаемых ряда Фурье к регулярным колебаниям временного ряда проверяется статистическими критериями. Статистическая незначимость значения спектрограммы ρ_k^2 указывает на то, что оно на выбранном уровне значимости статистического критерия является следствием нерегулярных флуктуаций временного ряда.

Относительно аппроксимации интервально-периодический режим может быть рассмотрен как композиция регулярной составляющей, определяющей порядок прохождения решением $\{x_n\}$ интервалов X_k , и некоторой случайной составляющей, описывающей нерегулярные флуктуации значений x_n внутри самих интервалов X_k . Такое представление объясняет наличие в спектрограмме статистически значимых значений, обусловленных регулярным прохождением решением $\{x_n\}$ интервалов X_k , а расположение этих значений на эквидистантно отстоящих частотах Фурье указывает на негармонический периодический характер регулярной составляющей аппроксимации.

Статистическая значимость значений спектрограммы ρ_k^2 , $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$, вычисленных по фрагменту решения уравнения (1), может быть определена критериями F и t [16]. В этих критериях проверяется справедливость основной гипотезы о том, что значение спектрограммы ρ_k^2 на k -й частоте Фурье $f_k = \frac{2\pi k}{N}$ равно нулю ($\rho_k^2 = 0$), т. е. статистически незначимо. Альтернативной гипотезой является утверждение о том, что это значение спектрограммы отлично от нуля: $\rho_k^2 > 0$. Если основная гипотеза при выбранном

уровне значимости ε критериями отвергается, то считается, что значение спектрограммы ρ_k^2 статистически значимо.

Если $0 < k < \frac{N}{2}$ ($k \neq \frac{N}{2}$, $k \neq 0$), то проверка основной гипотезы выполняется с использованием F -статистики:

$$F = \frac{N\rho_k^2}{4s^2},$$

где

$$s^2 = \frac{\sum_{n=1}^N x_n^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N x_n \right)^2 - \frac{N}{2} \rho_k^2}{N-3} \quad (2)$$

оценка вариации значений x_n решения рекуррентного уравнения, не поддающихся аппроксимации k -м гармоническим слагаемым ряда Фурье. При справедливой основной гипотезе статистика F имеет F -распределение со степенями свободы 2 и $N-3$:

$$P(x < F) = 1 - \left(1 + \frac{2}{N-3} F \right)^{-\frac{N-3}{2}}.$$

Если $k = \frac{N}{2}$ или $k = 0$ (т.е. при $f_N = \pi$ и $f_0 = 0$), то проверка основной гипотезы выполняется с использованием t -статистики:

$$t = \frac{N\rho_{\frac{N}{2}}^2}{4s^2},$$

где s^2 определяется выражением (2). При справедливой основной гипотезе статистика t имеет t -распределение:

$$P(x < t | n = n^*) = \int_{-\infty}^t \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left[1 + \frac{t^2}{n-1} \right]^{-\frac{n}{2}} dt.$$

Основная гипотеза отклоняется с уровнем значимости ε , если значение статистики $F(t)$ больше критического значения, определённого F -распределением (t -распределением).

4. Примеры идентификации динамических режимов уравнения Рикера

Покажем применение метода идентификации на известном однопараметрическом уравнении Рикера [5]

$$F(a, x_n) = x_n a \exp(-x_n).$$

Продemonстрируем работу метода на первом этапе. Известно, что при $a = 14.7$ уравнение Рикера имеет периодическое решение с периодом 16 [5]. В этом случае спектрограмма (рис. 1, а), вычисленная по фрагменту решения уравнения Рикера (длина использованного фрагмента решения $N = 3840 = 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ и кратна периоду решения 16),

имеет значения, отличные от нуля: $\rho_{k_j}^2 \neq 0, j = 1, 2, \dots, q$, только на эквидистантно расположенных частотах Фурье $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_q}$ со следующими номерами k_j : 240, 480, 720, 960, 1200, 1440, 1680 и 1920. По значениям k_j легко определить, что выполняется условие эквидистантности. Масштаб по оси значений спектрограммы на рис. 1 выбран таким образом, чтобы можно было продемонстрировать указанное свойство. Все пики соответствуют значениям спектрограммы, с вычислительной точностью отличным от нуля (превышают вычислительную точность).

