ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ, ИНТЕРВАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ И ИХ ТРУДОЕМКОСТИ*

Ю. И. Шокин
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия

В этой методологической работе предлагается формализация понятия интервальной (локализационной) задачи и с позиций трудоёмкости обсуждаются общие свойства интервальных задач и алгоритмов их решения. Концепция *последовательно гарантирующего алгоритма*, недавно предложенная как разумный компромисс между требованиями гарантированности интервального результата и получения его за практически приемлемое время, распространяется на общие интервальные (локализационные) задачи.

Интенсивное развитие интервального анализа продолжается вот уже почти четыре десятилетия, и сейчас появляется все больше поводов к некоторому подведению итогов, к тому, чтобы оглянуться назад и осмыслить пройденный путь, наметить вехи на будущее. Представляемая вам работа является скорее философской или методологической, чем математической, и посвящена обсуждению некоторых проблем и гипотез, естественно возникших в связи с развитием интервального анализа. В тексте отсутствуют строгие доказательства, а некоторые из основных выводов работы являются результатом индуктивных умозаключений и широких экстраполяций. Тем не менее автор надеется, что высказанные им идеи будут интересны интервальному сообществу.

1. Что есть “интервальная задача”?

Нередко можно слышать, как та или иная задача провозглашается “основной задачей интервального анализа”, а несколько широко известных результатов уже получили наименование “основной теоремы интервального анализа”. По-видимому, наиболее часто основной задачей интервального анализа исследователи называли следующую формулировку:

Для данной функции $f(x_1,\ \dots,\ x_n)$ от n вещественных переменных и n интервалов $\boldsymbol{x}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{x}_n$ вычислить (или оценить) область значений (1)
$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}_1,\ \dots,\ \boldsymbol{x}_n) = \{\, f(x_1,\ \dots,\ x_n) \mid x_1 \in \boldsymbol{x}_1,\ \dots,\ x_n \in \boldsymbol{x}_n \}.$$

Действительно, задача (1) и её различные вариации и модификации являются математической формализацией большого количества практически важных, интересных и часто встречающихся постановок, которые стали уже классическими для интервального анализа. Таковы, например, задачи оценивания множеств решений систем алгебраических и дифференциальных уравнений с интервальными параметрами. В первой из этих постановок функция f является неявно заданной, а во второй конкретные значения f вообще могут быть вычислены лишь после интегрирования соответствующей дифференциальной задачи. Тем не менее, несмотря на большую общность постановки (1), ею далеко не исчерпываются те задачи, с которыми имеет дело современный интервальный анализ.

Первоначально интервальные методы "возникли как средство автоматического учета ошибок округлений при счете на ЭВМ. Однако идеи, заложенные в их основу, оказались весьма конструктивными и полезными в прикладном аспекте. В результате появились интервальная арифметика, интервальный анализ, интервальная топология, интервальные методы решения задач вычислительной математики, оптимального управления, биологии и т.д." [5]. В настоящее время без преувеличения можно констатировать, что фокус исследований по приложениям интервальной математики сдвинулся от чисто "округленческой" тематики к работам, в которых интервальный анализ воспринимается, в первую очередь, как удобное и эффективное в вычислительном отношении средство для оперирования с неопределенностями в данных, альтернативное существующим вероятностным и нечётким подходам. Представляется, что эта область применений интервального анализа сделается в недалёком будущем доминирующей.

Каким же образом может быть формализовано понятие "типичной задачи" интервального анализа? Моё глубокое убеждение состоит в том, что большинство задач интервального анализа может быть охарактеризовано в самом общем виде как задачи, связанные с вычислением и оцениванием (в том или ином смысле) некоторых множеств, которые будем называть *множествами решений*, посредством других множеств более простой структуры из заранее очерченного класса. Интервальный анализ, таким образом, становится вычислительным отделом молодой и быстро развивающейся математической дисциплины — многозначного анализа (set-valued analysis) [15].

А.Г. Яковлевым в [13] для обозначения типичных задач интервального анализа предложен термин "локализационная задача". Несмотря на то, что предложенное в [13] определение является, на наш взгляд, неоправданно узким, сам термин представляется достаточно удачным. Мы будем использовать термин "локализационный" как синоним для "интервальный" и называть *интервальными* (*локализационными*) все упомянутые выше задачи по вычислению и оцениванию одних множеств другими, более простыми. То, в каком именно смысле осуществляется аппроксимация и какими множествами, уточняется в каждой конкретной задаче. Наряду с традиционными интервалами (прямыми произведениями отрезков вещественной оси) оценочными множествами могут быть параллелепипеды, эллипсоиды и т.п. Оценивать множества решений можно "внешним" образом (включая их в оценочное множество), "внутренним" образом (включая оценочное множество в множество решений) либо еще каким-нибудь другим способом, диктуемым конкретным содержательным смыслом решаемой практической задачи.

Естественно также ввести в рассмотрение некоторую меру ϱ отклонения решения задачи — оценочного множества — от оцениваемого множества решений. Впредь мы будем называть ϱ *обобщённой метрикой*.

Наконец, отличительной особенностью задач интервального анализа, делающих их непохожими, к примеру, на задачи классического численного анализа, является наличие некоторого дополнительного *качественного* требования к решению, которому оно должно удовлетворять помимо требований близости по отклонению ϱ. Это качественное требование носит, как правило, характер некоторого условия на взаимное расположение множества решений и оценивающего множества. Например, при интервальном оценивании области значений функции в задаче (1) нам не просто нужен какой-то оценивающий интервал, будь он хоть сколь угодно близок к области значений функций, но лишь такой, который гарантированно содержит эту область внутри себя.

Переходя к строгим определениям, мы предлагаем следующую формализацию того, что необходимо понимать под задачами интервального анализа.

> Массовая *интервальная (локализационная) задача* P — это упорядоченная четверка $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \varrho)$, в которой:
>
> $\mathcal{S}$ — *семейство множеств решений*, иначе — семейство оцениваемых множеств (the family of solution sets, the family of estimated sets), т.е. отображение из множества $I \subseteq \mathbb{R}^p$ (или какого-то более общего множества) в класс всех множеств. I описывает возможные значения параметров P, и *индивидуальная интервальная задача* выделяется из P путём присвоения переменным $\mathcal{S}$ конкретных значений, которые определяют (в результате процесса решения) индивидуальное множество решений $\sigma \in \mathcal{S}$;
>
> $\mathcal{E}$ — *семейство оценочных множеств* (family of estmimating sets), $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$;
>
> $\mathcal{M}$ — *модальность* (modality) результата — отношение $\sigma\mathcal{M}\varepsilon$ между элементами $\mathcal{S}$ и элементами $\mathcal{E}$. В точных математических терминах модальность — это одноместный предикат на $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$, которым задается вытекающий из содержательного смысла задачи способ оценивания множеств решений, иначе — требуемое отношение между множествами из $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$;
>
> ϱ — обобщённая *метрика* (metric) — неотрицательный функционал на $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$, оценивающий погрешность ответа, т.е. меру близости результата к истинному множеству решений в смысле, определяемом постановкой задачи.
>
> *Решением* задачи I будем называть любое такое $\epsilon \in \mathcal{E}$, для которого выполнено отношение $\sigma\mathcal{M}\epsilon$.

