

## Математическое моделирование турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом

А. Г. ДЕМЕНКОВ<sup>1,2</sup>, Г. Г. ЧЕРНЫХ<sup>3,4,\*</sup>

<sup>1</sup>Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, Россия

<sup>3</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>4</sup>Новосибирский государственный университет, Россия

\*Контактный e-mail: [chernykh@ict.nsc.ru](mailto:chernykh@ict.nsc.ru)

С применением модифицированной  $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности выполнено численное моделирование динамики плоских и осесимметричных турбулентных следов с варьируемым суммарным избыточным импульсом в однородной жидкости. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными. Осуществлено численное моделирование асимптотического вырождения осесимметричных турбулентных следов с нулевым и малым ненулевым суммарным избыточным импульсом.

*Ключевые слова:* плоские и осесимметричные турбулентные следы с варьируемым суммарным избыточным импульсом, численное моделирование, асимптотическое вырождение осесимметричных турбулентных следов.

### Введение

Плоские и (или) осесимметричные турбулентные следы рассматривались в большом числе экспериментальных, теоретических и вычислительных работ. Отметим лишь немногие [1–39]. В них можно найти обзоры и более подробную библиографию. Мы упомянем лишь некоторые из недавно опубликованных работ.

В [27] осуществлено численное моделирование дальнего турбулентного безимпульсного следа за телом вращения в пассивно стратифицированной среде. Применена иерархия математических моделей второго порядка, включающая модели с нелинейной аппроксимацией корреляций с пульсациями давления в уравнениях переноса моментов второго порядка. Проанализировано асимптотическое вырождение безимпульсных турбулентных следов. Дополнительно к математическим моделям второго порядка к описанию течения в осесимметричном безимпульсном следе привлечены модели третьего порядка [29], применение которых позволило более детально описать экспериментальные данные [15], являющиеся наиболее полными из известных. Как и в работе [27], здесь обсуждается вопрос об асимптотическом вырождении следа. Работа [28] в основном посвящена численному моделированию закрученных безимпульсных турбулентных следов. В качестве примера рассмотрен безимпульсный незакрученный турбулентный след. Применена полуэмпирическая модель, включающая уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений и скорости диссипации  $\varepsilon$ . Результаты расчетов

широкого класса задач сопоставляются с известными результатами расчетов других авторов и экспериментальными данными. Дана оценка границ применимости численной модели.

В [30, 33] выполнен теоретико-групповой анализ двух полуэмпирических моделей плоского и осесимметричного дальних турбулентных следов. Построены автомодельные решения и проведено сопоставление с известными экспериментальными данными. Рассмотрено автомодельное вырождение плоского турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде. Изучена автомодельность течения в дальнем следе за нагретым цилиндром. Исследования продолжены в [36, 39]. Рассмотрены математические модели дальнего турбулентного следа за буксируемым [36] и самодвижущимся [39] телами вращения в пассивно стратифицированной среде, основанные на двухпараметрической  $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности. Выполнен теоретико-групповой анализ этих моделей. Исследовано автомодельное вырождение дальних следов. С помощью метода В-определяющих уравнений осуществлена редукция моделей к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевая задача для этой системы решалась численно с применением модифицированного метода стрельбы и асимптотического разложения решения в окрестности особой точки. Построенные решения хорошо согласуются с решением, полученным непосредственным численным интегрированием дифференциальных уравнений математических моделей на больших расстояниях от тела.

Асимптотический и численный анализ эволюции плоских и осесимметричных безымпультных турбулентных следов, основанный на применении полуэмпирической модели турбулентности второго порядка, выполнен в [34]. Автомодельные решения получены аналитически, а процесс перехода к автомодельности изучен численно. Проведено сопоставление с известными экспериментальными данными.

В [35, 37] приведен подробный анализ исследований по турбулентным следам в однородной и стратифицированной жидкости. В [35] на основе подхода DNS рассмотрена динамика турбулентных следов с малым и умеренным суммарным избыточным импульсом. Представлены результаты расчетов, демонстрирующие неприменимость гипотезы постоянной турбулентной вязкости к расчету турбулентных следов за самодвижущимися телами. В [37] приведены результаты расчетов динамики безымпультного следа в однородной жидкости на основе двухпараметрической  $e \sim \varepsilon$ -модели турбулентности. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [1].

Роль малого суммарного избыточного импульса в развитии следа за самодвижущимся телом обсуждается в [4, 8, 12, 18, 24, 31, 32, 35]. Турбулентные следы с умеренным суммарным избыточным импульсом рассматривались в [8, 18, 24, 35].

В [40, 41] получены основанные на анализе уравнений Навье — Стокса оценки асимптотического убывания возмущений гидродинамических величин на больших расстояниях от самодвижущегося тела. Показано, что безымпультное обтекание тел характеризуется существенно более быстрым убыванием поля скорости на большом удалении от тела в сравнении с классическим обтеканием. Результаты этих работ чрезвычайно важны для проведения численного анализа асимптотического вырождения безымпультных осесимметричных турбулентных следов.

Анализируя известные работы по численному моделированию плоских и осесимметричных турбулентных следов, можно сделать вывод о том, что основанные на полуэмпирических моделях турбулентности численные модели турбулентных следов недостаточно полны. Следы являются ярким примером струйных турбулентных течений с ва-

рыруемым значением суммарного избыточного импульса. Турбулентные следы характеризуются также значительным варьированием отношения  $P/\varepsilon$ , где  $P$  — порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного движения,  $\varepsilon$  — скорость диссипации энергии турбулентности в тепло. В безимпульсных турбулентных следах [15] уже на расстояниях порядка десяти диаметров тела это отношение достаточно мало. В турбулентных следах за буксируемыми удлиненными телами вращения в значительной части области поперечного сечения следа отношение  $P/\varepsilon$  близко к единице. В настоящей работе с применением модифицированной  $e \sim \varepsilon$ -модели Роди [3] осуществлено исследование ряда турбулентных следов с варьруемым суммарным избыточным импульсом. Результаты расчетов согласуются с известными экспериментальными данными. Выполнено численное моделирование заключительной стадии вырождения осесимметричных турбулентных следов с нулевым и малым ненулевым суммарным избыточным импульсом. Работа является развитием и продолжением [24, 38].

## 1. Постановка задачи

Для описания течения в турбулентных следах привлекается система осредненных уравнений гидродинамики в приближении тонкого сдвигового вязкого слоя [2]:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle) + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} y^j \nu \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} y^j \langle u'v' \rangle; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} y^j V = 0. \quad (2)$$

Здесь  $U$ ,  $V$  — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости осредненного движения; значения  $j = 0, 1$  соответствуют плоскому и осесимметричному течениям; штрихами обозначены пульсационные составляющие;  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle u'v' \rangle$  — компоненты тензора рейнольдсовых напряжений;  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости;  $\langle \rangle$  — знак осреднения. Система координат устроена так, что ось  $x$  направлена вниз по течению и совпадает с осью симметрии тела, начало координат находится на задней кромке тела.

Система уравнений (1), (2) незамкнута; одной из рассмотренных в настоящей работе моделей является модифицированная  $e \sim \varepsilon$ -модель турбулентности [3] (модель 1), в которой используются аппроксимации:

$$-\langle u'v' \rangle = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle = 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P, \quad \langle u'^2 \rangle = \frac{2}{3}e + \frac{4}{3}\Phi \frac{e}{\varepsilon} P, \quad (3)$$

где

$$\nu_t = \frac{2}{3}\Phi \left(1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon}\right) \frac{e^2}{\varepsilon}; \quad P = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2; \quad \Phi = \frac{1 - c_2}{c_1 - 1 + \frac{P}{\varepsilon}}$$

$c_1$ ,  $c_2$  — эмпирические постоянные.

