Некорректная начально-краевая задача для системы уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени

К. С. Фаязов[1], И. О. Хажиев[2,*]

[1]Туринский политехнический университет, Узбекистан, Ташкент

[2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент

[*]Контактный e-mail: h.ikrom@mail.ru

Доказана условная корректность начально-краевой задачи для системы неклассических уравнений первого порядка по переменной t на множестве корректности. Построено приближенное решение методом регуляризации, и получена оценка погрешности нормы разности точного и приближенного решений.

Ключевые слова: система уравнений, начально-краевая задача, некорректные задачи, априорная оценка, теорема о единственности, оценка условной устойчивости, регуляризация, параметр регуляризации.

Введение

В настоящей работе исследуется начально-краевая задача для системы уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени [1], которая относится к классу обратных и некорректно поставленных задач математической физики. Основной проблемой является доказательство условной корректности упомянутой задачи, а именно доказательство единственности решения и его условной устойчивости на множестве корректности.

Рассмотрим начально-краевую задачу для системы уравнений

$$\begin{cases} \left(\operatorname{sgn} x\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)v(x,t)=0, \\ \left(\operatorname{sgn} x\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=v(x,t) \end{cases} \tag{1}$$

в области $\Omega=\{-1<x<1,\, x\neq 0,\, 0<t<T\}$.

Постановка задачи. Ищется решение $(u(x,t),\, v(x,t))$ системы уравнений (1), удовлетворяющее условиям:

начальным

$$u(x,0)=f(x), \quad v(x,0)=g(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{2}$$

граничным

$$\left.\begin{array}{r} u(-1,t)=u(1,t)=0, \\ v(-1,t)=v(1,t)=0 \end{array}\right\}, \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

и условиям склеивания

$$\left.\begin{array}{ll} u(-0,t)=u(+0,t), & u_x(-0,t)=u_x(+0,t), \\ v(-0,t)=v(+0,t), & v_x(-0,t)=v_x(+0,t) \end{array}\right\}, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{4}$$

Впервые задача для параболического уравнения в области, где коэффициент при u_t меняет знак, рассмотрена в работе M. Jevrey. Задачи такого типа с различными граничными и начальными условиями исследовали многие математики, в том числе C.D. Pagani, G. Talenti, В.Н. Врагов, В.К. Романко, А.М. Нахушев и др. Для изучения указанных задач в этих работах применялись классические методы, такие как различные аналоги функции Грина, теория потенциала, интегральные уравнения и т. д. Особо следует отметить работу С.А. Терсенова [2], в которой подведены итоги исследований с помощью классических методов.

В дальнейшем, однако, стало ясно, что параболические уравнения с переменным направлением времени следует рассматривать как частный случай достаточно широкого класса дифференциальных уравнений с частными производными уравнений, тип которых меняется при переходе через какие-либо линии или гиперповерхности либо на границе области [3].

В работах Н.В. Кислова доказана обобщенная разрешимость краевых задач для одного абстрактного уравнения. Кроме Н.В. Кислова, большой вклад в исследование краевых задач для подобных дифференциально-операторных уравнений внесли также С.Г. Пятков, А.И. Кожанов, И.Е. Егоров, А.А. Керефов, И.С. Пулькин [3] и др.

Исследуемая задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректная задача для подобных уравнений рассмотрена в работах H. Levine [4], А.Л. Бухгейма, К.С. Фаязова [5], К.С. Фаязова и И.О. Хажиева [6].

Подобные уравнения имеют множество различных применений, например, описывают процессы распространения тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных потоков, массопереноса вблизи поверхности летательного аппарата, сложные течения вязкой жидкости. В качестве возможных приложений следует также указать задачи расчета теплообменников, в которых используется принцип противотока [7].

В настоящей работе исследуется условная корректность, доказываются теоремы об условной устойчивости и единственности решения задачи (1)–(4), а также строится приближенное решение.

Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} x\, X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ X(-1)=X(1)=0, \\ X(-0)=X(+0), \quad X'(-0)=X'(+0). \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $\left\{X_k^+\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{X_k^-\right\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные функции задачи (5), отвечающие соответственно положительным λ_k^+ и отрицательным λ_k^- собственным значениям, причем числа λ_k^+, $-\lambda_k^-$ образуют неубывающие последовательности. При этом $\mu_k=\sqrt{-\lambda_k^-}$ и $\mu_k=\sqrt{\lambda_k^+}$ являются решениями трансцендентного уравнения $tg\mu_k+th\mu_k=0$. Отметим, что $\mu_k=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k+O(e^{-2\pi k})$, $k=1,2,3,...$

Обозначим $(u,v)=\int\limits_{-1}^{1} uvdx$ скалярное произведение в $L_2(-1,1)$, $\|u\|^2=(u,u)$. Нормируем собственные функции

$$\left(\operatorname{sgn} x X_k^+, X_j^-\right)=0 \quad \forall k,j,$$

$$\left(\operatorname{sgn} x X_k^\pm, X_j^\pm\right)=\delta_{kj},$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. В [1] доказано, что собственные функции задачи (5) образуют базис Рисса в H_0. Тогда определим

$$\|u(x,t)\|_0^2=\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\left|\left(\operatorname{sgn} x\, u(x,t),\, X_k^+\right)\right|^2+\left|\left(\operatorname{sgn} x\, u(x,t),\, X_k^-\right)\right|^2\Big\},$$

причем данная норма в пространстве H эквивалентна исходной.

Под обобщенным решением краевой задачи (1)–(4) понимаем пару функций $v(x,t)$, $u(x,t)\in C\left([0,T];\, L_2(-1,1)\right)$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T\int\limits_{-1}^{1} v(x,t)\left(\operatorname{sgn} x V_t+V_{xx}\right)dxdt=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn} x V(x,0)f(x)\,dx,\\ \int\limits_0^T\int\limits_{-1}^{1} u(x,t)\left(\operatorname{sgn} x U_t+U_{xx}\right)dxdt=\int\limits_0^T\int\limits_{-1}^{1} V(x,t)U\,dxdt+\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn} x U(x,0)g(x)\,dx \end{cases}$$

для любой пары функций $V(x,t)$, $U(x,t)\in W_2^{2,1}(\Omega)$, $V(x,T)=0$, $V(-1,t)=0$, $V(1,t)=0$, $U(x,T)=0$, $U(-1,t)=0$, $U(1,t)=0$.

1. Основные результаты

Для дальнейшего изложения нам необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $sgn\, x\, v_t(x,t)+v_{xx}(x,t)=0$ и условиям $v(-1,t)=v(1,t)=0$, $v(-0,t)=v(+0,t)$, $v_x(-0,t)=v_x(+0,t)$, тогда для $v(x,t)$ справедлива оценка*

$$\|v(x,t)\|_0\leqslant\|v(x,0)\|_0^{(T-t)/T}\|v(x,T)\|_0^{t/T}.$$

Доказательство см. в [5].

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\operatorname{sgn} x\, u_t(x,t)+u_{xx}(x,t)=v(x,t) \tag{6}$$

и условиям $u(-1,t)=u(1,t)=0$, $u(-0,t)=u(+0,t)$, $u_x(-0,t)=u_x(+0,t)$, тогда для $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\|u(x,t)\|_0\leqslant\left(\|u(x,0)\|_0+\alpha\right)^{(T-t)/T}\left(\|u(x,T)\|_0+\alpha\right)^{t/T}+\alpha,$$

где $\alpha=\left(\int\limits_0^T\|v(x,t)\|_0^2\,dt\right)^{1/2}$

Доказательство. Решение уравнения (6) может быть представлено в виде суммы

$$u(x,t)=\bar{u}(x,t)+\tilde{u}(x,t),$$

где $\bar{u}(x,t)$ — решение однородного уравнения

$$\operatorname{sgn} x\, \bar{u}_t(x,t)+\bar{u}_{xx}(x,t)=0;$$

$\tilde{u}(x,t)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения

$$\operatorname{sgn} x\, \tilde{u}_t(x,t)+\tilde{u}_{xx}(x,t)=v(x,t).$$

Причем функции $\bar{u}(x,t)$, $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяют граничным условиям

$$\bar{u}(-1,t)=\bar{u}(1,t)=0, \quad \tilde{u}(-1,t)=\tilde{u}(1,t)=0,$$

а также условиям склеивания

$$\begin{array}{ll} \bar{u}(-0,t)=\bar{u}(+0,t), & \bar{u}_x(-0,t)=\bar{u}_x(+0,t), \\ \tilde{u}(-0,t)=\tilde{u}(+0,t), & \tilde{u}_x(-0,t)=\tilde{u}_x(+0,t). \end{array}$$