Рассмотрим пример работы метода на втором этапе. При $a = 14.786$ уравнение Рикера имеет интервально-периодическое решение с периодом (количеством интервалов X_k) $l = 8$ [12]. На рис. 1, б представлен график спектрограммы, вычисленной по фрагменту решения уравнения Рикера при $a = 14.786$. Длина использованного фрагмента решения $\{x_n\}$, как и в первом примере, $N = 3840$. Спектрограмма, приведённая на рис. 1, б, имеет большое количество значений ρ_k^2 , превышающих вычислительную точность. Среди них есть наибольшие значения $\rho_{k_j}^2$, расположенные на тех же номерах k_j эквидистантных фурье-частот f_{k_j} , что и в предыдущем примере (при $a = 14.7$). Остальные, меньшие значения ρ_k^2 , находятся в основном на фурье-частотах между выделенными f_{k_j} .

F -критерий (t -критерий) при уровне значимости $\varepsilon = 0.05$ из всех значений спектрограммы определяют только три статистически значимых: при $k_j = 960, 1440$ и 1920 (f_{k_j} равно соответственно 0.250, 0.375 и 0.500). На графике спектрограммы (рис. 2, а) хорошо видны пики, соответствующие указанным значениям f_{k_j} . При выбранном масштабе остальные значения спектрограммы едва заметны или вовсе не наблюдаются.

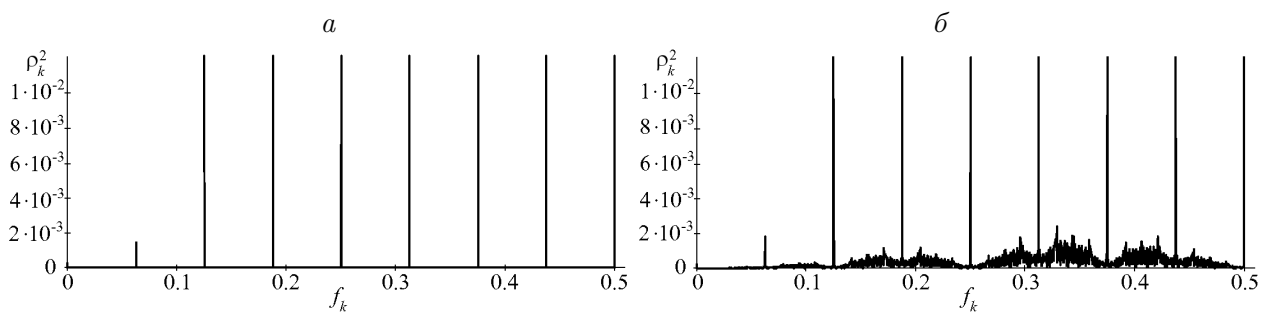


Рис. 1. Спектрограммы периодического решения уравнения Рикера при $a = 14.7$ (а) и $a = 14.786$ (б)

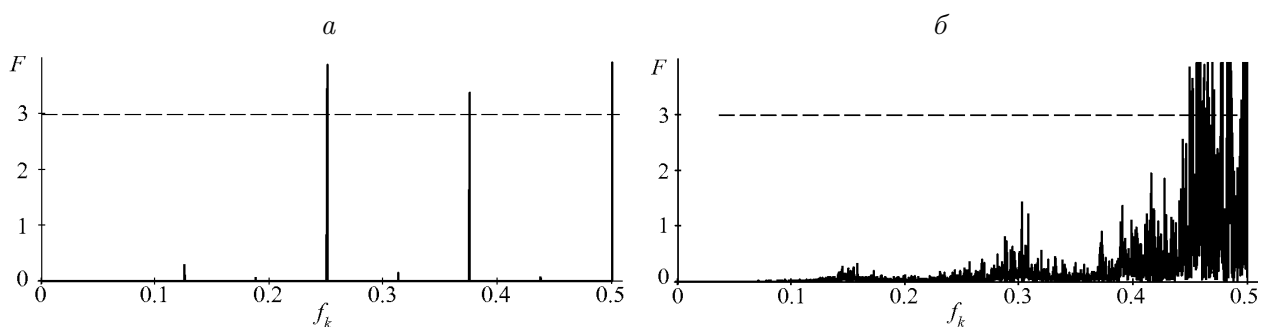


Рис. 2. Значения статистики F -критерия интервально-периодического решения уравнения Рикера при $a = 14.786$ (а) и $a = 16.9$ (б). Штриховой линией показано критическое значение F -критерия при уровне значимости $\varepsilon = 0.05$

Динамический режим, имеющий такую спектрограмму, предложенным методом идентифицируется как интервально-периодический. Важно заметить, что особый характер спектрограммы решения дискретного уравнения вида (1), а именно малые значения амплитуды на несущей частоте, затрудняет определение длины периода колебаний периодического решения с помощью спектрограммы. Под несущей частотой понимается частота, равная обратной величине периода исследуемого решения [18]. В данном примере, как указано выше, интервально-периодическое решение имеет период 8. Этому периоду соответствует несущая частота, равная 0.125. Из рис. 2, а видно, что значение амплитуды на данной частоте статистически незначимо отличается от нуля. Такие малые значения амплитуды при изучении спектрограммы с помощью статистических критериев интерпретируются как проявления шумовой составляющей.