Мы намеренно не фиксируем, как связаны между собой множества $\mathcal{S}$ и $\mathcal{E}$. Нередко они являются множествами подмножеств некоторого основного множества $\mathcal{G}$, так что $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \in^{\mathcal{G}}$, но это, вообще говоря, не обязательно (на практике чаще всего $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{\setminus}$ или $\mathcal{G} = \mathbb{C}^{\setminus}$).

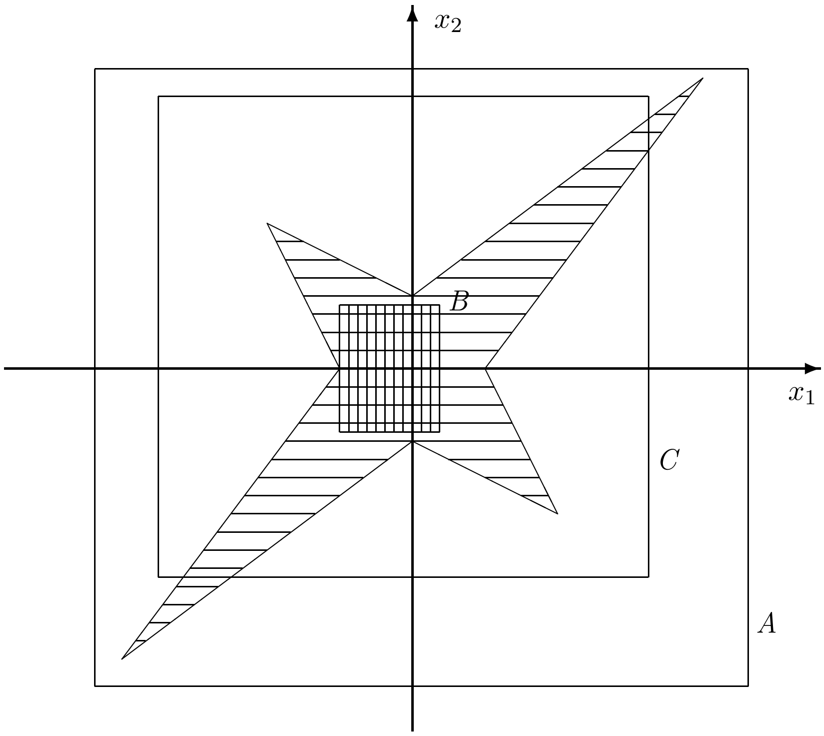
Простой иллюстративный пример. В классической задаче внешнего покоординатного оценивания множества всех решений интервальной линейной системы

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$$

с интервальной $m \times n$-матрицей $\boldsymbol{A}$ и интервальным m-вектором $\boldsymbol{b}$ оцениваемым множеством (множеством решений) служит так называемое объединённое множество решений (united solution set)

$$\Sigma_{\exists\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\,\},$$

а семейство множеств решений — это зависящая от $m(n+1)$ интервальных параметров совокупность всех объединённых множеств решений для интервальных линейных систем



Оценивание множества решений (звезда с горизонтальной штриховкой) прямоугольниками "внешней" (), "внутренней" () и "слабой внешней" () модальностей.

данного фиксированного размера. В качестве семейства оценочных множеств обычно рассматривают n-мерные прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. n-мерные интервальные векторы, а модальностью служит отношение включения множества решений в оценочное множество.

Рассмотренный пример является довольно типичным в том смысле, что соответствует исторической линии развития интервального анализа — от задач чувствительности. До настоящего времени подавляющее большинство исследуемых в интервальной математике постановок для алгебраических и дифференциальных задач (см. [14, 1, 18, 4, 19, 5, 35, 37, 30]–[33, 39, 46] и имеющуюся там библиографию) требуют теоретико-множественного включения множества решений в оценивающее множество, т.е. множество решений оценивается как бы извне, а модальностью в этом случае является условие $\sigma \subseteq \epsilon$. Естественно назвать подобную модальность "внешней" (outer) и добавлять эпитет "внешняя" в названия соответствующих интервальных (локализационных) задач. К примеру, следуя работе [56] задачу внешнего покоординатного оценивания объединенного множества решений интервальной линейной системы уместно назвать "внешней задачей" для интервальной линейной системы и т.д.

Дальнейшие примеры.

В *линейной задаче о допусках* для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ [4, 34, 35, 20, 55] ищется интервальный вектор решения, который должен быть включен в *допустимое множество решений* $\Sigma_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\}$ (tolerable solution set), т.е. модальностью служит теоретико-множественное включение $\sigma \supseteq \epsilon$, обратное к тому, которое требуется во "внешних" задачах. В аналогичном отношении оценивающее множество находится к множеству решений и в других постановках, рассматриваемых, например, в [47, 57]. Мы будем называть общую всем этим задачам модальность "внутренней", а соответствующие интервальные задачи — "внутренними" (inner).

Описанные выше "внешняя" и "внутренняя" модальности, охватывая огромное разнообразие встречающихся на практике локализационных задач, не являются, конечно же, единственно возможными. Нетрудно указать примеры и других модальностей, причем рассматривать их следует не только лишь как теоретический куръёз.

Пусть $\mathcal{S} \subseteq \in^{\mathbb{R}^\setminus}$, а семейство оценочных множеств $\mathcal{E}$ состоит из всех n-мерных интервальных векторов. Для $Y \in \mathcal{S}$, $V \in \mathcal{E}$ "внешняя" модальность, очевидно, эквивалентна $\mathrm{pr}_i\, Y \supseteq V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где pr_i — операция проецирования на i-ю координатную ось. Потребовав для оценочного множества обратных включений $\mathrm{pr}_i\, Y \subseteq V$, $i = 1, 2, \ldots, n$, получим пример нетрадиционной модальности, которую можно было бы назвать "слабой внешней". Такой способ оценивания используется в рассматриваемых в книге [2] задачах идентификации (с. 45–46). Если же для некоторых $\nu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ нужно оценить $\min\{\, x_\nu \mid x \in Y\,\}$ снизу, а для остальных ν — сверху и аналогичные требования предъявляются к оцениванию $\max\{\, x_\nu \mid x \in Y\,\}$, то подобную модальность впору называть "смешанной".