Пусть решение $\tilde{u}(x,t)$, $\bar{u}(x,t)$ существует. Тогда, согласно результатам работы [1], $\tilde{u}(x,t)$ и $\bar{u}(x,t)$ можно представить в виде

$$\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k^+(t)X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k^-(t)X_k^-(x),$$

$$\bar{u}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}_k^+(t)X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\bar{u}_k^-(t)X_k^-(x).$$

Здесь $\tilde{u}_k^{\pm}(t)$ и $\bar{u}_k^{\pm}(t)$ при каждом $k=1,\,2,\,\dots$ удовлетворяют следующим задачам соответственно:

$$\begin{cases} \left\{\tilde{u}_k^+(t)\right\}_t-\lambda_k^+\tilde{u}_k^+(t)=v_k^+(t), \\ \tilde{u}_k^+(0)=-\int\limits_0^T e^{-\lambda_k^+\tau}v_k^+(\tau)d\tau, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{\tilde{u}_k^-(t)\right\}_t-\lambda_k^-\tilde{u}_k^-(t)=v_k^-(t), \\ \tilde{u}_k^-(0)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{\bar{u}_k^+(t)\right\}_t-\lambda_k^+\bar{u}_k^+(t)=0, \\ \bar{u}_k^+(0)=f_k^+ +\int\limits_0^T e^{-\lambda_k^+\tau}v_k^+(\tau)d\tau, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\{\bar{u}_k^-(t)\right\}_t-\lambda_k^-\bar{u}_k^-(t)=0, \\ \bar{u}_k^-(0)=f_k^-, \end{cases}$$

где $v_k^{\pm}(t)=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn} x\, v(x,t)\, X_k^{\pm}(x)dx.$

Нетрудно заметить [8], что

$$\tilde{u}_k^+(t) = -\int\limits_t^T e^{\lambda_k^+(t-\tau)} v_k^+(\tau)d\tau, \quad \tilde{u}_k^-(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda_k^-(t-\tau)} v_k^-(\tau)d\tau,$$

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_0^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\tilde{u}_k^+(t)\right\}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\tilde{u}_k^-(t)\right\}^2 \leqslant \int\limits_0^T \|v(x,t)\|_0{}^2 dt.$$

Учитывая результат леммы 1, для функции $\bar{u}(x,t)$ имеем

$$\|\bar{u}(x,t)\|_0 \leqslant \|\bar{u}(x,0)\|_0^{(T-t)/T} \|\bar{u}(x,T)\|_0^{t/T},$$

причем $\bar{u}(x,t) = u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$. Тогда введем обозначение $\alpha = \left(\int\limits_0^T \|v(x,t)\|_0^2 \, dt\right)^{1/2}$ и получим

$$\|u(x,t)\|_0 \leqslant (\|u(x,0)\|_0 + \alpha)^{(T-t)/T} (\|u(x,T)\|_0 + \alpha)^{t/T} + \alpha.$$

Введем множество корректности M следующим образом:

$$M = \{(u,v) : \|u(x,T)\|_0 + \|v(x,T)\|_0 \leqslant m\}. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1)–(4) существует и* $(u(x,t), v(x,t)) \in M$, *тогда решение задачи единственно.*

Доказательство. Пусть пары функций $(u_1(x,t),\, v_1(x,t))$, $(u_2(x,t),\, v_2(x,t))$ являются решениями задачи (1)–(4). Обозначим $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $v(x,t) = v_1(x,t) - v_2(x,t)$. Тогда пара функций $(u(x,t),\, v(x,t))$ удовлетворяет системе уравнений (1), условиям $u(x,0) = 0,\ v(x,0) = 0$ и (3), (4). Из результата леммы 1 легко видеть $\|v(x,t)\|_0 = 0$, т. е. $v(x,t) = 0$, затем на основе леммы 2 получим, что $\|u(x,t)\|_0 = 0$ для любого $(x,\, t) \in \Omega$ или $v_1(x,t) \equiv v_2(x,t),\ u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, т. е. решение задачи (1)–(4) единственно.

