

# Сопоставление методов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения на основе вычислительных экспериментов

И. В. Бычков<sup>1</sup>, В. И. Зоркальцев<sup>2,\*</sup>, И. В. Мокрый<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия

<sup>2</sup>Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

\*Контактный e-mail: zork@isem.irk.ru

Рассмотрена процедура исследования свойств методов оценки параметров законов распределения случайной величины, базирующаяся на вычислительных экспериментах. Эта процедура использует многократную имитацию методом Монте-Карло реализаций набора значений случайной величины для исследуемого закона распределения при заданных его параметрах. Для каждой реализации осуществляется оценка параметров по исследуемому методу. В результате большого количества экспериментов определяются характеристики свойств методов, в том числе наличие смещений в оценках, величины среднеквадратических отклонений оценок.

Данная процедура иллюстрируется на примерах трех методов оценки параметров усеченного дискретного экспоненциального закона распределения. Каждый из методов рассматривается в трех вариантах, различающихся правилами задания весовых коэффициентов.

*Ключевые слова:* метод Монте-Карло, оценка параметров, экспоненциальный закон.

*Библиографическая ссылка:* Бычков И.В., Зоркальцев В.И., Мокрый И.В. Сопоставление методов оценки параметров усеченного экспоненциального закона распределения на основе вычислительных экспериментов // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23, № 5. С. 3–20. DOI: 10.25743/ICT.2018.23.5.002.

## 1. Модель, имитирующая исследуемую ситуацию

Обозначим  $t = 1, \dots, k$  последовательность номеров интервалов вещественных чисел, в один из которых попадает случайная величина. Границы  $t$ -го интервала определяются от  $t-1$  до  $t$ . Здесь  $k$  — максимальное (не меньше двух) число рассматриваемых в модели интервалов.

Обозначим  $P_t$  вероятность попадания случайной величины в интервал  $t$ . Поскольку любая из рассматриваемых в эксперименте величин обязательно находится в одном из указанных интервалов, то

$$\sum_{t=1}^k P_t = 1.$$

Причем отношения вероятностей для двух соседних интервалов неизменны:

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = P, \quad t = 1, \dots, k-1,$$

при некотором  $P \in (0, 1)$ .

Параметр  $P$  есть условная вероятность того, что случайная величина примет значение, большее  $t+1$ , при условии, что она приняла значение, большее  $t$ .

Следовательно,

$$P_t = A(P)^t, \quad t = 1, \dots, k, \quad (1)$$

где

$$A = \frac{1-P}{P(1-(P)^k)}. \quad (2)$$

Поэтому для задания величин  $P_t$  при всех  $t = 1, \dots, k$  достаточно располагать значением величины  $P$ . Для наглядности можем считать, что рассматриваемая случайная величина равномерно распределена на отрезке  $[0, 1]$ . Этот отрезок разбит на последовательность интервалов с длинами  $P_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ .

Изложенную ситуацию можно назвать усеченным экспоненциальным распределением, поскольку интервалы с номерами  $t > k$  исключены. Экспоненциальное распределение соответствует предельной ситуации  $k = \infty$ . Это распределение называют также показательным [1]. При  $k = 2$  изложенная модель реализации случайных событий равносильна классической схеме Бернулли [2]. В этом случае величина  $P_1$  интерпретируется как вероятность реализации события в схеме Бернулли, а величина  $P_2$  — как вероятность нереализации события.

Экспериментом будем называть процедуру распределения методом Монте-Карло заданного количества из  $N$  случайных величин по  $k$  интервалам — формирование чисел  $N_t$  на основе указанных вероятностей  $P_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ . Здесь  $N_t$  — количество попавших в интервал  $t$  величин из общего числа испытаний в эксперименте. Тогда

$$N = \sum_{t=1}^k N_t.$$

На основе этих данных можно рассчитать частоту попадания случайной величины в разные интервалы:

$$n_t = \frac{N_t}{N}, \quad t = 1, \dots, k.$$

Экзогенными параметрами в этом эксперименте являются: количество случайных величин  $N$ , количество интервалов  $k$  и вероятность  $P$ , из которой по формулам (1), (2) определяются величины  $P_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ . Задачей, исследуемой в данной статье, является анализ методов оценки вероятностей  $\tilde{P}_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ , на основе полученных в результате отдельного эксперимента чисел  $N_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ .

### Общее представление метода оценки параметров как отображение экспериментальных данных в результаты расчета

Из полученных в отдельном эксперименте значений  $N_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ , можно, используя какой-то метод, оценить значения вероятностей  $P, P_t$ ,  $t = 1, \dots, k$  (далее будут рассмотрены несколько вариантов возможных алгоритмов расчета). Получаемые оценки

обозначим  $\tilde{P}, \tilde{P}_t, t = 1, \dots, k$ . Они связаны соотношениями, аналогичными (1), (2):

$$\tilde{P}_t = \tilde{A}(\tilde{P})^t, \quad t = 1, \dots, k,$$

где

$$\tilde{A} = \frac{1 - \tilde{P}}{\tilde{P}(1 - (\tilde{P})^k)}.$$

Согласно этим формулам достаточно иметь оценку  $\tilde{P}$ , из которой вытекают значения  $\tilde{P}_t, t = 1, \dots, k$ .

Для оценок  $\tilde{P}, \tilde{P}_t, t = 1, \dots, k$ , могут применяться разные методы, обладающие своими достоинствами и недостатками. Сравнительный анализ этих методов на основе вычислительных экспериментов, осуществляемых методом Монте-Карло, составляет цель представленных здесь исследований.

Исходные вероятности и их оценки удобно (в том числе для построения динамических моделей) представлять в виде экспоненциальной зависимости. В таком случае

$$\begin{aligned} P &= \exp(-\lambda), & \tilde{P} &= \exp(-\tilde{\lambda}), \\ P_t &= B(\lambda) \exp(-\lambda t), & \tilde{P}_t &= B(\tilde{\lambda}) \exp(-\tilde{\lambda} t), \quad t = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B(\lambda) = 1 / \sum_{t=1}^k \exp(-\lambda t).$$

Здесь заданным является параметр  $\lambda > 0$ . Обозначим  $\tilde{\lambda}$  положительную величину, являющуюся оценкой параметра  $\lambda$  в результате применения к выборке  $N_t, t = 1, \dots, k$ , какого-либо метода.

Экспоненциальный закон распределения случайной величины и родственные ему законы широко используются в анализе надежности технических объектов и систем, а также в биологии, медицине, страховании [3–6]. Исходным импульсом для представленных в данной статье исследований послужила рассмотренная в [3] конкретная задача оценки параметров закона распределения по возрастам рыб в оз. Байкал на основе данных экспериментальных отловов.

Следует различать три источника погрешности в оценках. Один из них — неадекватность рассматриваемой модели. Такой вид погрешности здесь не рассматривается. Мы элиминировались от него за счет имитации случайной выборки методом Монте-Карло при априори заданном законе распределения. Это позволяет сосредоточить внимание на двух других источниках погрешности — ограниченность используемой выборки и особенности алгоритмов оценки.

## 2. Методика исследования методов

При фиксированных значениях параметров  $k, N, \lambda$  осуществляется многократная имитация (на основе метода Монте-Карло) реализации величин  $N_t^i, t = 1, \dots, k$ . Здесь в дополнение к обозначениям в предыдущем разделе введен индекс  $i = 1, \dots, m$  — номер эксперимента. Отметим, что во всех представленных далее результатах использовалось одно и то же количество экспериментов  $m = 50\,000$ .

