

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ ВНУТРИ ИЗОГНУТОГО ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА\*†

О. П. ТКАЧЕНКО

*Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия*

Из общих уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости (с учетом сопротивления потоку) и моментной оболочки выведены одномерные уравнения распространения волны давления в потоке жидкости внутри изогнутого подземного трубопровода. На наружной поверхности трубопровода ставились краевые условия типа сухого трения и реакции упругой среды. В выражении для давления в жидкости в явном виде учитывалась кривизна профиля трубопровода.

**Введение.** Подземные и подводные трубопроводы обладают свойством изменять свое положение в грунте (или всплывать к поверхности воды) под влиянием внутреннего потока жидкости. Для диагностики этого явления можно использовать то, что характер распространения волны давления, проходящей сквозь жидкость внутри трубопровода, зависит от степени изгиба его профиля.

Влияние колена на распространение волны давления изучалось в работах [1, 2]. Метод, использованный в [1], был применен при построении математической модели нулевого порядка по кривизне профиля трубопровода в [3], где трубопровод считался безмоментной оболочкой и не учитывалось сопротивление внешней среды.

В данной работе построена одномерная математическая модель распространения волны давления в потоке жидкости внутри трубопровода, который считался моментной оболочкой, находящейся под действием сил трения и давления со стороны окружающего грунта. Слагаемые в уравнениях движения оболочки, описывающие взаимодействие с грунтом, получены при выводе из общих уравнений движения трехмерного упругого тела (см. [4]), который здесь не приводится.

**Постановка задачи.** Пусть дана следующая физическая система: внутри изогнутого подземного трубопровода равномерно течет жидкость (рис. 1). В точке каким-либо образом возбуждаются колебания давления внутри жидкости. Надо найти динамику системы.

Будем считать, что:

1) движение жидкости описывается с достаточной точностью уравнениями для идеальной жидкости с учетом сопротивления потоку;

---

\*© О. П. Ткаченко, 1996.

†Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №93-01-17404.

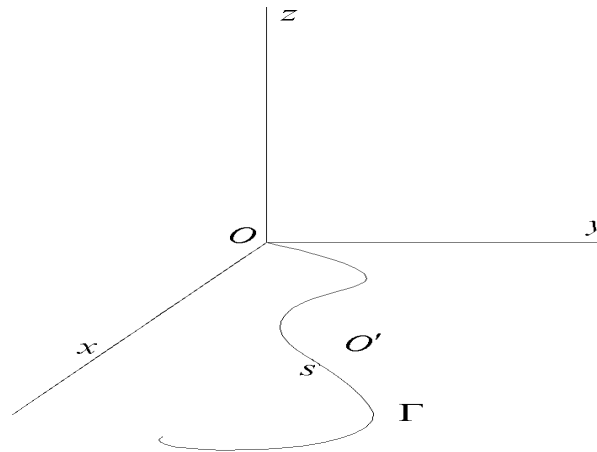


Рис. 1.

2) движение стенки трубопровода подчиняется уравнениям движения моментной оболочки в приближении технической теории [4];

3) влияние грунта можно учесть через наложение краевых условий на наружной стенке трубопровода.

**Геометрия задачи.** Пусть осевая линия трубы  $\Gamma$  является кривой, лежащей в плоскости  $XOY$ . Координатами произвольной точки внутри трубы являются:

1) полярные координаты  $\theta, R$  в плоскости сечения, перпендикулярной  $\Gamma$  (рис. 2);

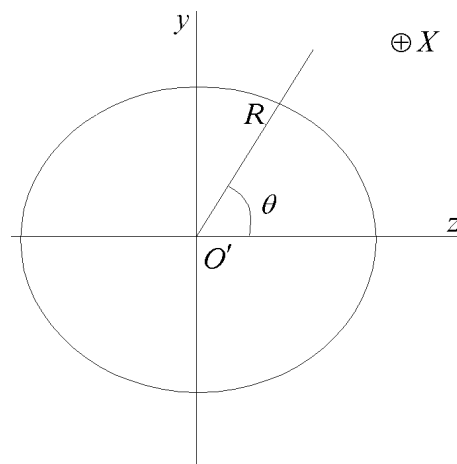


Рис. 2.

