

Разработка системы усвоения данных об окружающей среде на основе ансамблевого фильтра Калмана*

Е. Г. КЛИМОВА¹, Г. А. ПЛАТОВ², Н. В. КИЛАНОВА¹

¹*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

²*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия*
e-mail: klimova@ict.nsc.ru

Климова Е.Г., Платов Г.А., Киланова Н.В. Разработка системы усвоения данных об окружающей среде на основе ансамблевого фильтра Калмана // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 3. С. 27–37.

Рассматривается проблема оценки состояния окружающей среды, а также моделирования различных процессов в атмосфере и океане с помощью системы усвоения данных. К решению данной проблемы применён один из наиболее используемых подходов к задаче усвоения данных — ансамблевый фильтр Калмана. Приводятся два примера применения этого подхода при моделировании распространения загрязняющих веществ в атмосфере и летнего притока речных вод в море Лаптевых.

Ключевые слова: усвоение данных, ансамблевый фильтр Калмана, модель переноса и диффузии, шельфовая циркуляция, речной сток.

Klimova E.G., Platov G.A., Kilanova N.V. Development of environmental data assimilation system based on the ensemble Kalman filter // Computational Technologies. 2014. Vol. 19, No. 3. P. 27–37.

Environmental assessment using the observational data is one of the most pressing problems at the moment. Such an assessment is carried out with the involvement of mathematical models based on data assimilation systems. Kalman filter algorithm is currently one of the most popular approaches to solve the problem of the data assimilation. Ensemble Kalman filter is supposed to be a promising direction in the research on the application of the Kalman filter in the data assimilation. This article outlines currently accepted approaches to solving the problem of data assimilation for the environment, which are based on the ensemble Kalman filter. Along with the approximate description of covariance of the estimation errors using ensemble forecasts and on the basis of the control theory we propose to use sub-optimal algorithms. In these algorithms, the probability averaging is replaced by the time-averaging relied on the assumption of ergodicity of the forecast errors. An application of the proposed assimilation algorithm is considered in the examples given in this article. We deal with the data on passive gas components in the atmosphere and with the problem of simulating processes in the ocean. The numerical results, obtained by use of data assimilation, are analyzed in the case of modeling of passive gas components in the

*Работа выполнена при поддержке Программы междисциплинарных интеграционных исследований СО РАН на 2012–2014 гг. (проект № 109).

atmosphere over the Siberian region, as well as in the case of modeling of the summer runoff in the Laptev Sea. The simulated data are considered in both examples, taking the actual distribution of observational data. In both examples, the effectiveness of the proposed version of the ensemble Kalman filter is proved.

Keywords: data assimilation, ensemble Kalman filter, advection and diffusion model, shelf circulation, river runoff.

Введение

Современное исследование окружающей среды включает в себя моделирование процессов с привлечением математических моделей, описывающих процессы в атмосфере и океане, и моделей распространения в атмосфере пассивных газовых составляющих, химически активных веществ и аэрозолей. Для математического моделирования состояния окружающей среды необходимо знание измеренных величин не только в точках наблюдений, но и в узлах некоторой регулярной сети. В настоящее время оценка состояния окружающей среды по данным наблюдений является одной из наиболее актуальных задач. Такая оценка производится с привлечением математических моделей на основе систем усвоения данных. Один из самых часто используемых подходов к решению задачи усвоения данных наблюдений основан на алгоритме фильтра Калмана.

Лидирующим направлением в работах, посвящённых применению фильтра Калмана при усвоении данных, является ансамблевый подход, при котором матрицы ковариаций ошибок оценивания вычисляются для нелинейных прогностических моделей. Ансамблевый фильтр Калмана представляет собой вариант обобщённого фильтра Калмана, в котором ковариации ошибок прогноза оцениваются с помощью ансамбля прогнозов. В статье излагаются принятые в настоящее время подходы к решению проблемы усвоения данных об окружающей среде. Основной упор делается на подход, связанный с теорией оптимальной фильтрации Калмана. Рассматриваются примеры использования варианта ансамблевого фильтра Калмана для задачи распространения пассивной примеси в атмосфере, а также при моделировании процессов в океане. Наряду с приближённым описанием ковариаций ошибок оценивания с помощью ансамбля прогнозов, в отечественной литературе предлагается использовать субоптимальные алгоритмы, в которых теоретико-вероятностное осреднение заменяется на осреднение по времени. В приводимых в данной статье примерах рассматривается алгоритм, основанный на этом подходе, для задач усвоения данных о пассивных газовых составляющих в атмосфере и моделирования процессов в океане.