Теорема 2. *Пусть* $(u(x,t),\, v(x,t)) \in M$ *и* $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_0 \leqslant \varepsilon$, $\|g(x) - g_\varepsilon(x)\|_0 \leqslant \varepsilon$. *Тогда для решения задачи (1)–(4) имеют место оценки*

$$\|v(x,t)\|_0 \leqslant (\varepsilon)^{(T-t)/T} (m)^{t/T},$$

$$\|u(x,t)\|_0 \leqslant (\varepsilon + \alpha_\varepsilon)^{(T-t)/T} (m + \alpha_\varepsilon)^{t/T} + \alpha_\varepsilon,$$

где $\alpha_\varepsilon = \left(\int\limits_0^T \left(\varepsilon^2\right)^{(T-t)/T} \left(m^2\right)^{t/T} dt\right)^{1/2}$.

Доказательство. Пусть пара функций $(u(x,t),\, v(x,t))$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \left(\operatorname{sgn} x \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) v(x,t) = 0, \\ \left(\operatorname{sgn} x \dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = v(x,t) \end{cases}$$

в области $\Omega = \{-1 < x < 1,\, x \neq 0,\, 0 < t < T\}$ и следующим условиям:

начальным

$$u(x,0)=f(x)-f_\varepsilon(x),\quad v(x,0)=g(x)-g_\varepsilon(x),\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$$

граничным

$$\left.\begin{array}{c} u(-1,t)=u(1,t)=0,\\ v(-1,t)=v(1,t)=0\end{array}\right\},\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

и условиям склеивания

$$\left.\begin{array}{cc} u(-0,t)=u(+0,t), & u_x(-0,t)=u_x(+0,t),\\ v(-0,t)=v(+0,t), & v_x(-0,t)=v_x(+0,t)\end{array}\right\},\quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

Так как

$$\|v(x,0)\|_0=\|g(x)-g_\varepsilon(x)\|_0\leqslant\varepsilon,\quad \|v(x,T)\|_0\leqslant m,$$

$$\|u(x,0)\|_0=\|f(x)-f_\varepsilon(x)\|_0\leqslant\varepsilon,\quad \|u(x,T)\|_0\leqslant m,$$

то согласно лемме 1 имеем

$$\|v(x,t)\|_0\leqslant(\varepsilon)^{(T-t)/T}(m)^{t/T},$$

а согласно лемме 2

$$\|u(x,t)\|_0\leqslant(\varepsilon+\alpha_\varepsilon)^{(T-t)/T}(m+\alpha_\varepsilon)^{t/T}+\alpha_\varepsilon.$$

Замечание. Приведенные результаты работы могут быть легко перенесены к более общим уравнениям.

2. Приближенное решение

Пусть в задаче (1)–(4) $f(x)=0$ и решение задачи (1)–(4) существует, тогда его можно представить в виде

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k^+e^{\lambda_k^+t}X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_k^-e^{\lambda_k^-t}X_k^-(x), \tag{8}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k^+te^{\lambda_k^+t}X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_k^-te^{\lambda_k^-t}X_k^-(x), \tag{9}$$

где $g_k^\pm=\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sgn}x\,g(x)X_k^\pm(x)\,dx$. Приближенное решение $\big(u^N(x,t),v^N(x,t)\big)$ по точным данным определим следующим образом:

$$v^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}g_k^+e^{\lambda_k^+t}X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{N}g_k^-e^{\lambda_k^-t}X_k^-(x), \tag{10}$$

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}g_k^+te^{\lambda_k^+t}X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{N}g_k^-te^{\lambda_k^-t}X_k^-(x). \tag{11}$$

Здесь N — целочисленный параметр регуляризации. Приближенное решение по приближенным данным определим так:

$$v_\varepsilon^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} g_{k_\varepsilon}^{+} e^{\lambda_k^+ t} X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{N} g_{k_\varepsilon}^{-} e^{\lambda_k^- t} X_k^-(x), \tag{12}$$

$$u_\varepsilon^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} g_{k_\varepsilon}^{+} t e^{\lambda_k^+ t} X_k^+(x)+\sum_{k=1}^{N} g_{k_\varepsilon}^{-} t e^{\lambda_k^- t} X_k^-(x), \tag{13}$$

где $g_{k_\varepsilon}^{\pm}=\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\, g_\varepsilon(x) X_k^{\pm}(x)\,dx$.