2) расстояние  $s$  вдоль осевой  $\Gamma$  от точки  $O$  до начала этой полярной системы координат  $O'$  (см. рис. 1).

Данная система координат ортогональна, поэтому для метрического тензора получим  $g_{11} = \left(1 + \frac{R}{\rho_0(s)} \sin \theta\right)^2$ , где  $\rho_0(s)$  — радиус кривизны  $\Gamma$ ;  $g_{22} = R^2$ ,  $g_{33} = 1$ , остальные компоненты равны нулю.

**Уравнения движения жидкости.** Поток внутри трубы будем описывать уравнениями движения идеальной жидкости с учетом силы сопротивления:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right] = -\text{grad } p - a \vec{v}_0 |\vec{v}_0|,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \vec{v}_0 &= \frac{1}{\Delta \ell} \int_s^{s+\Delta \ell} \vec{v}_0 ds. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{v}_0$  — скорость в стационарном случае:

$$\begin{aligned} \rho_f(\vec{v}_0, \nabla) \vec{v}_0 &= -\operatorname{grad} p_0 - a \vec{v}_0 |\vec{v}_0|, \\ \operatorname{div} \vec{v}_0 &= 0, \end{aligned}$$

$a$  — коэффициент сопротивления стационарному потоку. Вводя представление  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ ,  $p = p_0 + p_1$ ,  $\rho = \rho_f + \rho'$ , линеаризуем уравнения (1) в окрестности стационарного решения. Принимая уравнение состояния в виде  $\rho' = \frac{p_1}{c_f^2}$ , где  $c_f$  — скорость звука, и считая малыми производные по пространству от  $\vec{v}_0$ , а  $\rho_f$  — константой, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}_0, \nabla) \vec{v}' &= -\frac{1}{c_f^2} \operatorname{grad} p_1, \\ \frac{1}{c_f^2} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\vec{v}_0, \operatorname{grad} p_1) \right] + \operatorname{div}(\rho_f \vec{v}') &= 0, \\ v_R \Big|_{R=R_0} &= \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь система уравнений дополнена краевым условием на стенке трубы, в котором  $w$  — радиальное перемещение стенки.

Ниже используются следующие обозначения для параметров:  $p_a$  — атмосферное давление;  $\rho_f$  — плотность жидкости при нормальных условиях;  $c_f$  — скорость звука в жидкости;  $\omega$  — характерная частота процесса;  $\ell$  — характерная длина волны процесса;  $a^2 = p_a / \rho_f c_f^2$  — параметр;  $\varepsilon = \frac{R_0}{\min_{0 < s < l} \rho_0(s)} \ll 1$ , где  $R_0$  — расстояние от оси  $\Gamma$  до срединной поверхности трубы;  $\alpha = R_0 / \ell \ll 1$ .

Переменные и функции обозначаются:  $\vec{v} = \vec{v}' / \omega \ell$  — безразмерная скорость жидкости с компонентами  $v_s, v_\theta, v_r$ ;  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0 / \omega \ell$  — безразмерная скорость стационарного течения жидкости;  $\tau = \omega t$ ,  $\zeta = s / \ell$ ,  $r = R / R_0$  — безразмерные время и координаты;  $w' = w / R_0$  — безразмерная величина радиального смещения стенки трубы;  $p' = p / p_a$  — безразмерная величина давления в жидкости;  $f(\zeta) = \frac{\min_{0 < s < l} \rho_0(\zeta)}{\rho_0(\zeta)}$  — безразмерная функция кривизны оси трубы.

Ограничимся исследованием случая

$$\vec{v}_0 = v_{s0} \vec{e}_s = v_0 \vec{e}_s, \quad v_{\theta 0} = v_{r0} = 0, \quad \operatorname{grad} p_0 = \operatorname{const}.$$

Отсюда следует, что  $v_0 = \operatorname{const}$ .