1. Ансамблевый фильтр Калмана

Наиболее популярный подход к решению задачи усвоения данных наблюдений [1] основан на теории оптимальной фильтрации Калмана [2]. Ансамблевый подход, впервые предложенный в работе [3] и получивший дальнейшее развитие в [4–6], позволяет вычислять матрицы ковариаций ошибок оценивания для нелинейных прогностических моделей. В этом случае рассматривается вариант обобщённого фильтра Калмана, в котором ковариации ошибок прогноза оцениваются с помощью ансамбля прогнозов.

В ансамблевом фильтре Калмана ковариации ошибок прогноза вычисляются приближённо по формуле

$$P^f \cong \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (x_k^f - \bar{x}^f)(x_k^f - \bar{x}^f)^T,$$

где $\{x_k^f, k = 1, \dots, K\}$ — ансамбль прогнозов по K начальным полям, \bar{x}^f — среднее по ансамблю значение.

При реализации ансамблевого алгоритма возникает множество проблем, связанных с ограниченным числом элементов ансамбля и с необходимостью получения ансамбля с матрицей ковариаций, соответствующей ковариациям ошибок анализа. Для этого необходимо рассматривать алгоритмы ансамблевого фильтра Калмана с генерированием случайных ошибок наблюдений. Варианты такого фильтра представлены в [3–5]. Однако в работе [7] было отмечено, что при данном подходе велико влияние ошибки, связанной с ограниченным количеством элементов ансамбля. Чтобы этого избежать, авторы [7] предложили применять метод квадратного корня (Ensemble Square Root Kalman Filter), позволяющий реализовать ансамблевый фильтр Калмана без использования возмущённых наблюдений. Этот подход к определению ансамбля ошибок анализа принято называть детерминированным. Таким образом, в ансамблевом фильтре Калмана можно выделить два подхода — стохастический фильтр и детерминированный фильтр.

Одна из проблем ансамблевого фильтра Калмана связана со слишком малым количеством элементов ансамбля по сравнению с размерностью оцениваемого вектора. Как отмечается в [6], если число собственных векторов оператора динамической системы больше количества элементов ансамбля, то коррекция ошибок прогноза не будет оптимальной. Второй проблемой, также связанной с малым числом элементов ансамбля, является появление “ложных ковариаций” на больших расстояниях [6]. Чтобы избежать данных проблем, ансамблевый фильтр Калмана может быть применён локально. Вариант локализации, состоящий в ограничении радиуса корреляции, предложен в [5]. Эти положения получили дальнейшее развитие в работах [4, 6]. Так же как классический обобщённый фильтр Калмана, ансамблевый фильтр Калмана технически сложно реализуем из-за необходимости осуществлять операции с матрицами высокого порядка. В [8, 9] был предложен экономичный алгоритм усвоения данных наблюдений для нелинейных моделей, основанный на применении ансамбля прогнозов для оценки ковариаций ошибок оценивания (ансамблевый π -алгоритм). Основная идея этих исследований заимствована из работ по теории автоматического управления [10]. Ансамблевый π -алгоритм использует трансформацию ковариационных матриц с целью уменьшения размерности массивов при реализации стохастического фильтра Калмана. По количеству машинных операций ансамблевый π -алгоритм близок к Local Ensemble Transform Kalman Filter (LETKF) [6], причём в этом алгоритме не требуется специально вычислять ансамбль, соответствующий ковариациям ошибок анализа, поскольку это происходит автоматически. Как и в LETKF, все операции в ансамблевом π -алгоритме проводятся с матрицами размерности порядка размера ансамбля.

Выделим вопросы, связанные с усвоением спутниковой информации.

Спутниковые данные по сравнению с наземными и аэрологическими наблюдениями имеют ряд отличительных особенностей, к которым относятся следующие:

- спутник измеряет информацию об уходящем излучении, поэтому необходимо осуществлять преобразование переменных модели в наблюдаемые переменные с помощью уравнения переноса излучения. Таким образом, оператор наблюдений нелинейный;
- данные поступают непрерывно по времени;
- ошибки наблюдений коррелируют, матрица ошибок наблюдений большой размерности и недиагональная;
- наличие систематической ошибки в наблюдениях (bias), что усложняет использование формул вышеприведённых алгоритмов.