В данной статье ограничимся исследованиями для значений параметров  $k = 5$ ,  $\lambda = 0.6$ . Варьируемым параметром будет только число  $N$ . В исследованиях разных методов оценки при одних и тех же значениях параметра  $N$  использовались одни и те же наборы экспериментальных данных  $N_t^i$  при указанном общем количестве экспериментов  $m$ .

Заметим, что выбранное большое число экспериментов  $m$  обеспечивало нужную устойчивость результатов. На основе данных  $N_t^i$ ,  $t = 1, \dots, k$ , полученных в эксперименте  $i$ , используя один из рассматриваемых далее методов, определяли оценку  $\tilde{\lambda}_i$ . Затем рассматривали среднее значение этого коэффициента по всем экспериментам для данного метода:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i.$$

Вполне естественно ожидать, что оценка  $\tilde{\lambda}_i$  в каждом отдельном эксперименте будет отличаться от исходного коэффициента  $\lambda$ . Возникает вопрос, имеют ли эти различия систематический или чисто случайный характер? Существенное отклонение среднего значения  $\bar{\lambda}$  при большом количестве испытаний  $m$  будет означать смещенную оценку параметра  $\lambda$ . Чем больше такое смещение по абсолютной величине, тем, очевидно, хуже метод.

Второй показатель качества метода, который будет использоваться далее, — среднеквадратическое отклонение оценок от их среднего уровня

$$v = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\tilde{\lambda}_i - \bar{\lambda})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Большее значение  $v$  свидетельствует о большем разбросе оценок, меньшей надежности каждого из них в качестве представителя средней ожидаемой оценки.

Во всех рассматриваемых далее методах оценки параметров используются весовые коэффициенты  $h_t$  — положительные величины, соизмеряющие данные для разных интервалов  $t = 1, \dots, k$ . Для каждого из методов рассмотрены три способа взвешивания.

1. Одинаковые весовые коэффициенты. В этом случае

$$h_t^1 = c^1, \quad t = 1, \dots, k,$$

где  $c^1$  — некоторая положительная константа.

2. Весовые коэффициенты, пропорциональные оценкам вероятностей распределения случайных величин по интервалам:

$$h_t^2 = c^2 \tilde{P}_t, \quad t = 1, \dots, k, \quad (4)$$

где  $c^2$  — некоторая положительная величина.

3. Весовые коэффициенты, пропорциональные обратным значениям дисперсий оценок вероятностей  $\tilde{P}_t$ :

$$h_t^3 = \frac{c^3}{\tilde{P}_t(1 - \tilde{P}_t)}, \quad t = 1, \dots, k. \quad (5)$$

Для первых двух методов необходимо, чтобы весовые коэффициенты в сумме для интервалов  $t = 1, \dots, k - 1$  были равны единице:

$$\sum_{t=1}^{k-1} h_t = 1.$$

Т а б л и ц а 1. Значения весовых коэффициентов в случае, когда оценки вероятности совпадают с исходными вероятностями

Весовой коэффициент	Номер интервала $t$				
	1	2	3	4	5
$h_t^1$	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
$h_t^2$	0.496	0.272	0.149	0.082	0.045
$h_t^3$	0.132	0.167	0.261	0.440	0.770

Поэтому будем считать, что

$$c^1 = \frac{1}{k-1}, \quad (6)$$

$$c^2 = 1 / \sum_{t=1}^{k-1} \tilde{P}_t, \quad (7)$$

$$c^3 = 1 / \sum_{t=1}^{k-1} \frac{1}{\tilde{P}_t(1-\tilde{P}_t)}. \quad (8)$$

В табл. 1 приведены значения трех весовых коэффициентов в идеализированном случае, когда оцениваемые вероятности совпадают с исходными, т.е. когда  $\tilde{P}_t = P_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ .

Согласно (4), (7) весовые коэффициенты  $h_t^2$  убывают по экспоненциальному закону. Их использование отражает тот факт, что с увеличением  $t$  происходит сокращение, как правило, числа попаданий случайных величин  $N_t$  в интервал  $t$ , в связи с чем снижается надежность данных для оценок. Преимущества таких весовых коэффициентов на примере оценки коэффициентов смертности большой и малой голомянок по данным экспериментальных отловов обсуждались в статье [3]. Необходимо отметить, что вместо “истинных” значений вероятности  $P_t$ , которые считаются неизвестными, при обработке экспериментальных данных используются оценки  $\tilde{P}_t$ . Они могут отклоняться от  $P_t$ . Поэтому численно оценки рассматриваемых весовых коэффициентов могут отличаться в конкретном эксперименте от значений, представленных в табл. 1. При этом общий характер изменения весов будет таким же.

Весовые коэффициенты  $h_t^3$  отражают обычно используемую рекомендацию к выбору весов отдельных наблюдений при оценивании параметров. Считается, что эти веса должны быть обратно пропорциональны погрешностям измерений, которые определяются дисперсией наблюдаемого значения показателя [7, 8]. Величина  $P_t(1-P_t)$  соответствует теоретической дисперсии частоты  $n_t$  попадания случайной величины в интервал  $t$ .

Необходимо подчеркнуть, что вместо “истинных” значений вероятности  $P_t$ , которые считаются неизвестными, при расчетах с обсуждаемыми здесь весами также используются оценки  $\tilde{P}_t$ , которые могут отклоняться от  $P_t$ . Поэтому применяемые в расчетах оценки дисперсии могут отличаться от самих дисперсий.

### Итеративная процедура определения весовых коэффициентов

При задании весовых коэффициентов  $h_t^2$ ,  $h_t^3$  в формулах (4), (5) используются значения оценок вероятности, которые еще предстоит проанализировать. Здесь имеется в виду

следующая итеративная процедура. Сначала задаются оценки вероятностей  $\tilde{P}_t$  равными частотам  $n_t$ . Затем с помощью формул (4) или (5), а также нормировок (7) или (8) определяем веса  $h_t^2$  или  $h_t^3$ . С использованием этих весов на основе рассматриваемого метода находим оценки  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{P}$ . Затем вычисляем  $\tilde{P}_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ . Пересчитываем весовые коэффициенты  $h_t$  и заново вычисляем оценки  $\tilde{\lambda}$  и  $\tilde{P}$ , а также вероятности  $\tilde{P}_t$ . Процесс повторяется до тех пор, пока новые оценки  $\tilde{\lambda}$  не совпадут с требуемой точностью с оценками  $\tilde{\lambda}$ , полученными на предыдущей итерации. Обычно это происходит в результате небольшого числа (одной-двух) итераций при требуемом отличии значений  $\tilde{\lambda}$  на соседних итерациях не более чем в  $10^{-5}$ .

Для вычисления по всем рассматриваемым далее методам необходимо, чтобы величины  $N_t$  для всех  $t = 1, \dots, k$  были ненулевыми. Случай, когда  $N_t = 0$  для какого-либо  $t$ , вполне возможен в конкретном эксперименте. При его реализации можно было бы попытаться использовать какие-то модификации рассматриваемых методов. В данной статье не будем останавливаться на этих возможных модификациях. Просто исключим такой эксперимент из рассмотрения.

Ограничимся рассмотрением трех наиболее простых в вычислительном отношении “наглядных” методов. Эти методы, особенно первые два из них, не нуждаются в использовании специальных вычислительных программ. Ими можно пользоваться непосредственно в “полевых” условиях.

Особо отметим, что в рамках данной статьи под методом оценки параметров понимается общее правило вычислений, в рамках которого возможны разные способы задания весовых коэффициентов. Поскольку для каждого из анализируемых здесь методов рассматриваются три возможных варианта задания весовых коэффициентов, фактически будут представлены результаты вычислений по девяти конкретным алгоритмам оценки параметров.