После преобразования (2) к безразмерному виду разложим решения в ряды Фурье по угловой координате  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}^0 + \varepsilon \vec{v}^1 \sin \theta + \varepsilon \vec{v}^2 \cos \theta + \dots, \\ p' &= p^0 + \varepsilon p^1 \sin \theta + \varepsilon p^2 \cos \theta + \dots \end{aligned}$$

Затем решения систем уравнений для коэффициентов Фурье разложим в степенные ряды по параметру  $\alpha$ :

$$\vec{v}^i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \vec{v}_j^i, \quad \vec{p}^i = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \vec{p}_j^i.$$

Переобозначим:

$$\begin{aligned} \overset{0}{v}_{s0} &= \overset{0}{v}_{s0} + \alpha \overset{0}{v}_{s1}, & \overset{0}{p}_0 &= \overset{0}{p}_0 + \alpha \overset{0}{p}_1, \\ \overset{0}{v}_{r1} &= \overset{0}{v}_{r1} + \alpha \overset{0}{v}_{r2}, & \overset{0}{p}_2 &= \overset{0}{p}_2 + \alpha \overset{0}{p}_3, \\ v_{s1} &= \overset{1}{v}_{s0} + \alpha \overset{1}{v}_{s1}, & p_1 &= \overset{1}{p}_0 + \alpha \overset{1}{p}_1, \\ \overset{2}{v}_{\theta 1} &= \overset{2}{v}_{\theta 1} + \alpha \overset{2}{v}_{\theta 2}, & \overset{1}{v}_{r1} &= \overset{1}{v}_{r1} + \alpha \overset{1}{v}_{r2}, \\ \overset{0}{v}_{s2} &= \overset{0}{v}_{s2} + \alpha \overset{0}{v}_{s3}, & \overset{1}{p}_2 &= \overset{1}{p}_2 + \alpha \overset{1}{p}_3, \\ \overset{1}{v}_{\theta 1} &= \overset{1}{v}_{\theta 1} + \alpha \overset{1}{v}_{\theta 2}, & \overset{2}{v}_{r1} &= \overset{2}{v}_{r1} + \alpha \overset{2}{v}_{r2}, \\ \overset{2}{v}_{s2} &= \overset{2}{v}_{s2} + \alpha \overset{2}{v}_{s3}, & \overset{2}{p}_2 &= \overset{2}{p}_2 + \alpha \overset{2}{p}_3. \end{aligned}$$

Проводя вычисления (см. [3, 5]), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{0}{v}_{s0}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{0}{v}_{s0}}{\partial \zeta} + a^2 \frac{\partial \overset{0}{p}_0}{\partial \zeta} &= 0, \\ a^2 \left( \frac{\partial \overset{0}{p}_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{0}{p}_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial \overset{0}{v}_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \tau} &= 0, \\ \overset{0}{p}_2 &= -\frac{r^2}{2a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right), \\ \overset{0}{v}_{\theta} &= 0, \quad \overset{0}{v}_{s2} = \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta \partial \tau}, \quad \overset{0}{v}_{r1} = r \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial v_{s1}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_{s1}}{\partial \zeta} &= a^2 r f \frac{\partial \overset{0}{p}_0}{\partial \zeta} - r v_0 \left( \overset{0}{v}_{s0} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + f \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial \overset{2}{v}_{\theta 1}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{2}{v}_{\theta 1}}{\partial \zeta} &= -\frac{a^2}{r} \overset{1}{p}_2 + v_0 f \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta \partial \tau}, \\ \frac{\partial \overset{1}{v}_{r1}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{1}{v}_{r1}}{\partial \zeta} &= -\frac{a^2}{r} \frac{\partial \overset{1}{p}_2}{\partial r} + \frac{3}{2} v_0 f r^2 \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta \partial \tau}, \\ \overset{1}{p}_2 &= Cr + r^3 \cdot \frac{1}{8a^2} \left[ F_0(\tau, \zeta) + 3v_0 f \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta \partial \tau} \right], \\ C(\tau, \zeta) &= -\frac{3}{8a^2} \left[ F_0(\tau, \zeta) + 3v_0 f \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta \partial \tau} \right] + \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a^2} \left[ (3/2)v_0 f \frac{\partial^2 \overset{\circ}{w}}{\partial \zeta \partial \tau} - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \overset{1}{w}}{\partial \tau} \right], \\
F_0(\tau, \zeta) = & \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left[ -a^2 v_0 f \frac{\partial \overset{\circ}{p}_0}{\partial \zeta} + f \frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial \tau} - f \frac{\partial \overset{\circ}{v}_{s0}}{\partial \zeta} + \right. \\
& \left. + v_0 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left( f \overset{\circ}{v}_{s0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( a^2 f \frac{\partial \overset{\circ}{p}_0}{\partial \zeta} - v_0 \overset{\circ}{v}_{s0} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) - v_0 \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial \tau}, \\
& \overset{2}{v}_{\theta 0} = \overset{1}{v}_{r0} = 0, \quad \overset{1}{v}_s = v_{s1}, \\
& \overset{2}{p}_0 = \overset{2}{p}_1 = 0, \quad \overset{2}{v}_{r0} = \overset{1}{v}_{\theta 0} = 0, \\
& \overset{2}{v}_{s0} = \overset{2}{v}_{s1} = 0, \\
& \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \overset{2}{v}_{s2} = -a^2 \frac{\partial \overset{2}{p}_2}{\partial \zeta}, \\
& \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \overset{2}{v}_{r1} = -a^2 \frac{\partial \overset{2}{p}_2}{\partial r}, \\
& \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \overset{1}{v}_{\theta 1} = -a^2 \frac{\overset{2}{p}_2}{r}, \\
& \overset{2}{p}_2 = -\frac{r}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \overset{2}{w}}{\partial \tau}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Разрешая системы (3)–(5), для описания движения жидкости получим следующий набор величин:

$$\begin{aligned}
p' = & \overset{\circ}{p}_0 - \frac{\alpha^2 r^2}{2a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial \zeta} \right) + \\
& + \varepsilon \left( \frac{r}{a^2} v_0 f \overset{\circ}{v}_{s0} + \alpha^2 \overset{1}{p}_2 \right) \sin \theta - \varepsilon \alpha^2 \frac{r}{a^2} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \overset{2}{w}}{\partial \tau} \cos \theta, \\
v_s = & \overset{\circ}{v}_{s0} + \alpha^2 \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \overset{\circ}{w}}{\partial \zeta \partial \tau} + \varepsilon v_{s1} \sin \theta + \varepsilon \alpha^2 \overset{2}{v}_{s2} \cos \theta, \\
v_\theta = & \varepsilon \alpha \overset{1}{v}_{\theta 1} \sin \theta + \varepsilon \alpha \overset{2}{v}_{\theta 1} \cos \theta, \\
v_r = & \alpha r \frac{\partial \overset{\circ}{w}}{\partial \tau} + \varepsilon \alpha \overset{1}{v}_{r1} \sin \theta + \varepsilon \alpha \overset{2}{v}_{r1} \cos \theta.
\end{aligned}$$

**Уравнения движения трубопровода.** В уравнения движения жидкости входят величины  $\overset{\circ}{w}$ ,  $\overset{1}{w}$ ,  $\overset{2}{w}$ , которые являются характеристиками радиального смещения стенки трубопровода. Следуя [4], для описания движения трубопровода в данной системе координат из общих уравнений движения трехмерного упругого тела были получены уравнения технической моментной теории оболочек.