Спутниковые данные могут использоваться двумя путями: либо напрямую, в виде данных об уходящем излучении, либо через предварительное восстановление по спутниковым данным значений метеорологических величин, которые затем используются в процедуре усвоения данных. Первый вариант является более предпочтительным, поскольку второй имеет ряд недостатков:

- при преобразовании данных о радиации используется информация о прогнозе, поэтому ошибки восстановленных данных и прогноза будут коррелировать;
- существует проблема оценки матрицы ковариаций ошибок наблюдений;
- матрица ковариаций ошибок наблюдений становится недиагональной.

Усвоение спутниковых данных осложняется тем, что для применения традиционных методов необходимо выполнение следующих условий:

- 1) ошибки наблюдений должны быть “несмещёнными”;
- 2) случайные поля ошибок наблюдений должны быть нормально распределены.

Эти условия для спутниковых данных не выполняются. Для реализации алгоритма усвоения необходимы также осуществление контроля качества и задание ковариационной матрицы ошибок наблюдений. Спутниковые данные — это огромный массив информации. Однако, как отмечается в ряде работ, большое количество наблюдений не всегда даёт наилучший результат, поскольку эти данные представляют собой массив коррелирующих между собой случайных величин и потому мало информативны.

2. Система усвоения данных о пассивных газовых составляющих в атмосфере

Для восстановления пространственно-временного распределения загрязняющих веществ в атмосфере в настоящее время используются системы усвоения данных наблюдений [11, 12]. Информация о содержании этих веществ измеряется с помощью как наземных измерительных приборов, так и спутников. Важной задачей в мониторинге состояния окружающей среды является оценка потоков газовых составляющих с поверхности Земли на основе полей, полученных с помощью системы усвоения данных [13, 14].

В ИВТ СО РАН разрабатывается система усвоения данных о пассивных газовых составляющих в атмосфере для Сибирского региона [15, 16]. Система включает полулагранжеву модель переноса и диффузии пассивной примеси [15–17], метеорологические поля рассчитываются с помощью мезомасштабной модели WRF (Weather Research and Forecast; <http://www.mmm.ucar.edu/>). Система усвоения использует динамико-стохастический подход с применением субоптимального алгоритма, основанного на фильтре Калмана. Кроме того, как уже отмечалось выше, спутниковые данные обладают рядом особенностей. Поэтому разрабатываемая система усвоения данных должна быть

адаптирована, в частности, к пространственно-временному распределению спутниковых данных.

При реализации алгоритма фильтра Калмана возникает ряд проблем. Одна из них состоит в большом порядке матриц ковариаций ошибок прогноза. Возможным решением этой проблемы является применение субоптимального алгоритма, основанного на предположении об эргодичности полей ошибок прогноза по времени.

В случае, когда случайные поля обладают свойством эргодичности по времени, их ковариации могут быть оценены путём замены осреднения по выборке на осреднение по времени [10, 18]. Пусть в начальный момент времени задано значение случайного поля ошибок

$$x_0^f = x_0^t + \Delta x_0.$$

Будем считать, что изменение ошибки по времени описывается с помощью линейризованного уравнения. Обозначим через Δx_i прогноз ошибок на момент времени t_i . Тогда ковариационную матрицу ошибок прогноза в момент времени $t_N = N \times \Delta t$ можно оценить по формуле “скользящего среднего” [10]

$$P_N^f = \overline{\Delta x_N (\Delta x_N)^T} \cong \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \Delta x_i (\Delta x_i)^T.$$

В настоящей работе рассматривается вариант субоптимального алгоритма усвоения данных в применении к задаче оценки полей концентрации и эмиссии углекислого газа. С помощью разработанной системы усвоения были проведены численные эксперименты с модельными данными. В экспериментах с модельными данными задается “истинное” состояние оцениваемых полей, вычисляемое по той же модели, что и прогноз, но по начальным данным со случайной ошибкой. Данные наблюдений моделируются с помощью наложения случайной ошибки на “истинное” значение.