Отсутствие статистически значимых значений спектрограммы или же их расположение на неэквидистантных частотах Фурье интерпретируются в представленном методе как хаотический динамический режим уравнения (1). Рассмотрим демонстрирующий это пример.

На рис. 2, б представлена спектрограмма фрагмента решения уравнения Рикера при $a = 16.9$ и выбранной длине фрагмента решения $N = 3840$. Проверка с помощью F -критерия обнаруживает большое количество статистически значимых значений спектрограммы, расположенных на неэквидистантных частотах Фурье. Динамический режим, имеющий такую спектрограмму, идентифицируется как хаотический.

Заключение

Использование предложенного метода идентификации вида режима уравнения (1) по значениям спектрограммы, вычисленным на частотах Фурье, показывает, что при соответствующем выборе длины N фрагмента решения $\{x_n\}$ периодический и интервально-периодический режимы определяются однозначно. По сравнению с методом идентификации, построенном на методах кластерного анализа, описанный метод более прост в использовании. Для его реализации нет необходимости определять оптимальное компромиссное решение, связанное с выбором порогового значения включения в кластер элементов решения $\{x_n\}$ и длины фрагмента исследуемого решения. Важным преимуществом нового метода идентификации является его возможность отличить периодическую динамику от интервально-периодической, что не позволяет сделать способ определения интервально-периодической динамики, реализованный на методах кластерного анализа. К его недостаткам можно отнести следующие: идентифицируя периодический и интервально-периодический режимы, метод не определяет длину периода; нарушение условия кратности длины N фрагмента исследуемого решения и периода динамического режима препятствует однозначному определению вида режима.

Список литературы

- [1] Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: МГУ, 1993. 302 с.
- [2] Уильямсон М. Анализ биологических популяций. Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 272 с.
- [3] Чернявский Ф.Б., Лазуткин А.Н. Циклы леммингов и полёвок на севере. Магадан: ИБПС ДВО РАН, 2004. 150 с.

- [4] ЛАСТ Е.В., ЛУППОВ С.П., ФРИСМАН Е.Я. Динамическая неустойчивость в математической модели динамики численности популяций лососевых видов рыб // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2, № 1. С. 114–125.
- [5] СКАЛЕЦКАЯ Е.И., ФРИСМАН Е.Я., ШАПИРО А.П. Дискретные модели динамики численности популяции и оптимизации промысла. М.: Наука, 1979. 168 с.
- [6] КУЗНЕЦОВ С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
- [7] ШУСТЕР Г. Детерминированный хаос: Введение. Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [8] НЕЙМАРК Ю.И., ЛАНДА П.С. Стохастические и хаотические колебания. Изд. 2-е, доп. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 424 с.
- [9] БАУТИН Н.Н., ЛЕОНТОВИЧ Е.А. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 490 с.
- [10] МУН Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1990. 312 с.
- [11] АНИЩЕНКО В.С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
- [12] ШЛЮФМАН К.В., ФИШМАН Б.Е., ФРИСМАН Е.Я. Особенности динамических режимов одномерной модели Рикера // Изв. высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2012. № 20(2). С. 12–28.
- [13] БИТЮЦКАЯ Л.А., МАШКИНА Е.С. Переходные процессы при плавлении германия в динамических и квазистатических режимах // ЖТФ. 1999. Т. 69, вып. 12. С. 57–61.
- [14] АГУРЕЕВ И.Е., АХРОМЕШИН А.В. Моделирование межцикловой неидентичности рабочих процессов в поршневых двигателях внутреннего сгорания // Изв. Тульского гос. ун-та. Техническая наука. 2010. № 1. С. 229–234.
- [15] ПЕСКОВ Н.В. Нелинейная динамика молекулярных процессов в гетерогенных системах. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М.: ИММ РАН, 2003. 276 с.
- [16] АНДЕРСОН Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 757 с.
- [17] КЕНДАЛ М., СТЬЮАРТ А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. Пер. с англ. М.: Наука, 1976. 736 с.
- [18] ЛЕВИН Б.Д. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.

*Поступила в редакцию 26 апреля 2013 г.,
с доработки — 20 мая 2013 г.*