### 3. Оценка условной вероятности $P$ путем усреднения соотношений частот

В качестве наиболее простого в вычислительном отношении и наглядного в интерпретации может рассматриваться метод, базирующийся на усреднении соотношений частот. Отношение вероятностей попадания случайной величины в два соседних интервала равно условной вероятности  $P$ , поэтому в качестве оценки этой вероятности можно воспользоваться взвешенным средним арифметическим соотношений частот попадания случайной величины в соседние интервалы. В таком случае

$$\tilde{P} = \sum_{t=1}^{k-1} h_t \frac{N_{t+1}}{N_t}.$$

Заметим, если нас интересуют только оценка условной вероятности  $\tilde{P}$  и оценки вероятностей  $\tilde{P}_t$  попадания случайной величины в интервал  $t = 1, \dots, k$ , то при использовании обсуждаемого здесь метода можно обойтись только четырьмя арифметическими действиями. На рис. 1 представлены результаты экспериментальных расчетов по этому методу. Примечательно, что при относительно малых значениях числа испытаний в каждом эксперименте (особенно для  $N$  в диапазоне от 50 до 100) наблюдается сильное смещение в сторону занижения значения параметра  $\tilde{\lambda}$ . Это смещение уменьшается по абсолютной величине с ростом числа испытаний.

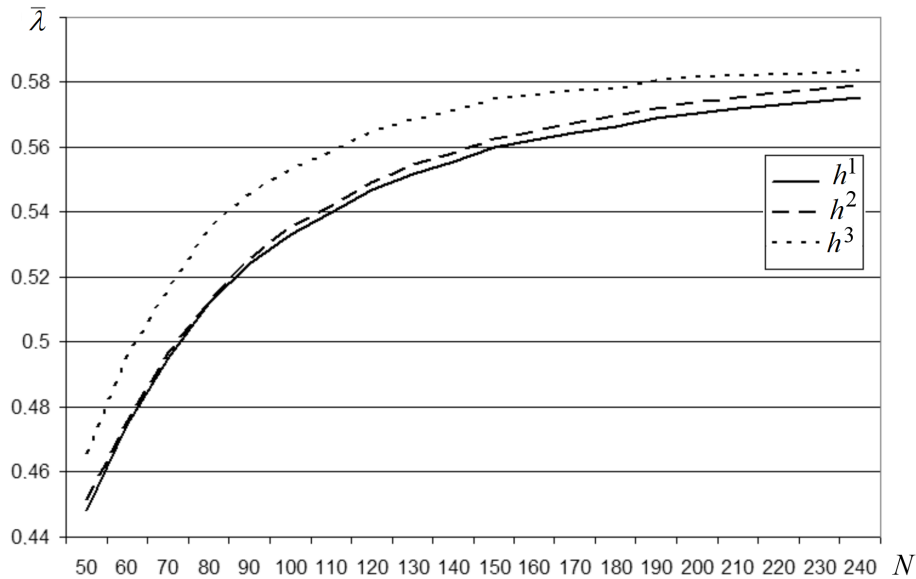


Рис. 1. Изменение средних значений оценок коэффициентов  $\bar{\lambda}$  в зависимости от объема выборки  $N$  (истинное значение  $\lambda = 0.6$ ) для первого метода

При  $N = 50$  отклонение величин  $\bar{\lambda}$  от “истинного” значения  $\lambda$  достигает 25%. Оценка  $\bar{\lambda}$  равна 0.438 при первом способе взвешивания. Она равна 0.441 при втором способе взвешивания. И она равна 0.455 при третьем способе взвешивания. Любопытно, что такой же порядок отклонений для трех способов взвешивания сохраняется при всех рассмотренных значениях  $N$  вплоть до  $N = 2000$ . При  $N = 100$  эти отклонения составляют примерно 10% от “истинного” значения  $\lambda$ . При  $N = 1000$  они становятся меньше 1%.