Проведены численные эксперименты по совместной оценке концентрации и эмиссии углекислого газа для региона (48.9° с.ш., 85.9° в.д.; 75.3° с.ш., 130° в.д.). Расчёты осуществлялись на сетке 100 × 174 узла по горизонтали (направления x и y в декартовой системе координат), 15 уровней по вертикали. Шаг сетки по горизонтали при этом составлял 18 км, шаг по времени 15 мин. Начальное распределение CO₂ было взято с сайта Европейской программы GMES (<http://gems.ecmwf.int/data/>) для 00 ч 01 июня 2006 года. Для проведения численных экспериментов производилась интерполяция данных на расчётную сетку. Считалось, что каждые 6 ч имеются данные наблюдений (в проведённых численных экспериментах они моделировались). Получены поля концентрации и величина среднеквадратичной ошибки оценки концентрации на 24 ч. Кроме того, проведён ряд предварительных численных экспериментов по оценке эмиссии углекислого газа. В данном случае был использован аналогичный субоптимальный алгоритм, основанный на фильтре Калмана, при этом рассматривался “расширенный” вектор оцениваемых переменных, включающий концентрации и эмиссию пассивной примеси. Модель оценки эмиссии была взята из работы [12].

На рис. 1, 2 представлены результаты проведённых численных экспериментов. На рис. 1 приведена оценка концентрации углекислого газа на 24 ч для исследуемого региона (48.9° с.ш., 85.9° в.д.; 75.3° с.ш., 130° в.д.). Здесь на оси абсцисс отложена долгота региона, на оси ординат — широта. На рис. 2 пунктирными линиями показаны графики изменения среднеквадратичной ошибки оценки концентрации и поправочного множителя в модели оценки эмиссии без применения процедуры усвоения данных наблюдений,

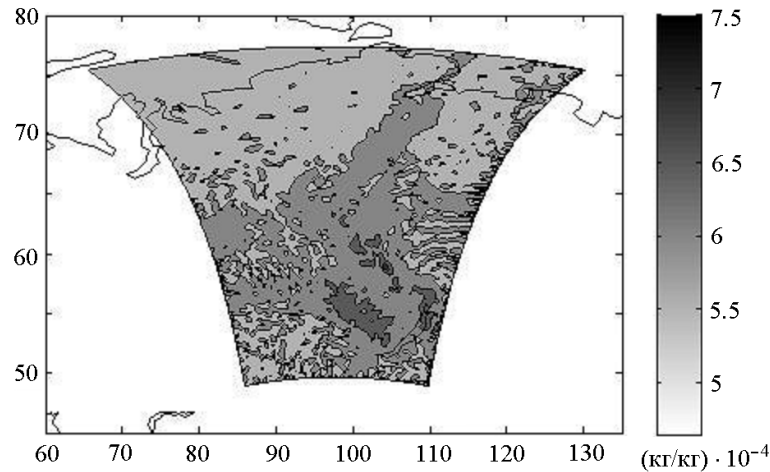


Рис. 1. Оценка концентрации углекислого газа ($((\text{кг}/\text{кг}) \cdot 10^{-4})$) на 24 ч, полученная с применением процедуры усвоения данных наблюдений

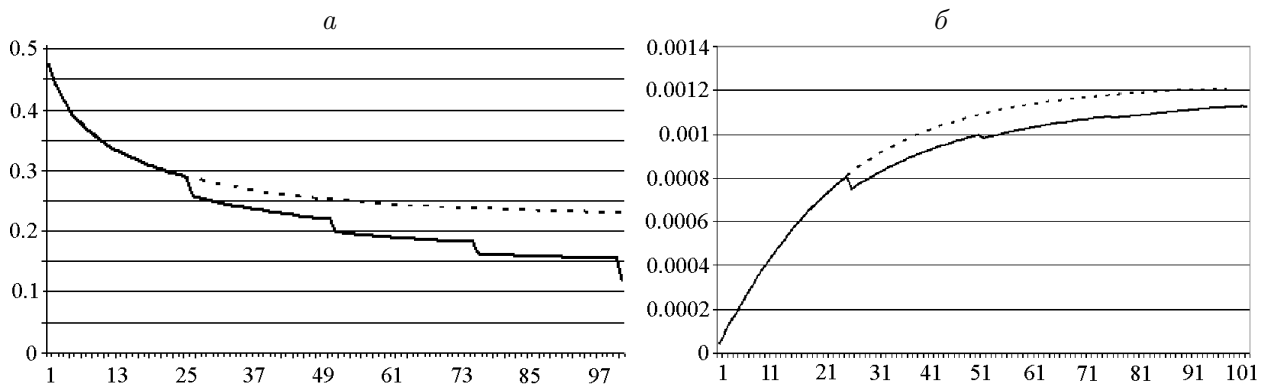


Рис. 2. Среднеквадратичная ошибка оценки концентрации ($((\text{кг}/\text{кг}) \cdot 10^{-4})$) (*а*) и поправочного множителя в модели оценки эмиссии (*б*). На оси абсцисс отложен номер шага по времени