Обратимся теперь к семействам оценочных множеств. В вещественном случае кроме традиционных интервалов — прямых произведений отрезков вещественной оси — таковыми могут служить "интервалы" арифметики Кахана [29], мультиинтервалы — конечные объединения отрезков и лучей вещественной оси [12]. В многомерном случае кроме традиционных прямых произведений вещественных отрезков в качестве оценочных множеств широко применяются параллелепипеды и эллипсоиды, особенно популярные при решении ОДУ (см. [19, 11] и имеющиеся там ссылки), шары некоторой нормы [61], пересечения нескольких параллелепипедов [18] и т.п. Наряду с классическими одномерными комплексными интервалами — прямоугольниками и кругами — на комплексной плоскости [1] используются, например, круговые кольца [44] и круговые секторы [21] и т.п. Очевидная мораль приведённых примеров — многообразие оценочных множеств и возможных способов оценивания множеств решений, и, как следствие, многообразие различных постановок локализационных задач.

Отметим совершенно особую роль третьего члена кортежа $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \varrho)$ — модальности $\mathcal{M}$. Выбор этого термина продиктован тем, что в одном из общеупотребительных смыслов модальностью называется "...способ понимания суждения об объекте, явлении, или событии" [10]. В данном случае таковым объектом является индивидуальное множество решений σ, оценочное множество ϵ — это суждение о нём, а посредством модальности расшифровывается то, в каком смысле и что именно гарантирует ϵ, — ответ локализационной задачи. Не будет преувеличением сказать, что в первую очередь присутствие модальности обусловливает своеобразие формы интервальных (локализационных) задач: от решения такой задачи требуется прежде всего удовлетворение некоторому *качественному условию*, выражаемому модальностью, а уж потом принимается во внимание погрешность, близость и т.д.

В наших построениях модальность возникает естественно и по-существу, хотя аналога этому понятию в классическом численном анализе или теории приближений нет. Попытки обойти её использование, переформулировав локализационные задачи как некоторые задачи теории приближений, немедленно приводят к той непривычной ситуации, что семейство оценивающих элементов должно являться функцией от оцениваемого элемента.

2. Оптимальные решения и их цена

Итак, предметом интервального анализа являются локализационные задачи. Но часто практику может удовлетворить не всякое решение конкретной локализационной задачи, а лишь наилучшее в том или ином смысле. Эта ситуация особенно характерна для задач, в которых интервальная неопределённость изначально присутствует во входных данных и которые не являются "интервализациями" каких-то вещественных задач. В настоящее время в интервальном анализе имеется несколько подходов к определению оптимальности решения, но все они, по существу, единообразны: на множестве всех решений локализационной задачи (или на семействе оценочных множеств) вводится некоторый частичный порядок, а минимальные, наименьшие и наибольшие относительно него элементы объявляются, соответственно, оптимальными, наилучшими и наихудшими решениями данной задачи. Конкретные способы упорядочения множества решений могут быть весьма разнообразными (см., например [22]). Применительно к сформулированному нами общему определению интервальной (локализационной) задачи можно указать следующие конструкции.

Во-первых, упорядочение в семействе оценочных множеств $\mathcal{E}$ может быть индуцировано модальностью задачи $\mathcal{M}$, причем неединственным способом. Пусть $\mathcal{M}^{-\infty}(\cdot)$ — операция взятия прообраза при отношении $\mathcal{M}$. Естественно считать, что

$$a \preceq b, \ \text{если}\ \mathcal{M}^{-\infty}(\dashv) \subseteq \mathcal{M}^{-\infty}(\lfloor),$$

т.е. когда совокупность оцениваемых посредством b множеств решений из $\mathcal{S}$ не ́же совокупности множеств, оцениваемых посредством a. Тривиально проверяется, что введённое таким образом бинарное отношение "$\preceq$" на $\mathcal{E}$ удовлетворяет всем аксиомам порядка. Для многих классов локализационных задач это упорядочение оценочных множеств совпадает с естественным ранжированием интервальных решений по качеству. К примеру, для рассмотренной выше "внешней задачи" для интервальных линейных систем решение $\boldsymbol{V}'$ "лучше" (качественнее) решения $\boldsymbol{V}''$, если $\boldsymbol{V}' \subseteq \boldsymbol{V}''$ в теоретико-множественном смысле. Для линейной задачи о допусках ситуация обратная: решение $\boldsymbol{U}'$ качественнее решения $\boldsymbol{U}''$, если $\boldsymbol{U} \supseteq \boldsymbol{U}''$.

Далее, при некоторых дополнительных условиях на модальность $\mathcal{M}$ рефлексивное отношение $(\mathcal{M}^{-\infty} \circ \mathcal{M})$ на $\mathcal{E}$, где $\circ$ — знак композиции отношений [6], может быть еще антисимметричным и транзитивным, и, следовательно, также служить порядком на $\mathcal{E}$, индуцированным модальностью.

Во-вторых, интервальные решения можно сравнивать по степени их удаленности (в метрике ϱ) от точного множества решений. В-третьих, нередко требуется минимизировать радиус (ширину) или какой-либо другой функционал от решения (независимо от точного решения).

Необходимость и важность разработки алгоритмов, дающих именно оптимальные и наилучшие решения локализационных задач, настойчиво пропагандировалась многими авторами (см., например, [40]). Для обозначения подобных алгоритмов был даже введен специальный термин bound conserving algorithm (немецкий эквивалент — schrankentreue Algorithm , а буквальный русский перевод — "правильно передающий границы алгоритм"), который, учитывая крайнюю смысловую перегруженность эпитета "оптимальный", следует признать не лишенным смысла.

К. Никель в [37] проводит аналогию между bound conserving алгоритмами и устойчивыми алгоритмами классической вычислительной математики, предсказывая, что "в будущем новое свойство "правильной передачи границ" будет играть столь же важную роль в вычислительном интервальном анализе". В оптимистичной работе [41] Е. Нудингом приводится уже довольно внушительный список bound conserving алгоритмов, призванный, видимо, продемонстрировать существующую в интервальном анализе некую мощную тенденцию по непрерывному возникновению эффективных алгоритмов подобного сорта. При этом все упомянутые авторы обходили вопрос о той цене, которую приходится платить за оптимальность результатов. Иначе говоря, каково неизбежное увеличение трудоёмкости алгоритмов, необходимое для получения оптимальных или хотя бы гарантированно близких к оптимальным решений локализационных задач?

Вопросы такого сорта сделались предметом интенсивного исследования лишь недавно, уже в 90-е годы и серьёзные продвижения в этом направлении стали, на наш взгляд, одним из наиболее впечатляющих достижений в интервальной математике последнего десятилетия. По-видимому, большинством из известных к настоящему времени результатов о сложности решения интервальных задач мы обязаны работам трёх исследователей — В. Крейновичу (США), А.В. Лакееву (Россия) и И. Рону (Чехия) [25, 23, 24, 27, 28, 7, 8, 43, 49, 50].