В дополнение к (1)–(3) привлекаются уравнения трансформации энергии турбулентности  $e$  и скорости диссипации  $\varepsilon$ :

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^j (\nu_t + \nu) \frac{\partial e}{\partial y} \right] + P - \varepsilon; \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^j \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\varepsilon}{e} (c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (5)$$

Здесь  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ ,  $\sigma_\varepsilon$  — эмпирические постоянные.

Переменные задачи могут быть обезразмерены с использованием характерных масштабов скорости  $U_0$  и длины  $D$  ( $D$  — диаметр тела,  $U_0$  — скорость невозмущенного потока). В дальнейшем, по возможности, у обезразмеренных величин будут оставлены те же обозначения, что и у исходных. Переменная  $x$  играет роль времени; при  $x = x_0$  задаются начальные распределения  $U$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ . При  $y = 0$  ставятся условия симметрии (в настоящей работе рассматриваются именно такие течения). В качестве граничных условий при  $y \rightarrow \infty$  задаются значения  $U$ ,  $e$ ,  $\varepsilon$ , согласующиеся с физическими соображениями об условиях невозмущенного потока и экспериментальными данными. Значения эмпирических постоянных следующие:  $c_1 = 2.2$ ,  $c_2 = 0.55$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ . Они являются в достаточной мере общепринятыми.

Наряду с приведенной выше математической моделью (1)–(5) в работе рассматривался также аналог модифицированной  $e - \varepsilon$ -модели, учитывающей существенное варьирование турбулентного числа Рейнольдса  $Re_\lambda = \sqrt{2e}\lambda/\nu$  в процессе вырождения турбулентного течения (модель 2). Здесь  $\lambda = \sqrt{10e\nu/\varepsilon}$  — тейлоровский микромасштаб течения. За основу была взята модель рейнольдсовых напряжений [13]. В результате применения аппроксимации [3] к уравнениям переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений [13] в соотношениях и уравнениях (1)–(5) роль эмпирических постоянных  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$  будут играть функции

$$c'_1 = c_1(1 - d_u), \quad c'_2 = c_2(1 - d_u), \quad c'_{\varepsilon 1} = c_{\varepsilon 1}(1 - d_u) + 1.225 d_u, \quad c'_{\varepsilon 2} = c_{\varepsilon 2} - 0.52 d_u,$$

$$d_u = \frac{2800}{(Re_\lambda + \sqrt{Re_\lambda^2 + 2800})^2}. \quad (6)$$

Модельные соотношения (6) заимствованы авторами из работы [13]. Они устроены так, что на заключительной вязкой стадии вырождения однородной изотропной турбулентности, соответствующей  $Re_\lambda \ll 1$ , величина энергии турбулентности  $e(x, 0)$  в соответствии с известной асимптотикой Миллионщикова — Лойцянского будет убывать как  $x^{-5/2}$  ( $e(x, 0) \sim x^{-5/2}$ ). Значения части эмпирических постоянных в соотношениях (6) в сравнении с их значениями в [13] изменены так, что при  $Re_\lambda \gg 1$  функции  $c'_1$ ,  $c'_2$ ,  $c'_{\varepsilon 1}$ ,  $c'_{\varepsilon 2}$  становятся близкими к постоянным  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_{\varepsilon 1}$ ,  $c_{\varepsilon 2}$ . В частности, величина  $c_{\varepsilon 2}$  в [13] полагалась равной  $11/6$ ; в настоящей работе авторы использовали стандартное значение  $c'_{\varepsilon 2} = 1.92$  в целях согласования со стандартным значением при  $Re_\lambda \gg 1$ . Сами модифицированные уравнения (1)–(5) будут иметь аналогичный вид.

Численный алгоритм решения задачи основан на введении функции тока и подвижных сеток. Закон сохранения (его сеточный аналог) суммарного избыточного импульса

$$2\pi^j \rho_0 \int_0^\infty y^j \left( UU_1 - 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right) dy = F_0; \quad U_1 = U_0 - U \quad (7)$$

является следствием консервативной аппроксимации (1). Подробное изложение алгоритма и его детальное тестирование представлены в [24, 38].

Все расчеты выполнялись на последовательности сеток, параметры которых выбирались так, что их измельчение в два раза не приводило к отклонению более 1% в равномерной норме.

## 2. Результаты расчетов плоских турбулентных следов

Некоторые результаты численного моделирования плоских безымпультных турбулентных следов представлены на рис. 1–3. Начальные данные для величин  $U, e, \varepsilon$  при  $x_0 = 15D$  задавались в соответствии с экспериментальными данными [19]. Рассчитанный на основе модели 1 для  $x/D = 75$  нормализованный профиль дефекта продольной компоненты скорости  $U_1 = U_0 - U$ ,  $U_{10} = U_1(x, 0)$  сопоставляется с результатами лабораторных экспериментов [19] на рис. 1, где сплошной линией изображен рассчитанный профиль. Согласие достаточно хорошее. На рис. 2 рассчитанный нормализованный

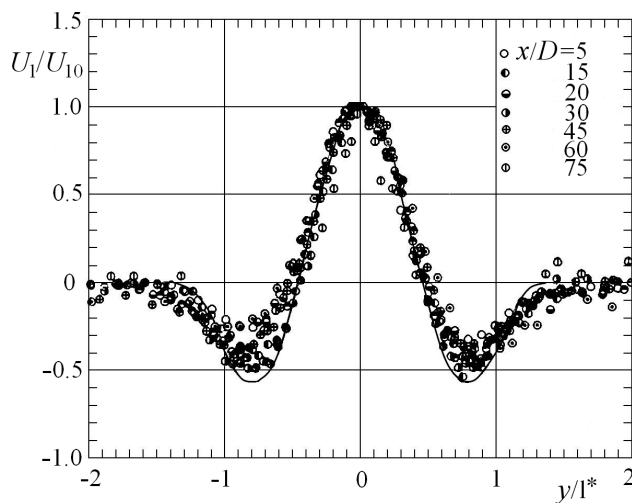


Рис. 1. Нормализованные экспериментальные [19] (безымпультный плоский след) и рассчитанный профили дефекта продольной компоненты скорости  $U_1$ . Точки — эксперимент

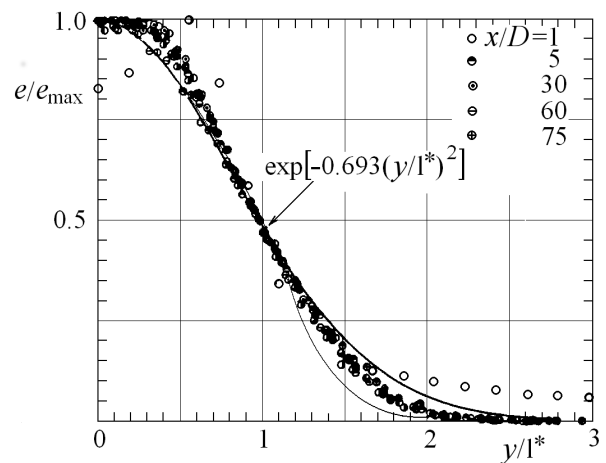


Рис. 2. Нормализованные экспериментальные [19] и рассчитанный профили энергии турбулентности  $e$ ;  $l^* : e(x, l^*) = 0.5e(x, 0)$ . Точки — эксперимент