В табл. 2 приведены величины  $P, \tilde{P}_t$ , соответствующие нескольким значениям  $\lambda \leq 0.6$ . Видно, как меняются оценки  $\tilde{P}, \tilde{P}_t$  при снижении оценки параметра  $\tilde{\lambda}$  против его “истинного” значения  $\lambda = 0.6$ . Смещение математического ожидания оценки  $\tilde{\lambda}$  в сторону занижения означает завышение математического ожидания оценки условной вероятности  $\tilde{P}$  против ее “истинного” значения  $P$ . Из этой таблицы видно, что оценки условной вероятности  $\tilde{P}$  отклоняются от исходного их значения в диапазоне от 1% (при  $\tilde{\lambda} = 0.59$ ) до 16% (при  $\tilde{\lambda} = 0.45$ ). Отклонения  $\tilde{P}_t$  от значений  $P_t$  также очень существенны. Причем оценки  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$  отклоняются от  $P_1, P_2$  соответственно в сторону занижения, в то время как величины  $\tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5$  отклоняются от соответствующих значений  $P_3, P_4$  и  $P_5$  в сторону завышения.

Т а б л и ц а 2. Изменения условной вероятности  $P$  и вероятностей  $P_t$  попадания случайной величины в интервалы  $t = 1, \dots, 5$  в зависимости от значения параметра  $\lambda$  (случай  $\lambda \leq 0.6$ )

$\lambda$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
0.6	0.549	0.475	0.261	0.143	0.079	0.043
0.59	0.554	0.470	0.261	0.145	0.080	0.044
0.55	0.577	0.451	0.260	0.150	0.087	0.050
0.5	0.606	0.429	0.260	0.158	0.096	0.058
0.45	0.638	0.405	0.258	0.165	0.105	0.068

Экспериментально установленный факт смещения математического ожидания величин  $\tilde{P}$  в сторону завышения может получить теоретическое обоснование.

Пусть отношение  $N_{t+1}/N_t$  близко к значению  $P$ . При случайной реализации возможны отклонения как в числителе, так и в знаменателе на некоторую положительную величину  $\Delta$  в сторону увеличения и в сторону уменьшения. Если это происходит с числителем, то такие отклонения приводят к одинаковым по абсолютной величине отклонениям от исходного значения числа  $N_{t+1}/N_t$ :

$$\left| \frac{N_{t+1} + \Delta}{N_t} - \frac{N_{t+1}}{N_t} \right| = \left| \frac{N_{t+1} - \Delta}{N_t} - \frac{N_{t+1}}{N_t} \right|.$$

Одинаковые по абсолютной величине отклонения в знаменателе дают разные по абсолютной величине отклонения рассматриваемой дроби. При  $0 < \Delta < N_t$  выполняются неравенства

$$\frac{N_{t+1}}{N_t - \Delta} - \frac{N_{t+1}}{N_t} > \frac{N_{t+1}}{N_t} - \frac{N_{t+1}}{N_t + \Delta} > 0.$$

Из рис. 1 видно, что для рассматриваемого метода заметное меньшее смещение коэффициента  $\bar{\lambda}$  имеет место для третьего способа взвешивания. Первый и второй способы дают близкие значения величины смещения. Несколько меньшие значения получаются с помощью второго способа взвешивания. При всех  $N$  выполняются неравенства

$$\lambda > \bar{\lambda}^3 > \bar{\lambda}^2 > \bar{\lambda}^1,$$

где  $\bar{\lambda}^1, \bar{\lambda}^2, \bar{\lambda}^3$  — средние значения оценок  $\tilde{\lambda}_i^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , по всем экспериментам  $i = 1, \dots, m$  при использовании весовых коэффициентов  $h^1, h^2, h^3$ .