Пусть $\|g(x)-g_\varepsilon(x)\|_0 \leqslant \varepsilon$ и $(u(x,t),\, v(x,t))\in M$. Тогда для норм разностей точного и приближенного решений имеем

$$\left\|v(x,t)-v_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0 \leqslant \left\|v(x,t)-v^N(x,t)\right\|_0+\left\|v^N(x,t)-v_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0, \tag{14}$$

$$\left\|u(x,t)-u_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0 \leqslant \left\|u(x,t)-u^N(x,t)\right\|_0+\left\|u^N(x,t)-u_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0. \tag{15}$$

Оценим норму разности между точным и приближенным решениями следующим образом. Рассмотрим второе слагаемое правой части неравенства (14)

$$\left\|v^N(x,t)-v_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0^2=\sum_{k=1}^{N}\left(e^{2\lambda_k^+ t}(g_k^+-g_{k_\varepsilon}^+)^2+e^{2\lambda_k^- t}(g_k^- - g_{k_\varepsilon}^-)^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{2\lambda_N^+ t}\sum_{k=1}^{N}((g_k^+-g_{k_\varepsilon}^+)^2+(g_k^- - g_{k_\varepsilon}^-)^2)\leqslant e^{2\lambda_N^+ t}\varepsilon^2. \tag{16}$$

Далее оценим первое слагаемое в правой части неравенства (14). Из (8) и (10) следует

$$\left\|v(x,t)-v^N(x,t)\right\|_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(e^{2\lambda_k^+ t}\left\{g_k^+\right\}^2+e^{2\lambda_k^- t}\left\{g_k^-\right\}^2\right).$$

Оценим

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^+ t}\left\{g_k^+\right\}^2 \tag{17}$$

при условии $(u(x,t),\, v(x,t))\in M$ или

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{2\lambda_k^+ T}\left\{g_k^+\right\}^2\leqslant m^2. \tag{18}$$

Для оценки (17) при условии (18) применим метод множителей Лагранжа и получим, что

$$g_k^+=\begin{cases} 0, & k\neq N+1,\\ e^{-\lambda_{N+1}^+ T} m, & k=N+1,\end{cases}$$

тогда

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^+ t}\left\{g_k^+\right\}^2\leqslant m^2 e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}.$$

Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left\{g_k^+\right\}^2+\left\{g_k^-\right\}^2\right)$ сходится, получим

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} e^{2\lambda_k^- t}\left\{g_k^-\right\}^2 \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty}\left\{g_k^-\right\}^2=\alpha(N),$$

причем $\alpha(N)\to 0$ при $N\to\infty$. В результате для первого слагаемого (14) имеет место оценка

$$\left\|v(x,t)-v^N(x,t)\right\|_0^2 \leqslant m^2 e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}+\alpha(N).$$

Следовательно, из неравенств (14) и (16) имеем

$$0.5\left\|v(x,t)-v_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0^2 \leqslant e^{2\lambda_N^+ t}\varepsilon^2+m^2 e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}+\alpha(N). \tag{19}$$

Переходим к оценке правой части неравенства (15). Рассмотрим первое слагаемое

$$\left\|u(x,t)-u^N(x,t)\right\|_0^2=\sum_{k=N+1}^{\infty}\{g_k^+\}^2 t^2 e^{2\lambda_k^+ t}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\{g_k^-\}^2 t^2 e^{2\lambda_k^- t}.$$

Оценим

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\{g_k^+\}^2 t^2 e^{2\lambda_k^+ t}. \tag{20}$$

Учитывая условия $u(x,t)\in M$, легко заметить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{g_k^+\}^2 T^2 e^{2\lambda_k^+ T}\leqslant m^2. \tag{21}$$

Отсюда можно видеть, что (20) достигает максимального значения при условии (21) в случае, когда коэффициенты

$$g_k^+=\begin{cases} 0, & k\neq N+1,\\ me^{-\lambda_{N+1}^+ T}/T, & k=N+1.\end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\{g_k^+\}^2 t^2 e^{2\lambda_k^+ t}\leqslant m^2\left(\frac{t}{T}\right)^2 e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}, \tag{22}$$

так как

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\{+g_k^-\}^2 t^2 e^{2\lambda_k^- t}\leqslant t^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\{g_k^-\}^2=t^2\alpha(N).$$

Следовательно, из (22) имеем

$$\left\|u(x,t)-u^N(x,t)\right\|_0^2\leqslant m^2\left(\frac{t}{T}\right)^2 e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}+t^2\alpha(N). \tag{23}$$