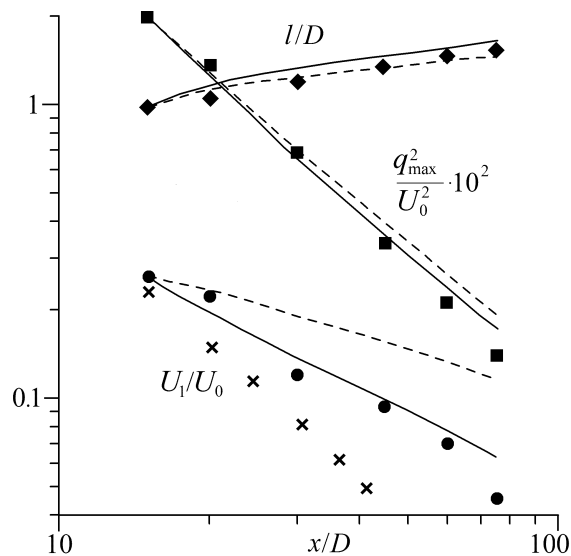


Рис. 3. Осевые значения дефекта скорости  $U_1$ , энергии турбулентности  $q^2 = e$  и вертикальный размер  $l$ :  $\diamond, \blacksquare, \bullet$  — эксперименты [19]; сплошные линии — расчеты авторов по модели 1; пунктирные линии — по классической  $e \sim \varepsilon$ -модели;  $\times$  — расчеты [22]

профиль энергии турбулентности (нижняя сплошная линия) сопоставляется с экспериментальными данными.

Поведение осевых значений дефекта скорости  $U_1$ , энергии турбулентности  $q^2 = e$  и вертикального размера следа  $l(x) : e(x, l) = e(x, 0)/4$  в зависимости от расстояния  $x/D$  представлено сплошными линиями на рис. 3. Пунктирные линии — результаты расчетов авторов на основе классической  $e \sim \varepsilon$ -модели [3].

Численная модель с применением математической модели 1 дает удовлетворительное согласие с экспериментальными данными. Следует отметить, что численное моделирование плоского турбулентного следа в условиях данных лабораторных экспериментов [19] осуществлено также в работе [22]. Авторы этой работы использовали  $e \sim \varepsilon \sim \gamma$ -модель турбулентности ( $\gamma$  — коэффициент перемежаемости). Результаты рассчитанных ими осевых значений  $U_1$  и  $e$  значительно хуже согласуются с экспериментальными данными, чем настоящие расчеты по модели 1. Однако, возможно, последнее обусловлено существенно большей общностью постановки задачи. В [22] моделировалась не только динамика собственно турбулентного следа, но и задача обтекания.

На больших расстояниях от тела течение в плоском безимпульсном следе характеризуется законами автомодельного вырождения  $U_{10} \sim x^{-1.5}$ ,  $e(x, 0) \sim x^{-1.5}$ ,  $l \sim x^{0.25}$ . Аналогичные законы вырождения были получены, в частности, в [16, 21].

Наряду с представленными выше результатами расчетов безимпульсного турбулентного следа ниже приводятся некоторые результаты расчетов “классического” следа за цилиндром. На рис. 4 рассчитанные характеристики плоского турбулентного следа за цилиндром сопоставляются с результатами измерений [7]. Согласие удовлетворительное. Изменение осевых значений дефекта продольной компоненты скорости и энергии турбулентности хорошо согласуется с результатами основанного на экспериментальных данных анализа автомодельности вырождения [7]. Ранее задача о динамике турбулентного следа за цилиндром рассматривалась, в частности, в [21] в приближении дальнего

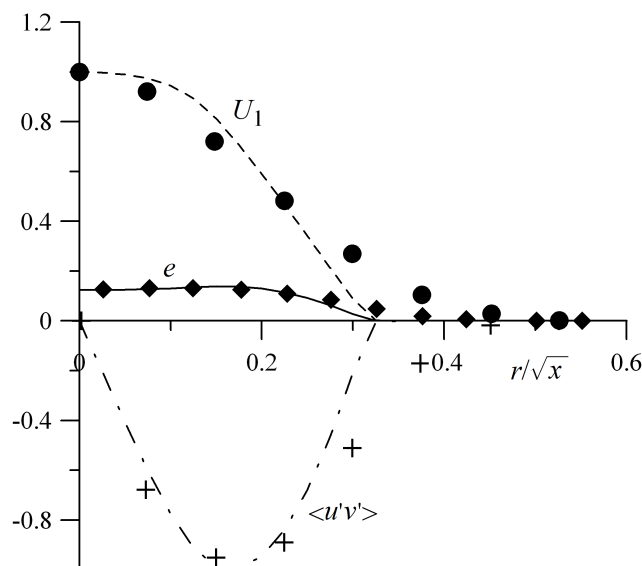


Рис. 4. Экспериментальные [7] и рассчитанные ( $x/D = 2225$ ) автомодельные профили  $e$ ,  $U_1$ ,  $\langle u'v' \rangle$ :  $\blacklozenge$ ,  $\bullet$ ,  $+$  — эксперимент; сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии соответственно — расчет

следа. Результаты настоящих расчетов близки к приведенным в [21]. В настоящей работе рис. 4 дан лишь для иллюстрации работоспособности численной модели.

Сопоставление результатов расчетов плоских турбулентных следов с экспериментальными данными [7, 19] подтверждает достаточную универсальность построенной численной модели плоских турбулентных следов (см. также [21, 23]). Отметим, что рассмотренное выше течение в плоском безимпульсном следе характеризовалось в настоящих расчетах значением безразмерной величины  $J_0^* = \int_0^\infty (UU_1 - 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P) dy = 0.176 \cdot 10^{-7}$ . В классическом следе за цилиндром [7] величина  $J_0^*$  значительно больше:  $J_0^* = 0.203$ . Величина  $J_0$  связана с суммарным избыточным импульсом  $F_0$  соотношением  $F_0 = 2\rho_0 J_0 U_0^2 D$ .

### 3. Результаты расчетов осесимметричных турбулентных следов

Наиболее полными из известных авторам экспериментальными данными о вырождении осесимметричных безимпульсных турбулентных следов являются данные работ [15, 17]. Результаты расчетов, основанные на применении моделей 1 и 2, представлены в табл. 2, 3, 5; в табл. 1 и 4 приведены экспериментальные данные [13, 15]. Начальные данные при проведении расчетов задавались при  $x/D = 10$  (в отсутствие фона)

Т а б л и ц а 1. Экспериментальные данные для осесимметричного безимпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона [15]

$x/D$	20	60	70	100	120
$U_d/U_0$	0.05	0.009	—	—	—
$E/U_0^2$	$392.0 \cdot 10^{-5}$	$73.0 \cdot 10^{-5}$	$58.0 \cdot 10^{-5}$	$35.0 \cdot 10^{-5}$	$27.0 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon D/U_0^3$	$27.8 \cdot 10^{-5}$	—	$1.3 \cdot 10^{-5}$	—	—
$r_l$	0.9	1.36	1.42	1.6	1.84

Т а б л и ц а 2. Расчетные данные (модель 1) для осесимметричного безимпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона

$x/D$	20	60	70	100	120
$U_d/U_0$	0.05	0.0086	0.0068	0.0039	0.0029
$E/U_0^2$	$392.0 \cdot 10^{-5}$	$67.0 \cdot 10^{-5}$	$53.0 \cdot 10^{-5}$	$35.0 \cdot 10^{-5}$	$25.0 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon D/U_0^3$	$27.8 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	$0.93 \cdot 10^{-5}$	$0.38 \cdot 10^{-5}$	$0.24 \cdot 10^{-5}$
$r_l$	0.9	1.24	1.29	1.38	1.42

Т а б л и ц а 3. Расчетные данные (модель 2) для осесимметричного безимпульсного следа за сферой в условиях ненулевого турбулентного фона

$x/D$	20	60	70	100	120
$U_d/U_0$	0.05	0.0080	0.0063	0.0035	0.0026
$E/U_0^2$	$392.0 \cdot 10^{-5}$	$65.0 \cdot 10^{-5}$	$51.0 \cdot 10^{-5}$	$31.0 \cdot 10^{-5}$	$24.0 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon D/U_0^3$	$27.8 \cdot 10^{-5}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$0.91 \cdot 10^{-5}$	$0.37 \cdot 10^{-5}$	$0.24 \cdot 10^{-5}$
$r_l$	0.9	1.35	1.43	1.63	1.74

Т а б л и ц а 4. Экспериментальные данные для осесимметричного безимпульсного следа за сферой в отсутствие турбулентного фона [13]

$x/D$	10	20	70	100
$U_d/U_0$	0.0464	—	—	—
$E/U_0^2$	$534.0 \cdot 10^{-5}$	$172.0 \cdot 10^{-5}$	$15.0 \cdot 10^{-5}$	$8.2 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon D/U_0^3$	$78.0 \cdot 10^{-5}$	$10.7 \cdot 10^{-5}$	$0.29 \cdot 10^{-5}$	—

Т а б л и ц а 5. Расчетные данные (модель 1) для осесимметричного безимпульсного следа за сферой в отсутствие турбулентного фона [15]

$x/D$	10	20	70	100
$U_d/U_0$	0.0464	0.013	0.0022	0.0013
$E/U_0^2$	$534.0 \cdot 10^{-5}$	$128.0 \cdot 10^{-5}$	$16.0 \cdot 10^{-5}$	$9.2 \cdot 10^{-5}$
$\epsilon D/U_0^3$	$78.0 \cdot 10^{-5}$	$8.43 \cdot 10^{-5}$	$0.27 \cdot 10^{-5}$	$0.11 \cdot 10^{-5}$

и при  $x/D = 20$  (ненулевой, близкий к изотропному фон) согласованными с результатами экспериментов. Рассчитанные по обеим моделям характеристики течения близки экспериментально измеренным.

В таблицах приняты обозначения  $U_d = U_1(x, 0)$ ,  $E = e(x, 0)$ ,  $\epsilon = \varepsilon(x, 0)$ ,  $r_l : e(x, r_l) = 0.25e(x, r_l)$ . Модель 2 в последнем случае дает отклонение от экспериментальных данных [15] несколько большее, нежели приведенное в табл. 5. Прочерки в таблицах означают отсутствие результатов лабораторных измерений.

Достаточно хорошо известными данными о вырождении осесимметричных турбулентных следов являются также результаты лабораторных измерений [8, 18]. На рис. 5 рассчитанные для различных режимов движения профили дефекта продольной компоненты скорости сопоставляются с результатами измерений осесимметричного следа [8, 18]. Экспериментальные данные на различных расстояниях от тела представлены точками; результаты расчетов показаны сплошной линией и соответствуют  $x/D = 90$ .

На рис. 6 результаты расчетов характерного размера следа, осевых значений дефекта продольной компоненты скорости и интенсивности турбулентных флуктуаций скорости с применением модели 1 сопоставляются с экспериментальными данными [8, 18]. Как и на рис. 3, пунктирной линией приведены результаты расчетов на основе классической  $e \sim \varepsilon$ -модели. Начальные данные задавались согласованными с экспериментальными при  $x/D = 10$ . Согласие результатов расчетов на основе модели 1 с экспериментальными данными [8, 18] достаточно хорошее.

Отметим, что в рассмотренных вариантах течение в следе характеризуется обезразмеренными значениями  $I^* = \int_0^\infty y \left( UU_1 - 2\Phi \frac{e}{\varepsilon} P \right) dy = 0.160 \cdot 10^{-2}$  (переходная эжекция),

$I^* = 0.223 \cdot 10^{-1}$  (сильная эжекция). Величина  $I$  связана с суммарным избыточным импульсом  $F_0$  соотношением  $F_0 = 2\pi\rho_0 IU_0^2 D^2$ . “Чистый” след [8, 18] характеризуется  $I^* = 0.44 \cdot 10^{-1}$ . Таким образом, суммарный избыточный импульс в рассмотренных вариантах течения в следе меняется весьма существенно.

Серия рис. 7, 8 относится к расчетам течения в следе за сферой в условиях нулевого турбулентного фона [15] на основе модели 2. Цель этих расчетов — демонстрация влияния величины малого суммарного избыточного импульса на развитие течения