сплошными линиями — графики данных величин, полученные с применением процедуры усвоения этих данных. Рост среднеквадратичной ошибки во втором случае (рис. 2, *б*) обусловлен свойством задаваемой модели изменения эмиссии.

Результаты численных экспериментов показали возможность осуществления оценки, например такого параметра модели, как эмиссия, в процедуре усвоения данных.

С применением системы усвоения были также проведены численные эксперименты с модельными данными с учётом реального пространственно-временного распределения спутниковой информации. Полученные предварительные результаты позволили сделать вывод о возможности качественной оценки распределения парниковых газов в заданном регионе.

3. Система усвоения данных для моделирования процессов в океане

До недавнего времени наблюдения за состоянием Мирового океана носили эпизодический характер. На сегодня существуют большое количество регулярных спутниковых

наблюдений (температура поверхности океана) и данных, получаемых в оперативном режиме системой автономных буев Арго. Это позволяет рассматривать задачу оценки состояния океана по данным наблюдений и по математической модели, описывающей динамику океана (задачу усвоения данных).

Ансамблевый фильтр Калмана является одним из наиболее используемых подходов к задаче усвоения данных в океане [19]. Разрабатываются также гибридные версии, объединяющие практику моделирования ансамблей с методом многоэлементной оптимальной интерполяции. В нашей стране созданием систем усвоения данных в океане занимается ряд научных коллективов. Сотрудниками Гидрометцентра России создана система усвоения данных в океане, в которой используется вариационный подход (3DVAR) [20]. Разработкой этой системы (4DVAR) занимается и коллектив авторов ИВМ СО РАН [21].

Наряду с приближённым описанием ковариаций ошибок оценивания с помощью ансамбля прогнозов в отечественной литературе [10] предлагалось использовать субоптимальные алгоритмы, в которых теоретико-вероятностное осреднение заменяется на осреднение по времени. В настоящей работе представлен алгоритм, основанный на этом подходе, для задачи усвоения данных океанических наблюдений. Как и в экспериментах, описанных в разделе 2, ковариационная матрица ошибок прогноза оценивается по формуле “скользящего среднего”. Поскольку вычисление ковариаций по этой формуле является приближённой оценкой, возникает проблема, свойственная всем ансамблевым алгоритмам — неоправданно большие значения ковариаций на больших расстояниях. В силу этого, как и в ансамблевом фильтре Калмана, авторами была применена так называемая процедура локализации, состоящая в поэлементном умножении матрицы ковариаций на функцию, убывающую с расстоянием [5].

Оценка свойств разрабатываемого алгоритма проводилась с помощью численных экспериментов с модельными данными. Кроме того, были проведены численные эксперименты по усвоению данных с “реальным” пространственно-временным распределением данных, при этом за основу принимались данные ААНИИ Росгидромета и спутниковые данные системы Pathfinder.

Для решения задачи усвоения данных прямых и спутниковых измерений на этапе прогноза использовалась система вложенных моделей, описанная в работе [22]. Система включает совместную крупномасштабную модель Северного Ледовитого океана, северной Атлантики [23, 24], ледово-снежного покрова [25] и региональную модель, адаптированную к бассейну моря Лаптевых с концентрированным горизонтальным разрешением в окрестностях дельты р. Лена. Область моделирования и топография дна представлены на рис. 3. В качестве атмосферного форсинга используются данные реанализа NCEP о состоянии нижней атмосферы [26]. Распределение спутниковых данных по региону в период международного полярного года — 2008 за сентябрь приведено на рис. 4. Сентябрь выбран в связи с тем, что на этот месяц приходится наибольшее количество инструментальных данных, необходимых для калибровки спутниковых измерений. Районы А и Б, выделенные на рис. 3, имеют наибольшее покрытие спутниковой информацией.