Теперь оценим второе слагаемое в правой части неравенства (15):

$$\left\|u^N(x,t)-u_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0^2=\sum_{k=1}^{N}t^2\left(g_k^+-g_{k_\varepsilon}^+\right)^2 e^{2\lambda_k^+ t}+\sum_{k=1}^{N}t^2\left(g_k^--g_{k_\varepsilon}^-\right)^2 e^{2\lambda_k^- t}\leqslant t^2 e^{2\lambda_N^+ t}\varepsilon^2. \tag{24}$$

В результате, используя формулы (23) и (24) в (15), получим следующую оценку:

$$0.5\left\|u(x,t)-u_\varepsilon^N(x,t)\right\|_0^2 \leqslant t^2e^{2\lambda_N^+t}\varepsilon^2+m^2\left(\frac{t}{T}\right)^2e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}+t^2\alpha(N). \qquad (25)$$

Минимизируя правую часть неравенств (19) и (25) по N, находим соответствующие параметры регуляризации N.

3. Результаты численных расчетов

Для численного решения задачи (1)–(4) выбираем начальные данные в виде

$$f(x)=0, \quad g(x)=x^2-1,$$

а приближенные данные

$$g_\varepsilon(x)=\left(x^2-1\right)(1+\varepsilon).$$

Величину N выберем из условия

$$\inf_{N>0}\left(t^2e^{2\lambda_N^+t}\varepsilon^2+m^2\left(\frac{t}{T}\right)^2e^{2\lambda_{N+1}^+(t-T)}+t^2\alpha(N)\right).$$

Нетрудно заметить, что в нашем случае $\alpha(N)$ имеет вид $\frac{1}{N^p}$, $p>1$. В качества примера рассмотрим

$$m=200\,000, \quad T=1, \quad \varepsilon=10^{-4}, \quad N=2,$$

Т а б л и ц а 1. Приближенное решение $(u^N(x,t),v^N(x,t))$ по точным данным системы уравнений (1)–(4)

x	$t=0.05$	$t=0.1$	$t=0.2$	$t=0.3$	$t=0.4$	$t=0.5$
			$u^N(x,t)$			
-1	0	0	0	0	0	0
-0.7	-0.163	-0.3446	-0.849	-1.741	-3.4117	-6.5787
-0.4	-0.5947	-1.2774	-3.3206	-7.2513	-15.0548	-30.4488
-0.1	-2.3265	-5.0795	-13.8853	-31.975	-69.3527	-144.968
0.2	-5.0993	-11.1789	-30.9332	-72.0955	-157.842	-332.166
0.5	0.7846	1.9106	6.8394	19.4772	48.5927	111.1965
0.8	3.4741	7.8121	23.2135	57.7406	132.5338	288.0975
1	0	0	0	0	0	0
			$v^N(x,t)$			
-1	0	0	0	0	0	0
-0.7	-3.2602	-3.4455	-4.2451	-5.8034	-8.5292	-13.1574
-0.4	-11.8938	-12.7743	-16.6029	-24.1711	-37.6371	-60.8975
-0.1	-46.5303	-50.7945	-69.4267	-106.583	-173.382	-289.937
0.2	-101.986	-111.789	-154.666	-240.318	-394.605	-664.331
0.5	15.692	19.1057	34.1968	64.9239	121.4819	222.393
0.8	69.4821	78.1206	116.0676	192.4686	331.3346	576.195
1	0	0	0	0	0	0

Т а б л и ц а 2. Приближенное решение системы $(u_\varepsilon^N(x,t), v_\varepsilon^N(x,t))$ по приближенным данным

x	$t=0.05$	$t=0.1$	$t=0.2$	$t=0.3$	$t=0.4$	$t=0.5$
			$u_\varepsilon^N(x,t)$			
-1	0	0	0	0	0	0
-0.7	-0.163	-0.3446	-0.8491	-1.7412	-3.412	-6.5794
-0.4	-0.5947	-1.2776	-3.3209	-7.2521	-15.0563	-30.4518
-0.1	-2.3267	-5.08	-13.8867	-31.9782	-69.3597	-144.983
0.2	-5.0998	-11.18	-30.9363	-72.1027	-157.858	-332.199
0.5	0.7847	1.9108	6.8401	19.4791	48.5976	111.2076
0.8	3.4745	7.8128	23.2158	57.7464	132.5471	288.1263
1	0	0	0	0	0	0
			$v_\varepsilon^N(x,t)$			
-1	0	0	0	0	0	0
-0.7	-3.2605	-3.4458	-4.2455	-5.804	-8.53	-13.1588
-0.4	-11.895	-12.7756	-16.6046	-24.1735	-37.6408	-60.9036
-0.1	-46.535	-50.7996	-69.4336	-106.594	-173.399	-289.966
0.2	-101.996	-111.801	-154.682	-240.342	-394.645	-664.398
0.5	15.6936	19.1076	34.2003	64.9303	121.494	222.4152
0.8	69.489	78.1284	116.0792	192.4879	331.3677	576.2527
1	0	0	0	0	0	0