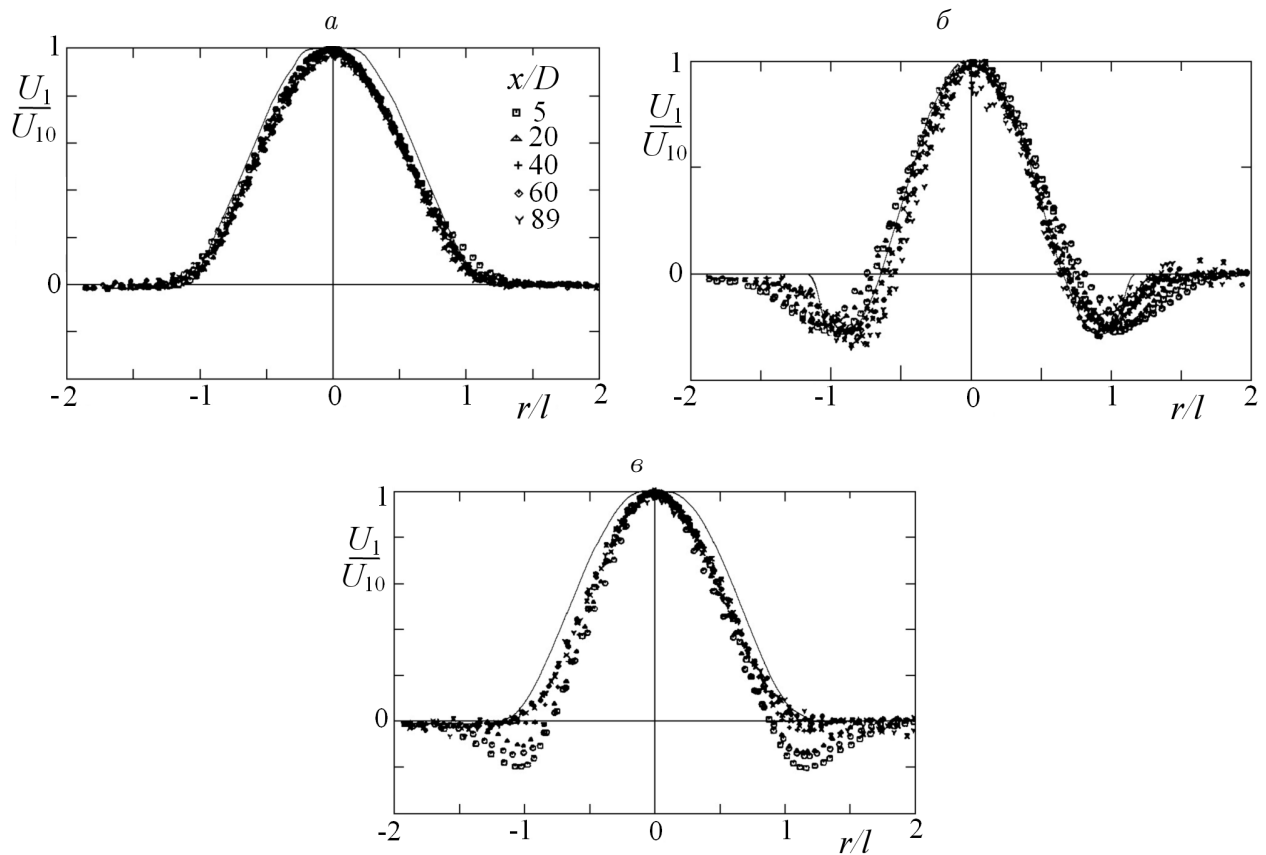


Рис. 5. Рассчитанные (кривая) и экспериментальные [18] (значки) нормализованные профили дефекта осредненной продольной компоненты скорости  $U_1$  для осесимметричных следов: *a* — “чистый” след, *б* — переходная эжекция и *в* — сильная эжекция

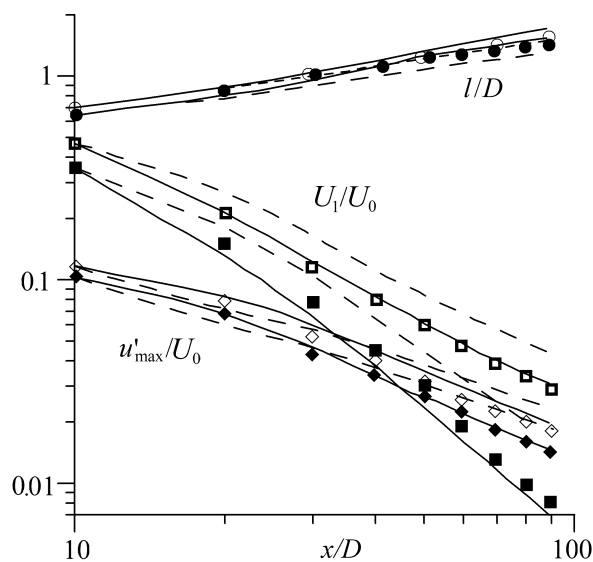


Рис. 6. Вырождение осевых значений дефекта продольной компоненты скорости  $U_1$ , максимальных значений интенсивности флуктуаций продольной компоненты скорости  $u' = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$  и размера следа  $l : u'(x, l) = 0.5u'(x, 0)$

в дальнейшем следе и анализ асимптотического вырождения следов. По-прежнему, начальные данные, согласующиеся с экспериментальными, задавались при  $x/D = 10$ , но они незначительно изменялись для того, чтобы получать различные значения величины  $I$ . Было проведено три варианта расчетов: I — для  $I = 5.0 \cdot 10^{-14}$ , II — для  $I = -9.0 \cdot 10^{-4}$ , III — для  $I = 9.3 \cdot 10^{-4}$ . Все данные приводятся в обезразмеренном виде. Величина  $I = 5.0 \cdot 10^{-14}$  соответствовала безимпульсной конфигурации следа.

На рис. 7 показано вырождение осевых значений дефекта продольной компоненты скорости и энергии турбулентности в зависимости от расстояния  $x/D$ . Сплошные линии — результаты расчетов, пунктирные — асимптотические автомодельные законы вырождения характеристик безимпульсных и классических турбулентных следов. Следует отметить, что на рис. 7, а для варианта II при больших расстояниях от тела приведен не сам дефект продольной компоненты скорости, а его абсолютная величина. Вариант II на больших расстояниях от тела соответствует течению в турбулентной струе в спутном потоке, вариант III — классическому турбулентному следу с ненулевым суммарным избыточным импульсом [2]. Результаты расчетов согласуются с результатами работы [12].

Можно видеть, что на рассмотренных расстояниях влияние ненулевого малого избыточного импульса в большей мере сказывается на вырождении дефекта продольной компоненты скорости (см. также [32]). Кроме того на очень больших расстояниях от тела ( $x/D > 10^7$ ) законы вырождения следа в вариантах II, III согласуются с законами вырождения в ламинарном режиме течения [2]; в случае варианта I законы вырождения дефекта продольной компоненты скорости согласуются с асимптотикой [40].

Профили дефекта продольной компоненты скорости для случаев  $I = -9.0 \cdot 10^{-4}$  и  $I = 9.3 \cdot 10^{-4}$  приведены на рис. 8. Видно, что с ростом расстояния от тела происходит перерождение следов с малым отличным от нуля импульсом либо в классический импульсный турбулентный след, либо в турбулентную струю в спутном потоке

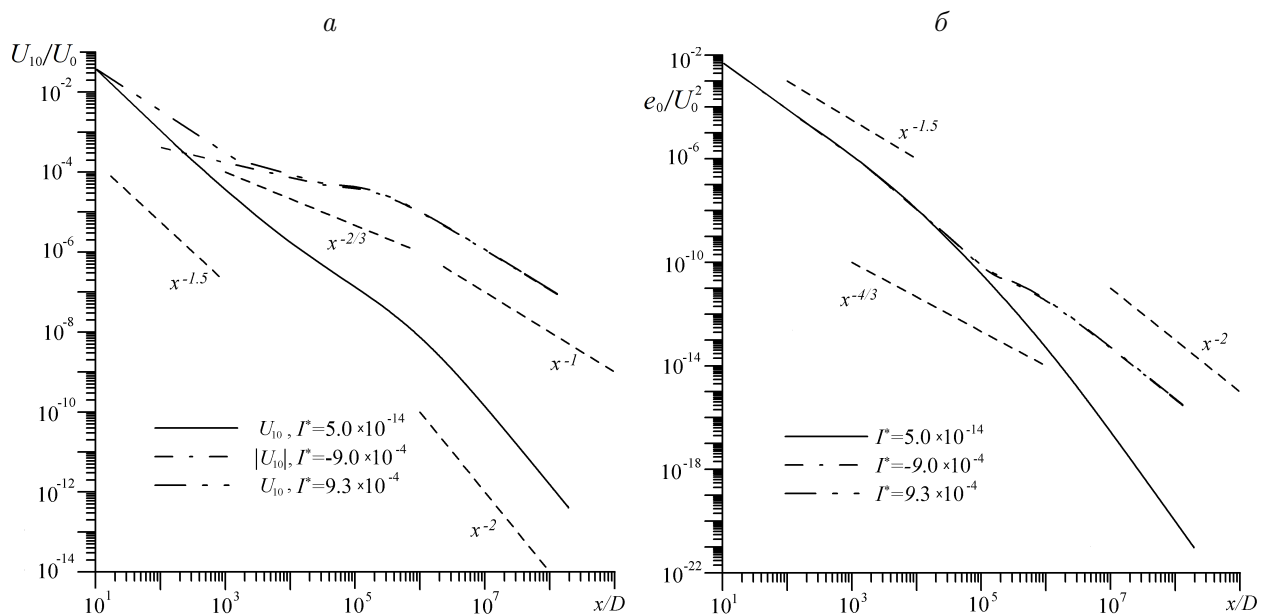


Рис. 7. Влияние величины избыточного импульса на вырождение осевых значений дефекта средней скорости  $U_{10}$  (а) и энергии турбулентности  $e_0$  (б)

(в зависимости от знака  $I$ ). Форма же профиля дефекта скорости в варианте I на этих расстояниях остается без изменения.