Вывод, к которому приводят результаты Крейновича, Лакеева и Рона малоутешителен и заключается в том, что принятие требования оптимальности решения или же заданной близости получаемого интервального решения к оптимальному в общем случае делает локализационную задачу *труднорешаемой*. Тем самым получено теоретическое объяснение того факта, что за последние тридцать лет (в течение которых интервальный анализ развивался скорее вширь, чем вглубь) достижения в деле создания bound conserving алгоритмов были достаточно скромными. Несмотря на многочисленные плодотворные применения интервальных методов в современной вычислительной математике, алгоритмы для оптимального решения многих локализационных задач либо не найдены, либо по трудоёмкости оказываются не намного лучше полного перебора.

Очевидно, было бы слишком категоричным из вышесказанного делать вывод о невозможности или бесполезности решения на практике локализационных задач в постановках, которые требуют оптимальных ответов. Но несомненно и другое: специфическая форма локализационных задач, формализованная нами в определении из §1, должна быть особо учтена как при выборе алгоритмов, решающих эти "оптимальные" постановки, так и при организации вычислений.

3. Последовательно гарантирующие и финально гарантирующие алгоритмы

Пусть дана труднорешаемая локализационная задача (можно даже отвлечься от требования оптимальности её решения). При сколько-нибудь значительных её размерах типична ситуация, когда количество заведомо необходимых для её решения машинных операций значительно превышает наличные ресурсы вычислительной системы. Это условие столь важно для наших последующих рассуждений, что достойно выделения специальной аббревиатурой

CPA — от английского "Complexity Predominance Assumption"

— "допущение о преобладании сложности" [задачи над возможностями ЭВМ]. В подобной ситуации мы, скорей всего, столкнемся с необходимостью насильственной остановки вычислений (например, из-за истечения срока аренды ЭВМ, либо в силу необходимости получения хоть каких-то результатов в установленный срок и т.п.) и довольствоваться тем, что уже насчитано к моменту остановки. Главная неприятность при таком развитии событий состоит в том, что поспешно выдаваемый интервальный ответ может даже не обладать нужной модальностью, и, следовательно, не является решением поставленной локализационной задачи (т.к. используемый нами алгоритм до конца не доработал). В этом случае затраченное нами машинное время и другие ресурсы фактически пропадут впустую. [1]

Целесообразно поэтому разделить все интервальные алгоритмы на "хорошие" и "плохие" в зависимости от того, обеспечивают ли они требуемую задачей модальность интервального ответа лишь в момент своей естественной остановки, когда прорабатывают "до конца", или же эта модальность имеет место для последовательного ряда эффективно вычисляемых промежуточных результатов, каждый из которых, следовательно, может быть выдан в качестве правильного ответа задачи при прерывании алгоритма в любой момент. При сделанном нами допущении СРА, когда сложность решаемой задачи значительно превышает возможности ЭВМ, именно алгоритмы второго класса более предпочтительны с точки зрения обеспечения гарантированности (правильной модальности) результата вычислений. Далее будем называть такие алгоритмы *последовательно гарантирующими* или же *алгоритмами с последовательной гарантией* (sequentially guaranteeing или with sequential guarantee), в отличие от *финально гарантирующих*, или *алгоритмов с финальной гарантией* (finally guaranteeing или with final guarantee), которые обеспечивают нужную модальность результата лишь по завершении их работы. В известном смысле проведенное нами разделение "интервальных" алгоритмов является аналогом существующего в традиционной вычислительной математике противопоставления "итерационные методы — прямые методы".

При строгом определении понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов можно исходить из того, что по современным представлениям эффективно вычислимыми считаются алгоритмы с полиномиальной верхней оценкой сложности. Таким образом, мы принимаем следующее

Определение. *Алгоритм называется последовательно гарантирующим, если при своём выполнении он порождает последовательность (конечную или бесконечную) полиномиально вычислимых ответов решаемой задачи (т.е. приближённых оценок с требуемой модальностью).*

В частности, алгоритм a priori является последовательно гарантирующим, если он сам имеет полиномиальную сложность выполнения. Конечный результат последовательно гарантирующего алгоритма может быть пределом бесконечной последовательности промежуточных ответов, или последним членом некоторой конечной последовательности, или же ещё чем то иным.

Естественно, что сфера действия введённой нами классификации интервальных алгоритмов не является строго очерченной, поскольку не вполне строг смысл самого понятия труднорешаемости. Несомненную пользу она способна принести и при рассмотрении, например, полиномиально сложных алгоритмов (они не являются "трудными" в традиционном понимании), которые предполагается использовать в ситуации, когда выполнено

[1] Возможный выход из этого положения — не дожидаясь полного исчерпания ресурсов ЭВМ, остановить трудоёмкий алгоритм и попытаться за оставшееся время получить хоть какое-то решение задачи другим, "быстрым" методом. Но мы не будем рассматривать такие вычислительные процессы. Следуя терминологии А.Г. Сухарева [9], можно сказать, что в наших рассуждениях итоговая операция алгоритма остается неизменной.

допущение CPA. Поэтому будет более правильным, хотя и менее строгим, определить последовательно гарантирующие алгоритмы, как противоположность к финально гарантирующим, т.е. к таким, которые обеспечивают правильный ответ задачи лишь при своём естественном завершении.

Впервые понятие последовательно гарантирующего алгоритма было введено С. П. Шарым в работе [56] применительно к алгоритмам для отыскания оптимального решений "внешней задачи" для интервальных алгебраических систем, но основные его положения и выводы, как нетрудно понять, в равной мере применимы к алгоритмам для любых труднорешаемых интервальных (локализационных) задач. Мы, в свою очередь, имея общее понимание того, что является интервальной (локализационной) задачей, смогли корректно распространить концепцию последовательной гарантии на все алгоритмы для решения подобных задач.

Для иллюстрации вышесказанного вновь обратимся, следуя работе [56], к "внешней задаче" для интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, т.е. к задаче нахождения оценок для $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists}\,\}$ снизу и для $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists}\,\}$ сверху, $\nu = 1, 2, \ \ldots, \ n$, по отношению к объединённому множеству решений

$$\Sigma_{\exists\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \Sigma_{\exists\exists} = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists A \in \boldsymbol{A})(\exists\, b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\,\}.$$

На сегодняшний день существуют четыре принципиально различных подхода к вычислению оптимальных (точных) оценок объединённого множества решений для общих интервальных линейных систем. Первый из них восходит к работе У. Оеттли [42], который обнаружил, что пересечение объединённого множества решений с ортантами пространства $\mathbb{R}^n$ является выпуклым полиэдром. Таким образом, точное значение $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists}\,\}$ может быть найдено путём решения в каждом из ортантов некоторой задачи линейного программирования и последующим взятием минимума из результатов. Но этот алгоритм, как нетрудно понять, основывается на пассивной переборной стратегии, а трудоёмкость его экспоненциально растёт в зависимости от размерности n. Поэтому практическая значимость его невелика.