Как это принято в численных экспериментах с модельными данными, “истинное” значение моделировалось с помощью расчёта по той же модели в отсутствие возмущения внешних параметров. Результаты этого расчёта были искусственно локализованы с помощью процедуры интерполяции в точки наблюдений, имеющие реальное пространственно-временное распределение.

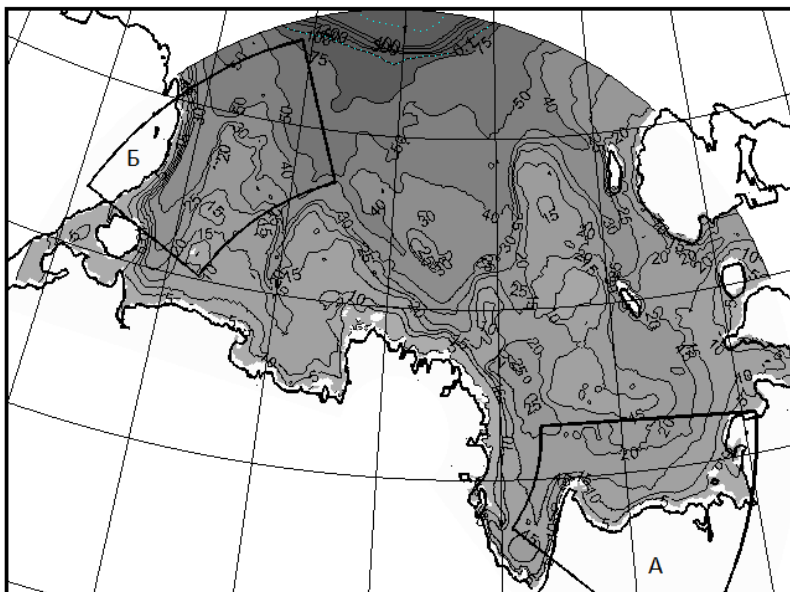


Рис. 3. Область моделирования: море Лаптевых. Изолинии соответствуют глубине бассейна в метрах. Выделенные области А и Б соответствуют районам с наибольшим покрытием спутниковыми данными в сентябре 2008 г.

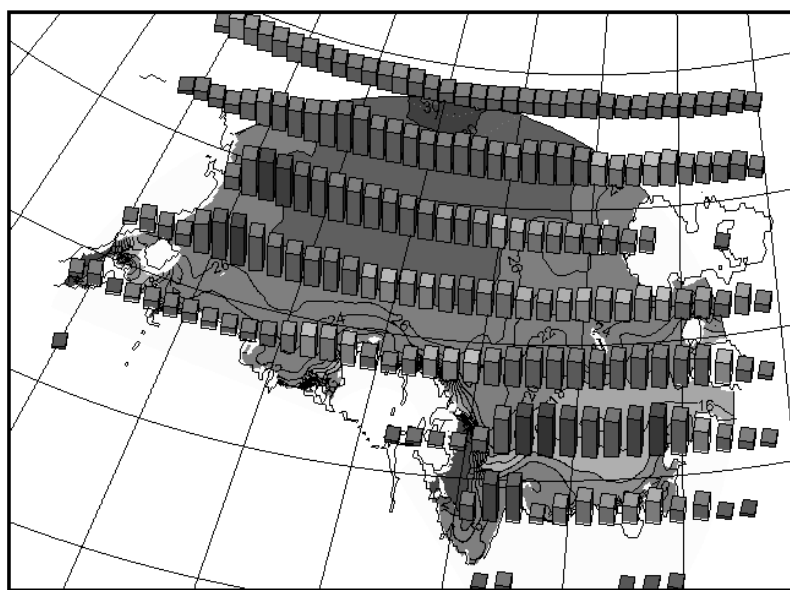


Рис. 4. Гистограмма количества спутниковых данных по регионам. Наиболее освещены районы А и Б, выделенные на рис. 3. Изолинии соответствуют полю солёности на поверхности, полученному по результатам моделирования для 30 сентября 2008 г.