Для заданных поверхности и системы координат они имеют вид

$$\frac{\alpha}{A} \frac{\partial I}{\partial \zeta} - (1 - \nu) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \theta} + \frac{(1 - \nu)}{A} \left( \varepsilon f u' \sin \theta - \alpha \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1-\nu^2}{Eh^*}(X - k_1 m_\beta), \\
\frac{\partial I}{\partial \theta} + (1-\nu)\frac{\alpha}{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \zeta} + (1-\nu)\frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\left(v' - \frac{\partial w'}{\partial \theta}\right) &= \\
&= -\frac{1-\nu^2}{Eh^*}(Y + k_2 m_\alpha), \\
-\left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)I + \frac{1-\nu}{A}\left[2\varepsilon f w' \sin\theta + \alpha\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \varepsilon f\frac{\partial}{\partial \theta}(v' \sin\theta)\right] - \\
-\frac{h^{*2}}{12}\nabla^2 w' - \frac{h^{*2}}{12}\nabla^2 \nabla^2 w' &= -\frac{1-\nu^2}{Eh^*}\left\{Z + \frac{1}{R_0 A}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A m_\alpha) - \alpha\frac{\partial m_\beta}{\partial \zeta}\right]\right\}, \\
I &= \frac{1}{A}\left(\alpha\frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \varepsilon v' f \cos\theta\right) + \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)w', \\
\mathcal{X} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A}\left(\alpha\frac{\partial v'}{\partial \zeta} - \varepsilon f u' \cos\theta\right) - \frac{\partial u'}{\partial \theta}\right], \\
A &= 1 + \frac{R_0}{\rho_0(s)}\sin\theta, \\
\frac{1}{h^*}(X - k_1 m_\beta) &= -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} + \frac{h^{*2}}{12}\left(1 + 2\frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\frac{\alpha}{A}\rho_t R_0^2 \omega^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} - \\
&\quad - \frac{p_a}{h^*}\left[1 + h^*\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\right]k\omega R_0 p_e \frac{\partial}{\partial \tau}\left(u' - \frac{h^* \alpha}{2A}\frac{\partial w'}{\partial \zeta}\right), \\
\frac{1}{h^*}(Y + k_2 m_\alpha) &= -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} + \frac{h^{*2}}{12}\left(2 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\rho_t R_0^2 \omega^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \\
&\quad - \frac{p_a}{h^*}\left[1 + h^*\left(1 + \frac{\varepsilon f}{2A}\sin\theta\right)\right]k p_e \omega R_0 \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\left(1 + \frac{h^*}{2}\right)v' - \frac{h^*}{2}\frac{\partial w'}{\partial \theta}\right], \\
\frac{1}{h^*}\left(Z + \frac{1}{R_0 A}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A m_\alpha) - \alpha\frac{\partial m_\beta}{\partial \zeta}\right]\right) &= -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \tau^2} + \\
+ \frac{p_a}{h^*}\left[\left(1 - \frac{h^*}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\right)p' - \left(1 + \frac{h^*}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\right)\left(p_e + \frac{\mathcal{K}}{p_a}w'\right)\right] - \\
- \frac{1}{2}k\omega R_0 p_a \left\{\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[A\left(1 + \frac{h^*}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\right)p_e \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(1 + \frac{h^*}{2}\right)v' - \frac{h^*}{2}\frac{\partial w'}{\partial \theta}\right)\right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\alpha}{A}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\left(1 + \frac{h^*}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon f}{A}\sin\theta\right)\right)p_e \frac{\partial}{\partial \tau}\left(u' - \frac{h^* \alpha}{2A}\frac{\partial w'}{\partial \zeta}\right)\right]\right\} - \\
- \frac{h^{*2}}{12}\frac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{A}\left[\varepsilon f \cos\theta\left(3\frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \theta}\right) + (2A + \varepsilon f \sin\theta)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \right. \\
&\quad \left. - A\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} + \frac{\alpha}{A}\left\{(A + 2\varepsilon f \sin\theta)\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial u'}{\partial \zeta} - \alpha\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta^2} + \right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon \frac{\sin \theta}{A} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \left( 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \Bigg\} \Bigg].$$

Здесь используются следующие обозначения для параметров:  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $E$  — модуль Юнга,  $h^* = h/R_0$ , где  $h$  — толщина стенки трубы,  $k$  — коэффициент трения стенки трубопровода о грунт,  $\mathcal{K}$  — модуль упругости грунта,  $\rho_t$  — плотность материала трубы; для переменных:  $u' = u/R_0$ ,  $v' = v/R_0$ ,  $w' = w/R_0$  — безразмерные перемещения срединной поверхности трубы вдоль осей  $s$ ,  $\theta$ ,  $r$  соответственно,  $p_e$  — нормальное давление грунта на стенку,  $p'$  — давление жидкости на стенку,  $\nabla^2 w' = \frac{\alpha^2}{A} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( A \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right)$  — оператор Лапласа для оболочки [4].

Разложим  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  в ряды Фурье:

$$u' = \overset{0}{u} + \varepsilon \overset{1}{u} \sin \theta + \varepsilon^2 \overset{2}{u} \cos \theta + \dots,$$

$$v' = \overset{0}{v} + \varepsilon \overset{1}{v} \sin \theta + \varepsilon^2 \overset{2}{v} \cos \theta + \dots,$$

$$w' = \overset{0}{w} + \varepsilon \overset{1}{w} \sin \theta + \varepsilon^2 \overset{2}{w} \cos \theta + \dots$$