Изменение в зависимости от расстояния от тела осевого значения турбулентного числа Рейнольдса  $Re_\lambda = \sqrt{2\epsilon}\lambda/\nu$  представлено на рис. 9. Можно видеть, что для  $x/D < 500$  в рамках принятой модели эта величина достаточно велика и турбулентное течение в следе изменяется по законам, близким к законам вырождения развитого турбулентного течения. С ростом расстояния от тела турбулентное число Рейнольдса убывает и турбулентность в следе уже не может считаться развитой. Поскольку нас интересуют асимптотическое вырождение следа и влияние на его эволюцию малого суммарно-

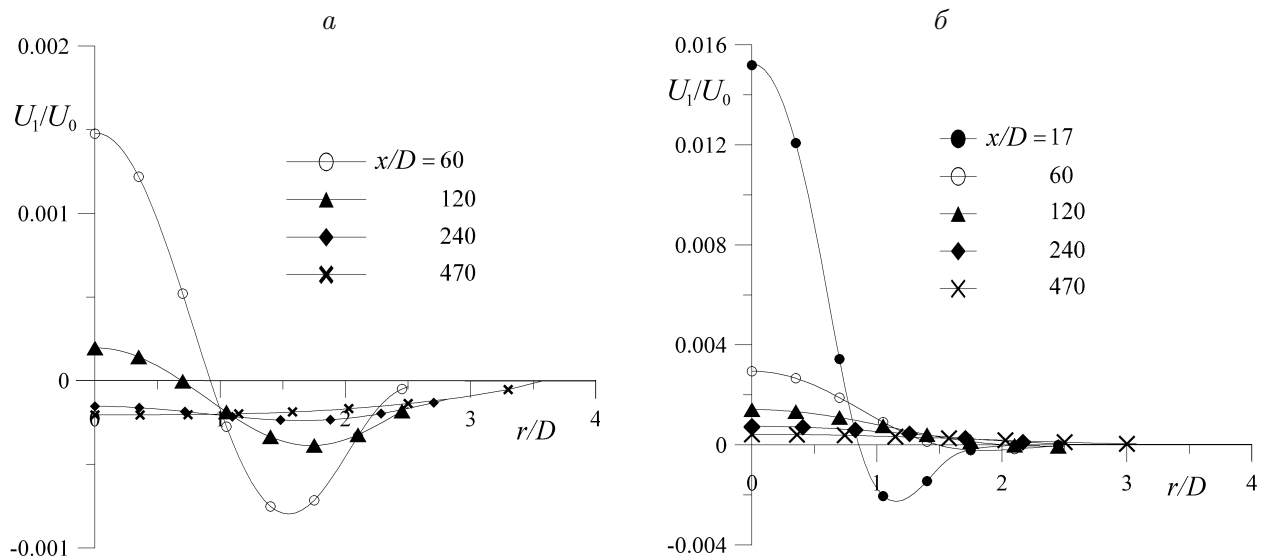


Рис. 8. Профили дефекта продольной компоненты скорости  $U_1$ :  $I = -9.0 \cdot 10^{-4}$  (а);  $I = 9.3 \cdot 10^{-4}$  (б)

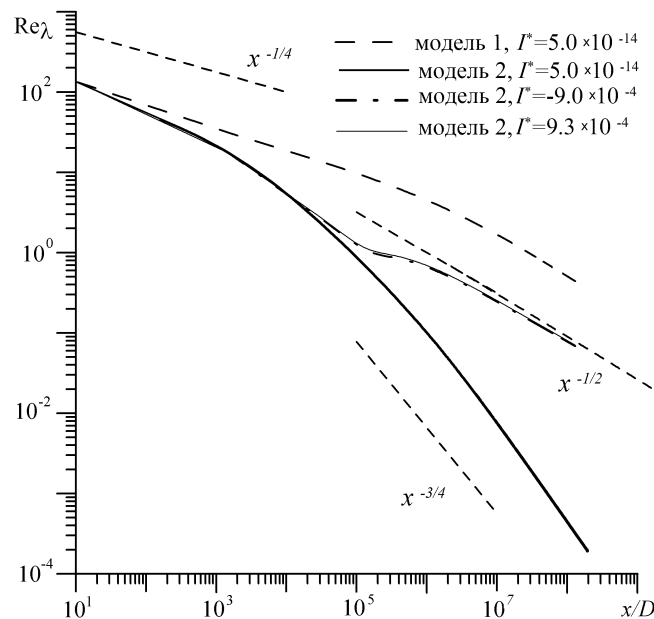


Рис. 9. Изменение  $Re_\lambda$  в зависимости от расстояния от тела для следа за сферой [15]

го избыточного импульса, в настоящей работе используется полуэмпирическая модель турбулентности, учитывающая варьирование турбулентного числа Рейнольдса. Авторы отчетливо осознают тот факт, что представленные на рис. 7, 9 для больших расстояний от тела результаты расчетов есть всего лишь следствие численного моделирования на основе модели 2.

В заключение отметим следующее. В замкнутой математической модели 1 (и в ее аналоге — модели 2) весомую роль играет отношение  $P/\varepsilon$  [3]. Анализ поведения отношения  $P/\varepsilon$  в рассмотренных задачах показывает, что при численном моделировании осесимметричного безимпульсного турбулентного следа в условиях лабораторных измерений [15] максимальное значение  $P/\varepsilon \approx 0.13$  при  $x/D = 12$ , а далее оно быстро убывает. При  $x/D = 80$  максимальное значение  $P/\varepsilon \approx 0.014$ . Для варианта экспериментальных данных [8, 18], соответствующих осесимметричному следу и режиму “сильной эжекции”, при  $x/D = 20$  максимальное значение  $P/\varepsilon \approx 0.96$ ; при  $x/D = 400$  максимальная величина  $P/\varepsilon \approx 0.42$  и далее практически не убывает. Известно также, что в автомоделном плоском следе за цилиндром максимум  $(P/\varepsilon)_{\max} \approx 0.8$  и почти не меняется [21]. В значительной части течения в дальнем следе за удлиненным буксируемым телом вращения  $P/\varepsilon \approx 1$ ; в безимпульсном следе, как это отмечалось выше,  $P/\varepsilon \ll 1$ . Достаточная универсальность примененной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений [3] обусловлена возможностью учета в ней влияния параметра  $P/\varepsilon$ .

Таким образом, основные результаты данной работы сводятся к следующему. Построены численные модели плоских и осесимметричных турбулентных следов с варьируемым значением суммарного избыточного импульса, основанные на приближении пограничного слоя и применении алгебраической модели рейнольдсовых напряжений Родди. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными. Выполнено численное моделирование асимптотического вырождения осесимметричного турбулентного следа с нулевым и малым ненулевым суммарным избыточным импульсом.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00246) и грантов Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-5006.2014.9 и НШ-5984.2014.8.

Авторы благодарят О.Ф. Воропаеву за полезные обсуждения.