В качестве возмущающего внешнего параметра использовался нулевой расход р. Лена. В этом случае модель систематически завышает солёность вод, расположенных вблизи дельты реки. Рисунок 5, а показывает, что в районе А при отсутствии усвоения ошибка в определении солёности на поверхности со временем вырастает до 3 промилле, в то время как с учётом данных наблюдений ошибка остаётся в интервале 1–1.5 промилле. Район А расположен по направлению распространения речных вод, поэто-

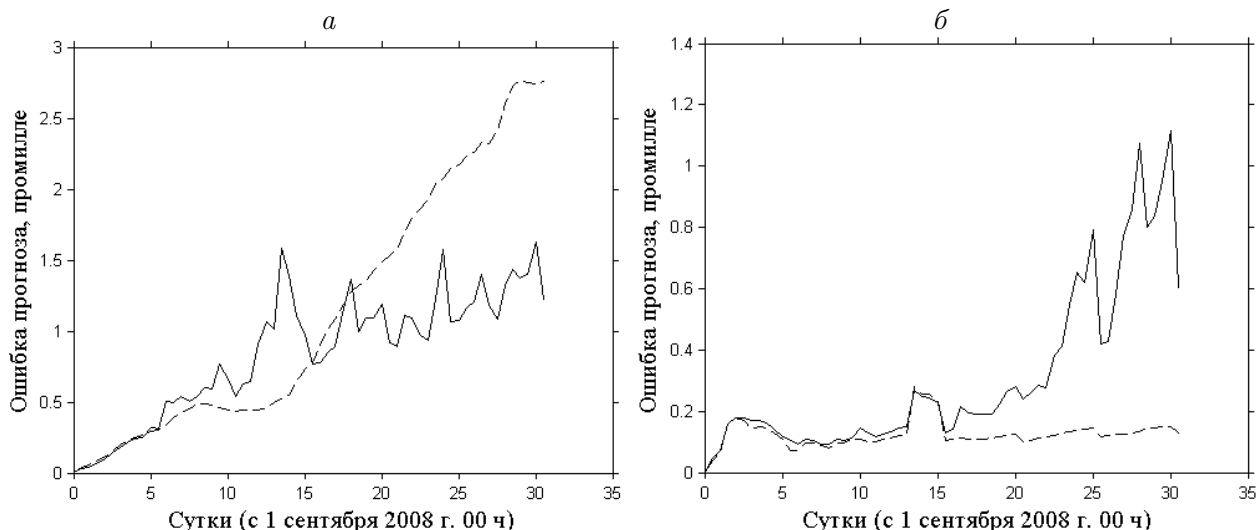


Рис. 5. Временной ход ошибки прогноза по областям А (а) и Б (б) для солёности поверхности по результатам моделирования с 1 по 31 сентября 2008 г. Штриховые линии соответствуют эксперименту без усвоения, сплошные — с усвоением данных наблюдений

му в случае их отсутствия ошибка возрастает. Район Б, наоборот, находится вдалеке от дельты реки, и поэтому ошибка прогноза в определении солёности незначительна (рис. 5, б). Использование же усвоения данных приводит к возмущениям поля солёности и даёт ошибку того же, что и в районе А, — порядка 1 промилле.

Предложенная в работе реализация алгоритма усвоения данных, основанного на ансамблевом фильтре Калмана, в рассмотренных случаях проводится с учётом специфики модели, количества и качества поступающих данных наблюдений, пространственных и временных масштабов задачи. Для реализации алгоритма усвоения в каждом из приведённых примеров разрабатывалась своя система усвоения данных и проводилась апробация системы с помощью численных экспериментов с модельными данными. В обоих случаях показана эффективность применения предлагаемой версии ансамблевого фильтра Калмана. В дальнейшем авторами предполагается обобщение рассмотренных систем усвоения, в котором наряду с “временным” ансамблем ошибок прогноза будет использоваться ансамбль, полученный с помощью вычисления нескольких прогнозов.

Список литературы

- [1] KALNAY E. Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [2] JAZWINSKI A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory. New York: Acad. Press, 1970.
- [3] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // J. of Geophys. Res. 1994. Vol. 99. P. 10143–10162.
- [4] EVENSEN G. Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 307 p.