Следующие два вычислительных подхода к оптимальному решению "внешней задачи" для квадратных интервальных линейных систем — это PSS-алгоритмы и PPS-алгоритмы, предложенные С.П. Шарым в [54, 56]. Оба подхода имеют в своей основе стратегию метода "ветвей и границ". Хотя в худшем случае сложность выполнения PSS-алгоритма пропорциональна 2^n, а сложность выполнения PPS-алгоритма может оказаться даже 2^{n^2}, эти алгоритмы являются *адаптивными* в отличие от подхода Оеттли. Иными словами, при исполнении каждого последующего шага в PSS- и PPS-алгоритмах мы полностью используем информацию о ходе и результатах исполнения предыдущих шагов. Алгоритмы подобного типа являются более предпочтительными на практике, поскольку имеют более гибкую вычислительную схему, позволяющую им подстраиваться под конкретную решаемую задачу. В целом PSS-алгоритмы и PPS-алгоритмы выглядят очень перспективными, но в настоящее время они ещё недостаточно тщательно отработаны и реализованы.

Наконец, четвёртый и в настоящий момент наиболее разработанный подход к оптимальному решению "внешней задачи" предложен И. Роном [48] (см. также [35]). Отталкиваясь от характеризации Оеттли-Прагера для объединённого множества решений, он показывает, что для случая квадратной невырожденной матрицы $\boldsymbol{A}$ искомые $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists}\,\}$ и $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists}\,\}$, $\nu = 1, \ 2, \ldots, \ n$, достигаются на множестве не более чем 2^n решений "уравнения Оеттли-Прагера"

$$|\operatorname{mid} \boldsymbol{A} \cdot x - \operatorname{mid} \boldsymbol{b}\,| = \operatorname{rad} \boldsymbol{A} \cdot |x| + \operatorname{rad} \boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

Вычисляя все возможные решения этого уравнения и сравнивая их между собой, мы получим оптимальные оценки множества решений за конечное число шагов. Поскольку процесс определения каждого последующего решения для (2) никак не зависит от решений, уже найденных раньше, алгоритм Рона в целом не является адаптивным (т.е. подобен переборным методикам), в то время как его трудоёмкость пропорциональна 4^n в худшем случае.

Таким образом, все подходы, разработанные к настоящему моменту для вычисления оптимальных решений "внешней задачи" для общих интервальных линейных систем имеют экспоненциальную в наихудшем случае трудоёмкость. Но этот факт не является следствием "ущербности" самих алгоритмов, а отражает глубокие свойства самого объединённого множества решений интервальных линейных систем. Сравнительно недавно было установлено, что даже задача распознавания того, пусто или нет множество $\Sigma_{\exists\exists}$, является NP-полной [7, 8]. Далее, задача вычисления оптимальных покоординатных оценок объединённого множества решений оказалась также NP-трудной [23, 24]. Следовательно, экспоненциальная сложность всех перечисленных выше алгоритмов является существенной и не может быть устранена (при условии $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$) [3].

Каковы же преимущества и недостатки PSS- и PPS-алгоритмов в сравнении с другими подходами для нахождения оптимальных решений "внешней задачи"? Наиболее важная особенность указанных алгоритмов состоит в том, что они порождают последовательность приближенных оценок искомых величин "с нужной стороны", т.е. для $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$ снизу, а для $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$ сверху. Именно такие оценки и требуются в соответствии со смыслом "внешней задачи". Процесс выполнения PSS-алгоритма разбивается, таким образом, на ряд эффективно вычислимых этапов, в результате каждого из которых мы получаем некоторое решение "внешней задачи". После того, как PSS-алгоритма проработал хотя бы один из этих этапов, его прерывание в любой момент приведёт к тому, что мы всё равно будем иметь в своём распоряжении хоть какое-то решение "внешней задачи". Иными словами, если у нас имеются достаточные вычислительные мощности, то, реализуя PSS-алгоритмы (или PPS-алгоритмы) мы можем быть вполне уверены, что некоторый ответ к задаче будет наверняка получен, хотя, возможно, и не оптимальный. Следовательно, как PSS-алгоритмы, так и PPS-алгоритмы являются *последовательно гарантирующими.* Поскольку "внешняя задача" для интервальных линейных систем является труднорешаемой, это свойство радикальным образом выделяет PSS- и PPS-алгоритмы из всех других подходов для вычисления оптимального решения.

Напротив, два других рассмотренных подхода к нахождению оптимальных решений "внешней задачи", имея экспоненциальную в худшем случае трудоёмкость, дают желаемые "внешние" оценки объединённого множества решений лишь в финале, при естественном завершении своей работы, поскольку раньше мы не можем гарантировать то, что вычисленная оценка в действительности $\leq \min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$ (или $\geq \max\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$). Следовательно, эти алгоритмы являются *финально гарантирующими.* Если размерность интервальной линейной системы достаточно велика (всего несколько десятков), то, в силу труднорешаемости "внешней задачи", количество арифметических и логических операций, необходимое для того, чтобы задача была наверняка решена, начинает превышать количество операций, выполнимое на сколь угодно мощном компьютере за любое разумное время (час, день, год или даже столетие). В этих условиях нельзя быть совершенно уверенным, что финально гарантирующий алгоритм, будучи применённым к задаче, вообще завершит свою работу и, следовательно, что будет получено решение поставленной задачи. Иначе говоря, применяя финально гарантирующий алгоритм, мы рискуем совершенно попусту растратить время и деньги без гарантии получения хоть какого-то ответа к нашей задаче.

Этот пессимистичный прогноз особенно справедлив для пассивных переборных алгоритмов, какими являются подходы Оеттли-Прагера и Рона к оптимальному решению "внешней задачи" для интервальных линейных систем. Ситуация была бы более благоприятной, если бы эти алгоритмы являлись адаптивными (последовательными): в этом случае их экспоненциальная трудоёмкость достигалась бы лишь на наихудших вариантах, а в среднем, для большинства типичных задач, алгоритмы работали бы с приемлемыми трудозатратами. Но, к сожалению, это не так.