## Список литературы / References

- [1] Naudascher, E. Flow in the wake of a self-propelled bodies and related sources of turbulence // Journal of Fluid Mechanics. 1965. Vol. 22, pt 4. P. 625–656.
- [2] Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов. М.: Машиностроение, 1969. 300 с. Ginevskii, A.S. Theory of Turbulent Jets and Wakes. Moscow: Mashinostroenie, 1969. 300 p. (in Russ.)
- [3] Rodi, W. The prediction of free turbulent boundary layers by use of two-equation model of turbulence. Ph. D. Thesis, University of London, 1972. 309 p.
- [4] Lewellen, W.S., Teske, M., Donaldson, C. du P. Application of turbulence model equations to axisymmetric wakes // AIAA Journal. 1974. Vol. 12. P. 620–625.

- [5] **Finson, M.L.** Similarity behaviour of momentumless turbulent wakes // *Journal of Fluid Mechanics*. 1975. Vol. 71. P. 465–479.
- [6] **Сабельников В.А.** О некоторых особенностях турбулентных течений с нулевым избыточным импульсом // *Уч. зап. ЦАГИ*. 1975. Т. 6, № 4. С. 71–74.  
**Sabelnikov, V.A.** Some special features of turbulent flows with zero excess momentum // *Uchenye Zapiski TsAGI*. 1975. Vol. 6, No 4. P. 71–74. (in Russ.)
- [7] **Townsend, A.A.** The structure of turbulent shear flow. Cambridge University Press, 1976. 429 p.
- [8] **Higuchi, H.** Experimental investigation on axisymmetric turbulent wakes with zero momentum defect. Ph.D.Thesis, California Institute of Technology, 1977. 213 p.
- [9] **Городцов В.А.** Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1979. № 1. С. 43–50.  
**Gorodtsov, V.A.** Similarity and weak closing relations for symmetric free turbulence // *Fluid Dynamics*. 1979. Vol. 14, No. 1. P. 31–37.
- [10] **Hassid, S.** Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // *Journal of Hydronautics*. 1980. Vol. 14. P. 25–32.
- [11] **Hassid, S.** Similarity and decay law of momentumless wakes // *Physics of Fluids*. 1980. Vol. 23. P. 404–405.
- [12] **Лучко Н.Н.** Влияние погрешности определения избыточного импульса на развитие осесимметричного турбулентного следа // *Структура турбулентных течений*. Науч. тр. ИТМО АН БССР. Минск, 1982. С. 35–48.  
**Luchko, N.N.** The influence of the error in determining excess momentum on the evolution of an axisymmetric turbulent wake // *Struktura Turbulentnykh Tehenii*. Nauchnye trudy ITMO AN BSSR. Minsk, 1982. P. 35–48. (in Russ.)
- [13] **Коловандин В.А., Лучко Н.Н.** Влияние внешней турбулентности на поле скорости в следе за эллипсоидом вращения // *Инженерно-физический журнал*. 1985. Т. 48, № 4. С. 538–546.  
**Kolovandin, V.A., Luchko, N.N.** Influence of external turbulence on the velocity field in the wake behind an ellipsoid of revolution // *Journal of Engineering Physics*. 1985. Vol. 48, No. 4. P. 390–396.
- [14] **Ковалев И.И., Коловандин В.А., Лучко Н.Н.** Конечная стадия вырождения турбулентного поля скорости в спутном потоке // *Инженерно-физический журнал*. 1985. Т. 49, № 2. С. 209–214.  
**Kovalev, I.I., Kolovandin, V.A., Luchko, N.N.** Final stage in turbulent velocity field degeneration in a coflow // *Journal of Engineering Physics*. 1985. Vol. 49, No. 2. P. 903–906.
- [15] **Алексенко Н.В., Костомаха В.А.** Экспериментальное исследование осесимметричного безимпульсного турбулентного струйного течения // *ПМТФ*. 1987. Т. 28, № 1. С. 65–69.  
**Aleksenko, N.V., Kostomakha, V.A.** Experimental study of an axisymmetric nonimpulsive turbulent jet // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1987. Vol. 28, No. 1. P. 60–64.
- [16] **Дмитренко Ю.М., Ковалев И.И., Лучко Н.Н., Черепанов П.Я.** Исследование плоского турбулентного следа с нулевым избыточным импульсом // *Инженерно-физический журнал*. 1987. Т. 52, № 5. С. 743–750.  
**Dmitrenko, Y.M., Kovalev, I.I., Luchko, N.N., Cherepanov, P.Y.** Plane turbulent wake with zero excess momentum // *Journal of Engineering Physics*. 1987. Vol. 52, No. 5. P. 536–542.

- [17] **Алексенко Н.В., Костомаха В.А.** Экспериментальное исследование динамики безымпурсного турбулентного следа в турбулизованном внешнем потоке // Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1988. Вып. 81. С. 14–24.  
**Aleksenko, N.V., Kostomakha, V.A.** Experimental investigation of the dynamics of a momentumless turbulent wake in a turbulent external flow // Dinamika Sploshnoii Sredy. Novosibirsk, 1988. Iss. 81. P. 14–24.
- [18] **Higuchi, H., Kubota, T.** Axisymmetric wakes behind a slender body including zero-momentum configurations // Physics of Fluids A. 1990. Vol. 2, No. 9. P. 1615–1623.
- [19] **Cimbala, J.M., Park, W.J.** An experimental investigation of the turbulent structure in a two-dimensional momentumless wake // Journal of Fluid Mech. 1990. Vol. 213. P. 479–509.
- [20] **Chernykh, G.G., Demenkov, A.G., Fedorova, N.N.** Numerical models of a plane and axisymmetric turbulent wakes in homogeneous fluid // International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, aug. 22–26, 1994. Novosibirsk, 1994. Pt 2. P. 76–81.
- [21] **Федорова Н.Н., Черных Г.Г.** О численном моделировании плоских турбулентных следов // Матем. моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 24–34.  
**Fedorova, N.N., Chernykh, G.G.** Numerical simulation of plane turbulent wakes // Matematicheskoe Modelirovanie. 1994. Vol. 6, No 10. P. 24–34. (in Russ.)
- [22] **Ahn, J.W., Sung, H.J.** Prediction of two-dimensional momentumless wake by  $k - \varepsilon - \gamma$  model // AIAA Journal. 1995. Vol. 33, No. 4. P. 611–617.
- [23] **Букреев В.И., Деменков А.Г., Костомаха В.А., Черных Г.Г.** Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 115–126.  
**Bukreev, V.I., Demenkov, A.G., Kostomakha, V.A., Chernykh, G.G.** Heat propagation from a line source in a plane turbulent wake // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1996. Vol. 37, No. 5. P. 710–719.
- [24] **Chernykh, G.G., Demenkov, A.G.** On numerical simulation of jet flows of viscous incompressible fluids // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 1997. Vol. 12, No. 2. P. 111–125.
- [25] **Cherepanov, P.Y., Babenko, V.A.** Experimental and numerical study of flat momentumless wake // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1998. Vol. 19. P. 608–622.
- [26] **Гребенев В.Н., Деменков А.Г., Черных Г.Г.** Анализ локально равновесного приближения в задаче о дальнем плоском турбулентном следе // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 57–60.  
**Grebenev, V.N., Demenkov, A.G., Chernykh, G.G.** Analysis of the local-equilibrium approximation in the problem of far planar turbulent wake // Doklady Physics. 2002. Vol. 47, No. 7. P. 518–521.
- [27] **Voropaeva, O.F.** Dynamics of a far momentumless turbulent wake in passively stratified media // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2004. Vol. 19, No. 1. P. 83–102.
- [28] **Lu, M.-H., Sirviente, A.I.** Numerical study of the momentumless wake of an axisymmetric body // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 10–13 January 2005, Reno, Nevada: AIAA, 2005. 14 p.
- [29] **Воропаева О.Ф.** Иерархия моделей турбулентности второго и третьего порядка в расчетах безымпурсного турбулентного следа за телом вращения // Матем. моделирование. 2007. Т. 19, № 3. С. 29–51.