- [5] HOUTEKAMER P.L., MITCHELL H.L. Ensemble Kalman filtering // Quart. J. of the Royal Meteorolog. Soc. 2005. Vol. 131. P. 1–23.
- [6] HUNT B.R., KOSTELICH E.J., SZUNYOGH I. Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter // Phys. D. 2007. Vol. 230. P. 112–126.
- [7] WHITAKER J.S., HAMILL T.M. Ensemble data assimilation without perturbed observations // Monthly Weather Rev. 2002. Vol. 130. P. 1913–1924.
- [8] КЛИМОВА Е.Г. Метод усвоения данных наблюдений, основанный на ансамблевом алгоритме // Метеорология и гидрология. 2008. № 9. С. 45–53.
- [9] КЛИМОВА Е. A suboptimal data assimilation algorithm based on the ensemble Kalman filter // Quarterly J. of the Royal Meteorolog. Soc. 2012. Vol. 138. P. 2079–2085. DOI:10.1002/qj.1941.
- [10] СПРАВОЧНИК по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 711 с.
- [11] BAKER D.F., DONEY S.C., SCHIMEL D.S. Variational data assimilation for atmospheric CO₂ // Tellus. 2006. Vol. 58B. P. 359–365.
- [12] HEEMINK A.W., SEGERS A.J. Modeling and prediction of environmental data in space and time using Kalman filtering // Stochastic Environmental Res. and Risk Assessment. 2002. Vol. 16. P. 225–240.
- [13] CHEVALLIER F., ENGELEN R.J., CAROUYGE C. ET AL. AIRS-based versus flask-based estimation of Carbon surface fluxes // J. of Geophys. Res. 2009. Vol. 114. D20303. P. 1–9.
- [14] FUNG L., FENG L., PALMER P.I. ET AL. Estimating surface CO₂ fluxes from space-borne CO₂ dry air mole fraction observations using an ensemble Kalman filter // Atmos. Chem. Phys. 2009. No 9. P. 2619–2633.
- [15] КЛИМОВА Е.Г., КИЛАНОВА Н.В. Численные эксперименты по оценке эмиссии метана на основе системы усвоения данных о пассивной примеси в атмосфере Северного полушария // Оптика атмосферы и океана. 2006. № 11. С. 961–964.
- [16] КИЛАНОВА Н.В., КЛИМОВА Е.Г. Численные эксперименты по оценке систематической ошибки модели в задаче усвоения данных о концентрации пассивной примеси // Вычисл. технологии. 2006. № 5. С. 32–40.
- [17] VERMEJO R., STANFORTH A. The conversion of semi-Lagrangian advection scheme to quasi-monotone scheme // Monthly Weather Rev. 1992. Vol. 120. P. 2622–2632.
- [18] ЯГЛОМ А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 279 с.
- [19] YIN Y., ALVES O., OKE P.R. An ensemble ocean data assimilation system for seasonal prediction // Monthly Weather Rev. 2011. Vol. 139. P. 786–808.
- [20] РЕСНЯНСКИЙ Ю.Д., ЗЕЛЕНЬКО А.А. Развитие моделей и методов анализа данных наблюдений для мониторинга и прогнозирования крупномасштабных процессов в океане // Сб. тр. “80 лет Гидрометцентру России”. М.: Триада ЛТД, 2010. С. 350–375.
- [21] АГОШКОВ В.И., ИПАТОВА В.М., ЗАЛЕСНЫЙ В.Б. и др. Задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений для моделей общей циркуляции океана и методы их решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, № 6. С. 734–770.
- [22] ПЛАТОВ Г.А. Численное моделирование формирования глубинных вод Северного Ледовитого океана. Часть II: Результаты региональных и глобальных расчётов // Там же. 2011. Т. 47, № 3. С. 409–425.

- [23] ГОЛУБЕВА Е.Н., ПЛАТОВ Г.А. Численное моделирование отклика арктической системы океан—лед на вариации атмосферной циркуляции 1948–2007 гг. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45, № 1. С. 145–160.
- [24] GOLUBEVA E.N., PLATOV G.A. On improving the simulation of Atlantic water circulation in the Arctic Ocean // J. Geophys. Res. 2007. Vol. 112. doi: 10.1029/2006JC003734.
- [25] HUNKE E.C., DUKOWICZ J.K. An elastic-viscous-plastic model for ice dynamics // J. Phys. Oceanogr. 1997. Vol. 27, No 9. P. 1849–1867.
- [26] KALNAY E., KANAMITSU M., KISTLER R. ET AL. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // Bull. Amer. Meteorol. Soc. 1996. No. 77. P. 437–471.

Поступила в редакцию 21 марта 2014 г.