Итак, финально гарантирующие алгоритмы оказываются малопригодными для практического решения больших труднорешаемых задач, ответ на которые должен удовлетворять некоторым качественным требованиям. Естественный выход из создавшегося затруднения состоит в переконструировании алгоритма таким образом, чтобы он выдавал в процессе своего выполнения, до своего полного естественного завершения, некоторые несложно вычислимые промежуточные результаты, которые могли бы служить более или менее точными ответами к решаемой задаче. Именно это подразумевается определением последовательно гарантирующего алгоритма.

Отметим, что алгоритмы из [42, 38, 48] для нахождения оптимальных решений "внешней задачи" — все-таки последовательно гарантирующие, но относительно "слабой внешней" модальности, описанной в примере (C) выше. Фактически эти алгоритмы решают не "внешнюю", а некоторую другую задачу для интервальной линейной системы, требующую оценивания $\min\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$ сверху и $\max\{\, x_\nu \mid x \in \Sigma_{\exists\exists} \,\}$ снизу, иными словами, когда оценивание должно проводиться *в слабой внешней модальности*.

Другой пример. З. Румпом в цикле работ [51, 52, 53] и др. развит оригинальный подход к решению "внешней задачи" для систем алгебраических уравнений (как линейных, так и нелинейных), в основе которого — базирующийся на теореме Брауэра тест существования объединенного множества решений системы внутри заданного интервального вектора. На основе какого-нибудь приближенного точечного решения системы строится расширяющаяся последовательность интервальных векторов, для каждого из них проверяется тест существования. Итерирование прекращается, если последующий результат оказывается включенным в предыдущий. Поскольку требуемая внешняя интервальная оценка множества решений получается лишь после того, как выполнено условие остановки алгоритма, а до этого момента ничего определённого о промежуточных результатах сказать нельзя, то подход Румпа следует отнести к финально гарантирующим.

Наконец, для интервальной системы линейных уравнений $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ рассмотрим задачу о допусках [4, 34, 35, 20, 55], т.е. задачу о внутреннем интервальном оценивании "допустимого множества решений" (tolerable solution set)

$$\Sigma_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in \boldsymbol{A})(Ax \in \boldsymbol{b}) \,\}.$$

Изложенный в [55] "центровой подход" к её решению является, очевидно, последовательно гарантирующим: отыскание центра интервального решения сводится к максимизации вогнутого функционала и, следовательно, эффективно осуществляется за полиномиальное время, а дальнейшее "раздувание" центра до интервального решения задачи о допусках хотя и выполняется экспоненциально сложными алгоритмами, но все его промежуточные результаты содержатся в множестве решений $\Sigma_{\forall\exists}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

Естественно, что признание какого-либо алгоритма последовательно гарантирующим или же финально гарантирующим не должно восприниматься как "окончательный приговор" для него. Лучше рассматривать наличие последовательной гарантии или её отсутствие лишь как еще одну, дополнительную характеристику этого алгоритма, которая в некоторых случаях позволит более компетентно решить вопрос о его практической применимости. Несомненно, что ценность обладания этим качеством различна для различных алгоритмов и наивысшей она является для наиболее трудоёмких алгоритмов.

Например, в последние годы значительное развитие получил так называемый "алгебраический подход" к решению различных задач внутреннего и внешнего оценивания различных множеств решений интервальных алгебраических систем (см. [26, 57, 58, 59]). Сутью алгебраического подхода является замена исходной задачи интервального оценивания на задачу нахождения решения вспомогательной системы уравнений в евклидовом пространстве двойной размерности. Алгебраический подход является всего лишь финально гарантирующим: искомая интервальная оценка находится лишь по завершении процесса решения вспомогательного операторного уравнения, а это, как недавно было показано А.В. Лакеевым [27, 28], в большинстве случаев NP-трудная (труднорешаемая) задача. Тем не менее при практическом решения с помощью алгебраического подхода различных постановок для интервальных линейных систем $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ с "не слишком широкими" интервальными матрицами субдифференциальный метод Ньютона [57, 60] демонстрирует столь высокую вычислительную эффективность, что даже не вполне ясно, нужно ли в данной ситуации что-либо лучшее.

За время, прошедшее после введения в работе [56] в научный обиход понятий последовательно гарантирующего и финально гарантирующего алгоритмов, выяснилось, что моделируемая ими ситуация не является столь уж экзотичной для современной практической информатики. Эффект преобладания сложности задач над возможностями вычислительных устройств характерен не только для интервального анализа, и впервые с ним столкнулись, по-видимому, специалисты по искусственному интеллекту. Ещё в 1988 году, исследуя большие задачи теории расписаний и планирования, Т. Дин и М. Бодди [17] предложили термин *anytime algorithm* для обозначения алгоритмов, в которых

- ответ доступен в любой момент выполнения алгоритма,
- по мере продолжения выполнения алгоритма качество ответа улучшается.

Как видим, понятие *anytime algorithm* (что можно вольно перевести как *всегда готовый к услугам алгоритм*) в точности соответствует понятию последовательно гарантирующего алгоритма. Таким образом, пальму первенства в осознании и постановке общей проблемы следует отдать исследователям в области искусственного интеллекта. Но термин *anytime algorithm* представляется неудачным в интервальном контексте и, на наш взгляд, заменять им термины "последовательно/финально гарантирующий" нецелесообразно.

4. Монотонные по К. Никелю алгоритмы

К понятию последовательно гарантирующего алгоритма близко понятие *монотонного вычислительного алгоритма*, введённое К. Никелем в связи с потребностями общей теории интервальных алгоритмов, интенсивно разрабатывавшейся им в 70-е годы [36].

Пусть X — метрическое пространство, n, l — натуральные индексы. По К. Никелю, для каждого фиксированного номера $l \in \mathbb{N}$ вычислительный алгоритм — это четвёрка

$$\big(\, x, \{\, x_\nu \}, \{\, \tilde{x}_\nu(l) \}, n(l) \,\big)_l, \tag{3}$$

в которой $x, x_\nu, \tilde{x}_\nu \in \mathbb{R}^n$ и x — искомое точное решение задачи, $\{\, x_\nu \}$ — последовательность приближений к x, порождаемая идеальным алгоритмом (в отсутствие ошибок округления на ЭВМ и пр.), $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x$, $\{\, \tilde{x}_\nu(l) \}$ — реальная возмущённая последовательность приближений к решению, с параметром возмущения l, причём $\lim_{l\to\infty} \tilde{x}_\nu(l) = x_\nu$, $n(l)$ — момент окончания алгоритма — такое натуральное число, что реальным алгоритмом строится лишь конечная последовательность $\{\, x_1(l), x_2(l),\ \ldots,\ x_{n(l)}(l) \}$.