- Воропаева, О.Ф.** A hierarchy of second- and third-order turbulence models for momentumless wakes behind an axisymmetric bodies // *Matematicheskoe Modelirovanie*. 2007. Vol. 19, No 3. P. 29–51. (in Russ.)
- [30] **Капцов О.В., Ефремов И.А., Шмидт А.В.** Автомодельные решения модели второго порядка дальнего турбулентного следа // *ПМТФ*. 2008. Т. 49, № 2. С. 74–78.  
**Kaptsov, O.V., Efremov, I.A., Schmidt, A.V.** Self-similar solutions of the second-order model of the far turbulent wake // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. Vol. 49, No. 2. P. 217–221.
- [31] **Новиков Б.Г.** О влиянии малого суммарного импульса на развитие следа за самодвижущимися телами // *Теплофизика и аэромеханика*. 2009. Т. 16, № 4. С. 597–623.  
**Novikov, B.G.** Effect of small total pulse on development of a wake behind the self-propelled bodies // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2009. Vol. 16, No. 4. P. 597–623. (in Russ.)
- [32] **Chernykh, G.G., Moshkin, N.P., Fomina, A.V.** Dynamics of turbulent wake with small excess momentum in stratified media // *Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2009. Vol. 14, No. 4. P. 1307–1323.
- [33] **Ефремов И.А., Капцов О.В., Черных Г.Г.** Автомодельные решения двух задач свободной турбулентности // *Матем. моделирование*. 2009. Т. 21, № 12. С. 137–144.  
**Efremov, I.A., Kaptsov, O.V., Chernykh, G.G.** Self-similar solutions for two problems of free turbulence // *Matematicheskoe Modelirovanie*. 2009. Vol. 21, No 12. P. 137–144. (in Russ.)
- [34] **Maderich, V., Konstantinov, S.** Asymptotic and numerical analysis of momentumless turbulent wakes // *Fluid Dynamics Research*. 2010. Vol. 42, No. 4. 25 p. DOI: 10.1088/0169-5983/42/4/045503.
- [35] **De Stadler, M.B., Sarkar, S.** Simulation of a propelled wake with moderate excess momentum in a stratified fluid // *Journal of Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 692. P. 28–52.
- [36] **Капцов О.В., Фомина А.В., Черных Г.Г., Шмидт А.В.** Автомодельное вырождение турбулентного следа за буксируемым телом в пассивно стратифицированной среде // *ПМТФ*. 2012. Т. 53, № 5. С. 47–54.  
**Kaptsov, O.V., Fomina, A.V., Chernykh, G.G., Schmidt, A.V.** Self-similar decay of the momentumless turbulent wake in a passive stratified medium // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2012. Vol. 53, No 5. P. 672–678.
- [37] **Lewis, B.J., Cimbala, J.M., Wouden, A.M.** Analysis and optimization of guide vane jets to decrease the unsteady load on mixed flow hydroturbine runner blades // *Proceedings of Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics*. Big Island, Hawaii, July 9–13, 2012. 14 p. (ICCFD7-1701).
- [38] **Chernykh, G.G., Demenkov, A.G.** Numerical simulation of turbulent wakes with variable total excess momentum // *Journal of Engineering Thermophysics*. 2013. Vol. 22, No. 2. P. 143–156.
- [39] **Капцов О.В., Фомина А.В., Черных Г.Г., Шмидт А.В.** Автомодельное вырождение безымпulsive турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде // *Матем. моделирование*. 2015. Т. 27, № 1. С. 84–98.  
**Kaptsov, O.V., Fomina, A.V., Chernykh, G.G., Schmidt, A.V.** Self-similar decay of the momentumless turbulent wake in a passive stratified medium // *Matematicheskoe Modelirovanie*. 2015. Vol. 27, No 1. P. 84–98. (in Russ.)
- [40] **Сенницкий В.Л.** Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // *ПМТФ*. 1984. Т. 25, № 4. С. 31–36.  
**Sennitskii, V.L.** Example of flow of an axisymmetric liquid stream over a self-propelled body // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1984. Vol. 25, No 4. P. 526–530.

- [41] Пухначев В.В. Асимптотика поля скоростей на больших расстояниях от самодвижущегося тела // ПМТФ. 1989. Т. 30, № 2. С. 52–60.  
Pukhnachev, V.V. Asymptotics of a velocity field at considerable distances from a self-propelled body // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1989. Vol. 30, No. 2. P. 215–222.

*Поступила в редакцию 22 июня 2015 г.,  
с доработки — 7 июля 2015 г.*

### **Mathematical modelling of turbulent wakes with varied total excess momentum**

DEMENKOV, ANDREY G.<sup>1,2</sup>, CHERNYKH, GENNADIY G.<sup>3,4,\*</sup>

<sup>1</sup>Kutateladze Institute of Thermophysics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russia

<sup>3</sup>Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

<sup>4</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090, Russia

\*Corresponding author: Chernykh, Gennadiy G., e-mail: [chernykh@ict.nsc.ru](mailto:chernykh@ict.nsc.ru)

The turbulent wakes behind towed and self-propelled bodies in homogeneous fluid are an obvious example of jet turbulent flows with a varied value of total excess momentum. The turbulent wakes are also characterized by a considerably varying ratio  $P/\varepsilon$ , where  $P$  is the generation of turbulence energy due to gradients of the averaged motion, and  $\varepsilon$  is the rate of dissipation of the turbulence energy to heat. In momentumless turbulent wakes even on distances of about ten diameters of the body this ratio is rather small. In drag turbulent wakes behind slender axisymmetric bodies the ratio  $P/\varepsilon$  is close to unity. In present paper we consider flows in some turbulent wakes with varied total excess momentum. For description of the flow in turbulent wakes we use the system of averaged equations of motion in thin shear viscous layer approach. This system is not closed. Based on non-equilibrium Rodi's algebraic stress model, the numerical model for turbulent wakes has been constructed. Sufficient universality of the applied algebraic model is caused by the possibility of considering the influence of the parameter  $P/\varepsilon$ . The results of calculations are in a good agreement with known experimental data. Based on the modified mathematical model which takes into account the substantial variation of the Reynolds turbulent number in the process of turbulent flow decay, the numerical simulation of the final stage degeneration for axisymmetric wakes with zero and small nonzero total excess momentum was carried out.

*Keywords:* plane and axisymmetric turbulent wakes with varied total excess momentum, numerical modelling, asymptotic degeneration of axisymmetric turbulent wakes.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant No. 13-01-00246) and grants of the President of Russian Federation for Support of Leading Scientific Schools (NSH 5006.2014.9 and NSH 5984.2014.8).

Authors are grateful to Prof. O.F. Voropayeva for usefull discussions.

*Received 22 Juny 2015*

*Received in revised form 7 July 2015*