Для коэффициентов Фурье после пренебрежения слагаемыми порядка  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon h^{*2}$  получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{\partial^2 \overset{0}{u}}{\partial \zeta^2} + \nu \alpha \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} &= \frac{1 - \nu^2}{E} \left[ \rho_t R_0^2 \omega^2 \left( \frac{\partial^2 \overset{0}{u}}{\partial \tau^2} - \frac{h^{*2}}{12} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) + \right. \\ &+ \frac{1}{h^*} (1 + h^*/2) p_a k \omega R_0 \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \Bigg], \\ - \overset{0}{w} - \nu \alpha \frac{\partial \overset{0}{u}}{\partial \zeta} - \frac{h^{*2}}{12} \left( \alpha^2 \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 \overset{0}{w}}{\partial \zeta^4} \right) &= \\ = \frac{1 - \nu^2}{E} \left\{ \rho_t R_0^2 \omega^2 \left[ \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \tau^2} + \frac{h^{*2}}{12} \alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\partial \overset{0}{u}}{\partial \zeta} - \alpha \frac{\partial^2 \overset{0}{w}}{\partial \zeta^2} \right) \right] - \right. \\ &- \frac{p_a}{h^*} \left[ \left( 1 - \frac{h^*}{2} \right) \overset{0}{p} - \left( 1 + \frac{h^*}{2} \right) \left( \overset{0}{p}_e + \frac{\mathcal{K}}{p_a} \overset{0}{w} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{h^*}{2} \right) k \omega R_0 \alpha p_a \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] \Bigg\}; \tag{6} \\ \alpha \frac{\partial \overset{1}{I}}{\partial \zeta} - f \alpha^2 \frac{\partial^2 \overset{0}{u}}{\partial \zeta^2} - \nu \alpha f \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} + (1 - \nu) \overset{2}{X} + (1 - \nu) \left( f \overset{0}{u} - \alpha \frac{\partial \overset{1}{w}}{\partial \zeta} \right) &= \\ &= - \frac{1 - \nu^2}{E} \overset{1}{X}, \\ \overset{1}{I} + (1 - \nu) \alpha \frac{\partial \overset{2}{X}}{\partial \zeta} &= - \frac{1 - \nu^2}{E} \overset{2}{Y}, \end{aligned}$$