Предположим, что на пространстве X задано некоторое частичное упорядочение "$\preceq$". Алгоритм (3) назовём монотонным (monotonic) [36], если для всех $n, l \in \mathbb{N}$

$$x \preceq x_\nu \quad \text{и} \quad x_\nu \preceq \tilde{x}_\nu(l), \tag{4}$$

и

$$\text{либо}\ \ x_{\nu+1} \preceq x_\nu, \ \ \text{либо}\ \ x_\nu = x. \tag{5}$$

Таким образом, согласно (4), монотонный алгоритм приближает искомое решение всегда "с одной стороны", и с той же "стороны" действуют его возможные возмущения, а условия (5) означают, что невозмущённая последовательность приближений — либо монотонно убывающая, либо достигающая точного результата за конечное число шагов.

Как видим, формальное сходство определений последовательно гарантирующего алгоритма и монотонного алгоритма весьма велико, тем более что в случае, когда порядок на X задаётся модальностью, любой последовательно гарантирующий алгоритм может быть превращён в монотонный взятием на каждом шаге минимума с результатом предыдущей итерации. Тем не менее это различные понятия, каждое из которых имеет самостоятельную ценность и свою "сферу приложимости".

Мотивы, которыми руководствовался К. Никель, выделяя монотонные алгоритмы, не были связаны с алгоритмической сложностью, а диктовались удобством машинной реализации таких алгоритмов и потребностями конструируемой им теории устойчивости и сходимости. Основное отличие монотонного алгоритма от последовательно гарантирующего — отсутствие какой-либо связи между упорядочением пространства X и формулировкой исходной задачи. Иначе говоря, свойство алгоритма быть или не быть монотонным никак не связывается К. Никелем с постановкой решаемой этим алгоритмом локализационной задачи (а само понятие модальности или аналогичное ему вообще не фигурирует в работе [36]). Поэтому монотонный алгоритм может и не быть последовательно гарантирующим, как, например, рассмотренные в §3 переборные методы оптимального решения "внешней задачи" из [42, 48] для интервальных линейных систем: они — монотонные, если для множеств P, Q из $\mathbb{R}^n$ считать $P \preceq Q$ равносильным теоретико-множественному включению $P \subseteq Q$.

Очевидно также, что и свойство быть последовательно гарантирующим не влечет монотонности алгоритма. Следовательно, понятия монотонного алгоритма и последовательно гарантирующего алгоритма являются пересекающимися, но не равнозначными, и потому оба имеют право на самостоятельное существование.

5. Выводы

В заключение столь пространной статьи полезно выделить её основные тезисы, которые бы хотелось зафиксировать в восприятии читателей.

1. Интервальная (локализационная) задача — это упорядоченная четверка $(\mathcal{S}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \varrho)$, в которой

$\mathcal{S}$ — семейство множеств решений,

$\mathcal{E}$ — семейство оценочных множеств, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{S}$,

$\mathcal{M}$ — модальность результата,

ϱ — обобщённая метрика на $\mathcal{S} \times \mathcal{E}$.

Для корректной постановки конкретной интервальной задачи должны быть определены все члены этого кортежа.

2. Принятие в том или ином виде требования оптимальности решения или заданной степени близости искомого интервального решения к оптимальному делает большинство локализационных задач принципиально труднорешаемыми. Таков вывод из недавних результатов В. Крейновича, А. Лакеева и И. Рона.

3. При решении локализационных задач в постановках, так или иначе требующих оптимальности (труднорешаемых локализационных задач), разумный компромисс между условиями гарантированности интервального результата и его получения за практически приемлемое время может быть достигнут применением “последовательно гарантирующих алгоритмов", впервые введенных С. П. Шарым.

4. К понятию последовательно гарантирующего алгоритма близко введённое К. Никелем понятие монотонного вычислительного алгоритма. Тем не менее они неравнозначны, и каждое из них имеет свою “сферу приложимости”.

Список литературы

[1] Алефельд Г., Херцбергер Ю. *Введение в интервальные вычисления.* Мир, М., 1987.

[2] Вощинин А. П., Сотиров Г. Р. *Оптимизация в условиях неопределённости.* МЭИ–Техника, М. — София, 1990.

[3] Гэри М., Джонсон Д. *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* Мир, М., 1982.

[4] Добронец Б. С., Шайдуров В. В. *Двусторонние численные методы.* Наука, Новосибирск, 1990.

[5] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа.* Наука, Новосибирск, 1986.

[6] Курош А. Г. *Лекции по общей алгебре.* Наука, М., 1973.

[7] Лакеев А. В., Носков С. И. Описание множества решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью. *Докл. Академии наук*, **330**, №4, 1993, 430–433.

[8] Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданными оператором и правой частью. *Сиб. матем. журн.*, **35**, 1994, 1074–1084.

[9] Сухарев А. Г. *Минимаксные алгоритмы в задачах численного анализа.* Наука, М., 1989.

[10] *Философский Энциклопедический Словарь.* Сов. Энциклопедия, М., 1983.

[11] Черноусько Ф. Л. *Оценивание фазового состояния динамических систем.* Наука, М., 1988.

[12] Яковлев А. Г. Машинная арифметика мультиинтервалов. *Вопросы кибернетики. Научн. совет по компл. проблеме "Кибернетика"АН СССР*, вып. 125, 1986, 66–81.

[13] Яковлев А. Г. Локусы и локализационные вычисления. В "Интервальная математика: Тез. конф., Саратов, 23–25 мая 1989 г.", Саратов, 1989, 54–56.

[14] Adams E. Enclosure methods and scientific computations. In *"IMACS'1988 Proceedings: 12th World Congress on Scientific Computation"*, July 18–22, 1988, Paris, France, R. Vichnevetsky, P. Borne and J. Vignes, eds., **1**, XVII–XXVI.

[15] Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued Analysis.* Birkhäuser, Boston, 1990.

[16] Beltran M., Castillo G., Kreinovich V. Algorithms that still produce a solution (maybe not optimal) even when interrupted: Shary's idea justified. *Reliable Computing*, **3**, 1997, в печати.

[17] Dean T. L., Boddy M. An analysis of time dependent planning. In *"Proceedings of AAAI-88 Conference"*, St. Paul, 1988, 49–54.

[18] Dobronets B. S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations. *Interval Computations*, **1**, №3, 1992, 6–21.

[19] Filippov A. F. Ellipsoidal estimates for a solution of a system of differential equations. *Ibid*, **2**, №4, 1992, 6–17.

[20] Kelling B., Oelschlägel D. Zur Lösung von linearen Toleranzproblemen. *Wiss. Zeitschrift TH Leuna-Merseburg*, **33**, №1, 1991, 121–131.

[21] Klatte P., Ullrich Ch. Complex sector arithmetic. *Computing*, **24**, 1980, 139–148.

[22] Kolacz H. On the optimality of inclusion algorithms. In *"Interval Mathematics 1985"*, Lecture Notes in Computer Science, **212**, K. Nickel, ed., Springer Verlag, New York, 1986, 67–80.