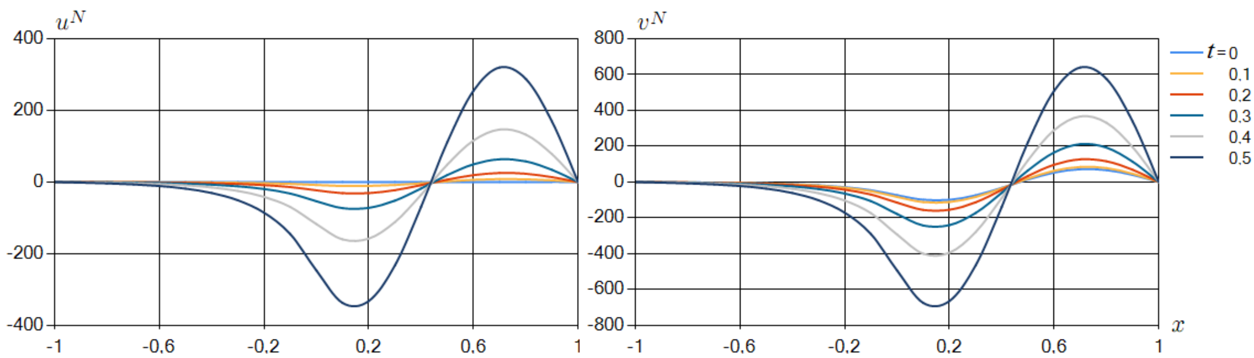

Рис. 1. График приближенных решений системы уравнений (1)–(4) по точным данным

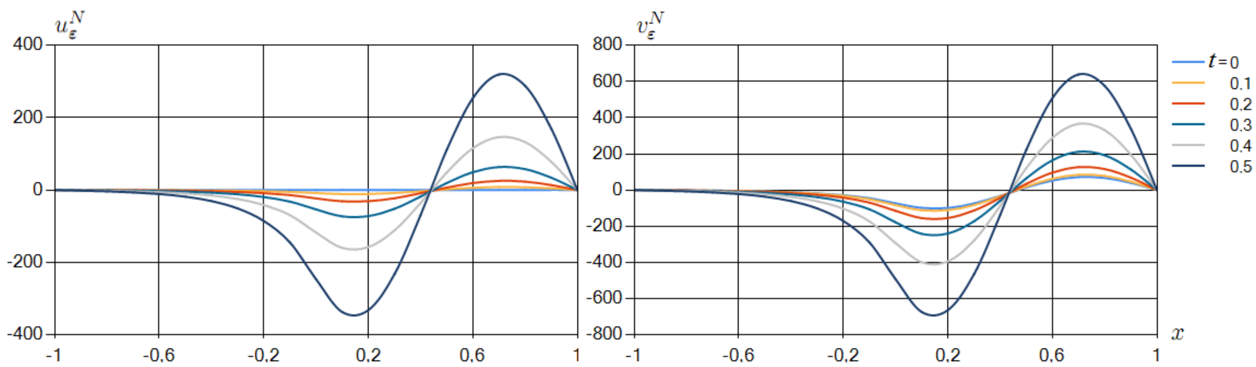

Рис. 2. График приближенных решений системы уравнений (1)–(4) по приближенным данным

$$m = 200\,000, \quad T = 0.5, \quad \varepsilon = 10^{-4}, \quad N = 3,$$
$$m = 6 \cdot 10^9, \quad T = 0.2, \quad \varepsilon = 10^{-8}, \quad N = 5.$$

Здесь значение m выбрано произвольно, а обычно оно определяется в зависимости от конкретной модели.