$$- {}^1 I - f \alpha \frac{\partial {}^0 \dot{u}}{\partial \zeta} - f \dot{w} + (1 - \nu) \left( 2f \dot{w} + \alpha \frac{\partial \dot{u}}{\partial \zeta} - f \alpha \frac{\partial {}^0 \dot{u}}{\partial \zeta} \right) = - \frac{1 - \nu^2}{E} {}^1 Z; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial {}^2 I}{\partial \zeta} - (1 - \nu) \alpha \frac{\partial {}^2 \dot{w}}{\partial \zeta} - (1 - \nu) \dot{\mathcal{X}} &= - \frac{1 - \nu^2}{E} {}^2 X, \\ - {}^2 I + (1 - \nu) \alpha \frac{\partial \dot{\mathcal{X}}}{\partial \zeta} &= - \frac{1 - \nu^2}{E} {}^1 Y, \\ - {}^2 I + (1 - \nu) \alpha \frac{\partial {}^2 \dot{u}}{\partial \zeta} &= - \frac{1 - \nu^2}{E} {}^2 Z. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} {}^1 I &= \alpha \frac{\partial \dot{u}}{\partial \zeta} - \alpha f \frac{\partial {}^0 \dot{u}}{\partial \zeta} - \dot{v} + f \dot{w} + \dot{w}, \\ {}^2 I &= \alpha \frac{\partial \dot{u}}{\partial \zeta} + \dot{v} + \dot{w}, \\ \dot{\mathcal{X}} &= \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{\partial \dot{v}}{\partial \zeta} + \dot{u} \right), \\ \dot{\mathcal{X}} &= \frac{1}{2} \left( \alpha \frac{\partial \dot{v}}{\partial \zeta} - f \dot{u} - \dot{u} \right), \\ {}^1 \dot{X} &= - \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \tau^2} - \frac{1}{h^*} (1 + h^*/2) p_a k \omega R_0 \left\{ \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \dot{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \left( \frac{\partial \dot{w}}{\partial \zeta} - f \frac{\partial {}^0 \dot{w}}{\partial \zeta} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \dot{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \zeta} \right) \right\} - p_a k \omega R_0 f \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \dot{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \zeta} \right), \\ {}^2 \dot{X} &= - \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial \tau^2} - \frac{1}{h^*} (1 + h^*/2) p_a k \omega R_0 \left[ \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \dot{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \zeta} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \dot{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \zeta} \right) \right], \\ {}^1 \dot{Y} &= - \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial \tau^2} - \frac{1 + h^*}{h^*} p_a k \omega R_0 \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (1 + h^*/2) \dot{v} + \frac{h^*}{2} \dot{w} \right], \\ {}^2 \dot{Y} &= - \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \dot{v}}{\partial \tau^2} - \frac{1 + h^*}{h^*} p_a k \omega R_0 \dot{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (1 + h^*/2) \dot{v} - \frac{h^*}{2} \dot{w} \right], \\ {}^1 \dot{Z} &= - \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \tau^2} + \frac{p_a}{h^*} \left[ \left( 1 - \frac{h^*}{2} \right) \dot{p} - \left( 1 + \frac{h^*}{2} \right) \left( \dot{p}_e + \frac{\mathcal{K}}{p_a} \dot{w} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{h^*}{2} f \left( \dot{p} + \dot{p}_e + \frac{\mathcal{K}}{p_a} \dot{w} \right) \right] - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(1+h^*/2)k\omega R_0 p_a \left\{ -\overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (1+h^*/2) \overset{2}{v} - \frac{h^*}{2} \overset{1}{w} \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{1}{u} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{1}{w}}{\partial \zeta} + \frac{h^* \alpha}{2} f \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{1}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] - \right. \\
& \quad \left. - \alpha f \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right\}, \\
& \overset{2}{Z} = -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 \overset{2}{w}}{\partial \tau^2} + \frac{p_a}{h^*} \left[ \left( 1 - \frac{h^*}{2} \right) \overset{2}{p} - \left( 1 + \frac{h^*}{2} \right) \left( \overset{2}{p}_e + \frac{\mathcal{K}}{p_a} \overset{2}{w} \right) \right] - \\
& -\frac{1}{2}(1+h^*/2)k\omega R_0 p_a \left\{ \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ (1+h^*/2) \overset{1}{v} + \frac{h^*}{2} \overset{2}{w} \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{0}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{2}{u} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{2}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] + \alpha \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \overset{2}{p}_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \overset{0}{u} - \frac{h^* \alpha}{2} \frac{\partial \overset{0}{w}}{\partial \zeta} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь мы ограничились рассмотрением только таких задач, в которых  $\overset{0}{v} = 0$ . Этого можно добиться выбором соответствующих краевых и начальных условий.

**Заключение** Системы уравнений (3)–(5), (6)–(8) представляют собой замкнутую математическую модель совместного движения жидкости и трубопровода при условии малости деформаций стенки трубы. Это — одномерные гиперболические системы уравнений, каждая из которых распадается на три независимые подсистемы, что значительно упрощает их решение. Более того, решения систем (4), (5) могут быть явно выражены через решения системы (3) и величины  $\overset{0}{w}$ ,  $\overset{1}{w}$ ,  $\overset{2}{w}$ . Уравнения построенной математической модели могут быть численно решены на ПК. Они позволяют проанализировать влияние степени изгиба профиля трубопровода на характер распространения волны давления внутри потока жидкости.

## Список литературы

- [1] WALKER J. S., PHILLIPS J. W. Pulse propagation in fluid-filled tubes. *J. of Appl. Mech.*, March, 1977, 31–35.
- [2] WIGGERT D. C., OTWELL R. S., HATFIELD F. J. The effect of elbow restraint of pressure transients. *J. of Fluids Eng.*, **107**, 1985, 402–406.
- [3] ТКАЧЕНКО О. П. Построение математической модели распространения гидроупругих колебаний в длинной изогнутой трубе. В “*Вычислительные технологии*”, ИВТ СО РАН, Новосибирск, №6, 1993, 112–122.
- [4] ВЛАСОВ В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. В “*Избранные труды*”, **1**, Изд-во АН СССР, М., 1962, 15–439.
- [5] ТКАЧЕНКО О. П. К теории распространения волн давления в длинной изогнутой трубе. В “*Методы численного анализа*”, Дальнаука, Владивосток, 1993, 91–112.

Поступила в редакцию 15 сентября 1995 г.