[23] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Noskov S. I. Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard). *Interval Computations*, **1**, 1993, 6–14.

[24] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Noskov S. I. Approximate linear algebra is intractable. *Linear Algebra Apppl.*, **232**, 1996, 45–54.

[25] Kreinovich V., Lakeyev A. V., Rohn J. Computational complexity of interval algebraic problems: Some are feasible and some are computationally intractable — A survey. In *"Scientific Computing and Validated Numerics"*, G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang, eds., Akademie Verlag, Berlin, 1996, 293–306.

[26] Kupriyanova L. Inner estimation of the united solution set of interval linear algebraic system. *Reliable Computing*, **1**, №1, 1995, 15–31.

[27] Lakeyev A. V. Linear algebraic equation in Kaucher arithmetic. In *"Reliable Computing 1995"*, Supplement, Extended Abstracts of APIC'95: Int. Workshop on Applications of Interval Computations, El Paso, TX, February 23–25, 1995, 130–133.

[28] Lakeyev A. V. On the computational complexity of the solution of linear systems with moduli. *Reliable Computing*, **2**, №2, 1996, 125–131.

[29] Laveuve S. E. Definition einer Kahan-Arithmetic und ihre Implementierung. In *"Interval Mathematics"*, Lecture Notes in Computer Science, **29**, K. Nickel, ed., Springer Verlag, New York, 1975, 236–245.

[30] Moore R. E. *Interval Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1966.

[31] Moore R. E. Bounding sets in function spaces with application to nonlinear operator equations. *SIAM Review*, **20**, 1978, 492–512.

[32] Moore R. E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.

[33] Moore R. E. A survey of interval methods for differential equations. In *"Proceedings of 23rd Conference on Decision and Control"*, Las Vegas, NV, December 1984, 1529–1535.

[34] Neumaier A. Tolerance analysis with interval arithmetic. *Freiburger Intervall*, Berichte, 86/9, 1986, 5–19.

[35] Neumaier A. *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[36] Nickel K. Stability and convergence of monotonic algorithms. *J. Math. Anal. Appl.*, **54**, №1, 1976, 157–172.

[37] Nickel K. Interval-analysis. In *"The State of the Art in Numerical Analisis: Proc. of the Conference on the State of Art in Numerical Analysis"*, Univ. of York, April 12th–15th, 1976, D. Jacobs, ed., Univ. of York, 1977, 193–225.

[38] Nickel K. Die Überschatzung des Wertebereichs einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf linearer Gleichungssystemen. *Computing*, **18**, 1977 15–36.

[39] Nickel K. Using interval methods for the numerical solution of ODE's. *ZAMM*, **66**, №11, 1986, 513–523.

[40] Nuding E. Intervallrechnung und Wirklichkeit. In *"Interval Mathematics"*, Lecture Notes in Computer Science, **29**, K. Nickel, ed., Springer Verlag, Berlin, 1975, 263–269.

[41] Nuding E. Schrankentreue Algorithmen. *Beitrage zur Numerische Mathematik*, **11**, 1983, 115–137.

[42] Oettli W. On the solution set of a linear system with inaccurate coefficiets. *SIAM J. Numer. Anal.*, **2**, 1965, 115–118.

[43] Poljak S., Rohn J. Checking robust nonsingularity is NP-hard. *Math. of Control*, Signals & Systems, **6**, 1993, 99–105.

[44] Petkovic M. S., Mitrovic Z. M., Petkovic L. B. Arithmetic of circular rings. In *"Interval Mathematics 1985"*, Lecture Notes in Computer Science, **212**, K. Nickel, ed., Springer Verlag, New York, 1986, 133–142.

[45] Ratschek H. Optimal approximations in interval analysis. In *"Interval Mathematics 1980"*, K. Nickel, ed., Academic Press, New York, 1980, 181–202.

[46] Ratschek H. *Interval Mathematics*. Contribution to "Enciclopedia of Computer Science and Technology", A.G.Holzman, A. Kent and J.G. Williams, eds., published by Marcel Dekker Inc., New York, in Freiburger Intervall-Berichte, **7**, 1987, 1–44.

[47] Richman P. L. Computing a subinterval of the image. *J. of the ACM*, **21**, 1974, 454–458.

[48] Rohn J. Systems of linear interval equations. *Linear Algebra Appl.*, **126**, 1989, 39–78.

[49] Rohn J. NP-hardness results for linear algebraic problems with interval data. In *"Topics in Validated Computations"*, J. Herzberger, ed., North-Holland, Amsterdam, 1994, 463–471.

[50] Rohn J., Kreinovich V. Computing exact componentwise bounds on solutions of linear system is NP-hard. *SIAM J. Matr. Anal. Appl.*, **16**, 1995, 415–420.

[51] Rump S. M., Kaucher E. Small bounds for the solution of systems of linear equations. *Computing Suppl.*, **2**, 1980, 157–164.

[52] Rump S. M. Solving algebraic problems with hign accuracy. In *"A New Approach to Scientific Computations"*, U. Kulish and W. L. Miranker, eds., Academic Press, New York, 1983, 27–49.

[53] Rump S. M. Solution of linear and nonlinear algebraic problems with sharp guaranteed bounds. *Computing Suppl.*, **5**, 1984, 147–168.

[54] Shary S. P. A new class of algorithms for optimal solution of interval linear systems. *Interval Computations*, **2**, №4, 1992, 11–22.

[55] Shary S. P. Solving the linear interval tolerance problem. *Mathematics and Computers in Simulation*, **39**, 1995, 53–85.

[56] Shary S. P. On optimal solution of interval linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**, 1995, 610–630.

[57] Shary S. P. Algebraic approach to the interval linear static identification, tolerance and control problems, or One more application of Kaucher arithmetic. *Reliable Computing*, **2**, №2, 1996, 3–33.

[58] Shary S. P. A new approach to the analysis of static systems under interval uncertainty. In *"Scientific Computing and Validated Numerics"*, G. Alefeld, A. Frommer and B. Lang, eds., Akademie Verlag, Berlin, 1996, 118–132.

[59] Shary S. P. Algebraic solutions to interval linear equations and their applications. In *"Numerical Methods and Error Bounds"*, G. Alefeld and J. Herzberger, eds., Akademie Verlag, Berlin, 1996, 224–233.

[60] Shary S. P. Algebraic approach in the "outer problem" for interval linear equations. *Reliable Computing*, **3**, №2, 1997, в печати.

[61] Verbitskii V. I., Gorban' A. N., Utyubaev G. Sh., Shokin Yu. I. The Moore effect in interval spaces. *Soviet Math. Dokl.*, **39**, 1989, 8–11.

Поступила в редакцию 12 мая 1996 г.