При $m = 350$, $T = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $N = 2$ значения решения системы приведены в табл. 1 и 2 и отражены на рис. 1 и 2. Видно, что численные значения приближенного решения и приближенного решения по приближенным данным достаточно близки к друг другу.

Заключение

Исследована некорректная классическая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Методом обобщенного спектрального разложения получен вид решения и доказана условная устойчивость данной задачи на множестве корректности. Построены приближенные решения. Для конкретных данных и множества корректности произведен численный расчет, который показывает, что численные значения решения близки друг другу при определенных значениях параметра регуляризации.

Список литературы / References

[1] **Пятков С.Г.** Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. Новосибирск, 1986. С. 65–84.
Pyatkov, S.G. Properties of eigenfunctions for a certain spectral problem and their applications // Some Applications of Functional Analysis to Equations of Mathematical Physics. Novosibirsk: Institut Matematiki, 1986. P. 65–84. (In Russ.)

[2] **Терсенов С.А.** Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1985. 105 с.
Tersenov, S.A. Parabolic equations with a varying direction of time. Novosibirsk, 1985. 105 p. (In Russ.)

[3] **Pulkin, I.S.** Gevrey problem for parabolic equations with changing time direction // Electronic J. of Differential Equations. 2006. No. 50. P. 1–9.

[4] **Levine, H.A.** Logarithmic convexity, first order differential inequalities and some applications // Trance. of AMS. 1970. Vol. 152. P. 299–320.

[5] **Фаязов К.С.** Некорректная задача Коши для дифференциального уравнения первого и второго порядков с операторными коэффициентами // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 702–706.
Fayazov, K.S. A certain ill-posed Cauchy problem for first-order and second-order differential equations with operator coefficients // Siberian Math. J. 1994. Vol. 35, No. 3. P. 631–635.

[6] **Фаязов К.С., Хажиев И.О.** Условная корректность краевой задачи для составного дифференциального уравнения четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 2015. № 4. С. 65–74.
Fayazov, K.S., Khazhiev, I.O. Conditional correctness of boundary-value problem for a composite fourth-order diferential equation // Izvestiya VUZ. Matematika. 2015. Vol. 59(4). P. 54–62.

[7] **Калиев И.А., Мугафаров М.Ф., Фаттахова О.В.** Обратная задача для параболического уравнения с переменным направлением времени с обобщенными условиями сопряжения // Уфимский матем. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 34–42.
Kaliev, I.A., Mugafarov, M.F., Fattakhova, O.V. Inverse problem for forward-backward parabolic equation with generalized sewing conditions // Ufa Mathematical J. 2011. Vol. 3, No. 2. P. 34–42. (In Russ.)

[8] **Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я.** Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.
Lavrentiev, M.M, Saveliev, L.Ya. Theory of operators and ill-posed problems. 2nd ed. Revised and complemented. Novosibirsk: Izdatel'stvo In-ta Matematiki, 2010. 941 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 20 июня 2016 г.,
с доработки — 27 февраля 2017 г.

Ill-posed initial-boundary value problem for a system of parabolic equations with varying direction of time

Fayazov, Kudratillo S.[1], Khazhiev, Ikrombek O.[2,*]

[1]Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, 100195, Uzbekistan
[2]National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174, Uzbekistan
[*]Corresponding author: Khazhiev, Ikrombek O., e-mail: h.ikrom@mail.ru

Purpose. Proof of the uniqueness and conditional stability of the initial-boundary value problem for a system of parabolic type equations with varying direction of time, as well as constructing approximate solutions which are stable to variation of data.

Methodology. The method of generalized spectral decomposition, the methods of logarithmic convexity and energy integrals and the method of regularization are used.

Findings. Set of correctness is found. The uniqueness and conditional stability theorems are proved. Corresponding estimations of conditional stability are obtained, an approximate solution stable on the correctness set is constructed. Estimates of closeness between the exact and approximate solutions are obtained, formulas for the regularization parameter are derived.

Originality/value. The conditional correctness of the initial-boundary value problem for a system of parabolic type equations with varying direction of time has been proved. A representation of the solution and approximate solutions are obtained. The numerical results show the possibility of a stable numerical solution of the required problem depending on the choice of the regularization parameter and the correctness set.

Keywords: system of equations, boundary value problem, ill-posed problems, a priori estimate, theorem of the uniqueness, estimate of conditional stability, regularization, parameter of regularization.

Received 20 June 2016
Received in revised form 27 February 2017