Из рис. 2 видно, что при всех трех способах взвешивания имеет место значительное среднеквадратическое отклонение оценок  $\tilde{\lambda}_i$  в отдельных экспериментах  $i = 1, \dots, m$  от их средних значений  $\bar{\lambda}$ . Это среднеквадратическое отклонение составляет более 50 %

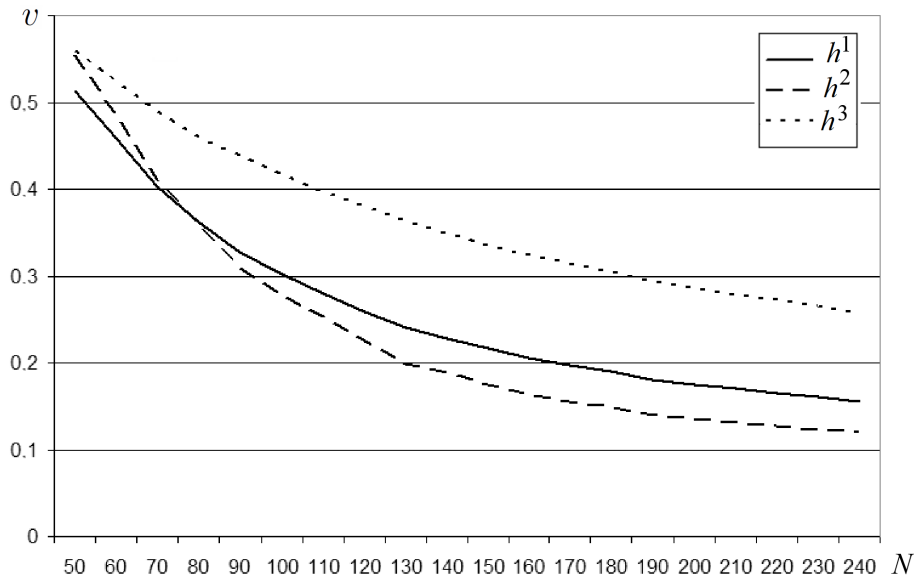


Рис. 2. Относительные среднеквадратические отклонения коэффициентов  $\tilde{\lambda}_i$  по экспериментам  $i = 1, \dots, m$  от их средних значений в зависимости от объема выборки  $N$  для первого метода



от величины  $\bar{\lambda}$  при  $N = 50$ . С ростом  $N$  величина  $v/\bar{\lambda}$  монотонно сокращается. Уже при  $N = 100$  для первых двух способов взвешивания величина относительного отклонения становится меньше 30%. При  $N = 1000$  относительная величина средних отклонений уменьшается до 6% при втором способе взвешивания, до 7% при первом способе и до 14% при третьем.

Любопытно, что до  $N = 80$  выполняются следующие неравенства для среднеквадратических отклонений:

$$v^1 < v^2 < v^3.$$

После  $N = 90$  стабильно выполняется неравенство

$$v^2 < v^1 < v^3.$$

Здесь  $v^1, v^2, v^3$  — среднеквадратическое отклонение при использовании весов  $h^1, h^2, h^3$ . Величина  $v^3$  стабильно намного больше (более чем в два раза), чем величина  $v^2$  при  $N > 150$ . Значение  $v^2$  существенно меньше  $v^1$ . Поэтому при использовании данного метода можно рекомендовать ориентироваться на веса  $h^2$  или (несколько худший, но более простой в вычислительном отношении вариант) на одинаковые веса  $h^1$ .

#### 4. Метод, основанный на усреднении параметра $\lambda$

Из (1), (3) следует, что

$$\lambda = -\ln \frac{P_{t+1}}{P_t}, \quad t = 1, \dots, k-1.$$

Поскольку соотношение  $N_{t+1}/N_t$  можно считать оценкой соотношения  $P_t/P_{t+1}$ , вполне естественно будет воспользоваться усреднением соотношений  $\ln(N_{t+1}/N_t)$ ,  $t = 1, \dots, k-1$ , в качестве оценки коэффициента  $\lambda$ . Получаем расчетную формулу

$$\tilde{\lambda} = -\sum_{t=1}^{k-1} h_t \ln \frac{N_{t+1}}{N_t}.$$

Имея коэффициент  $\tilde{\lambda}$ , из (3) можем рассчитать оценку  $\tilde{P}$ . Затем по формуле (2) вычислим  $\tilde{A}$  и по формуле (1) получим значения  $\tilde{P}_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ .

На рис. 3 представлены значения усредненных оценок  $\tilde{\lambda}$  по данному методу в зависимости от объема выборки  $N$ . Следует отметить, что в отличие от рассмотренного ранее метода в данном случае средние значения оценок  $\tilde{\lambda}$  при всех  $N$  смещены в сторону завышения относительно истинного значения коэффициента  $\lambda = 0.6$ . Причем отклонения существенные. Они достигают 10% от истинного значения  $\lambda$  (при третьем способе взвешивания для  $N = 100$ ). Эти отклонения снижаются и стремятся к нулю с ростом  $N$ . Особый интерес вызывает тот факт, что в отличие от общей тенденции при  $N = 50$  смещение для двух способов взвешивания оказалось значительно ниже, чем при  $N = 100$ .

В табл. 3 приведены величины  $P$ ,  $P_t$ , соответствующие нескольким значениям  $\lambda > 0.6$ . Данные этой таблицы показывают, что смещение математического ожидания оценки  $\tilde{\lambda}$  в сторону завышения означает систематическое занижение математического ожидания оценки вероятности  $\tilde{P}$  против ее “истинного” значения  $P$ . Из этой таблицы видно, что оценки условной вероятности  $\tilde{P}$  отклоняются от исходного их значения  $P$  в диапазоне от 1% (при  $\tilde{\lambda} = 0.62$ ) до 6% (при  $\tilde{\lambda} = 0.66$ ). Отклонения  $\tilde{P}_t$  от значений  $P_t$

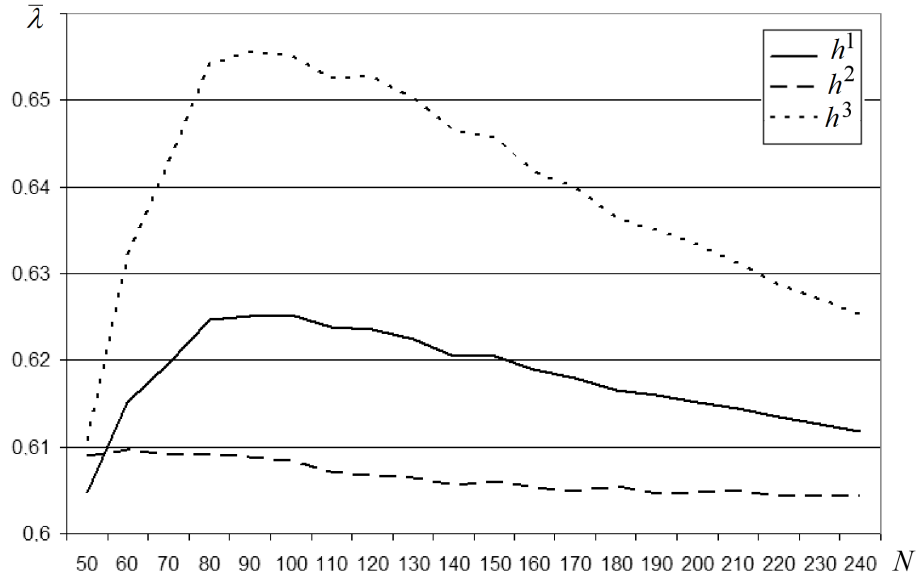


Рис. 3. Изменения средних значений оценок коэффициентов  $\bar{\lambda}$  в зависимости от объема выборки  $N$  (истинное значение  $\lambda = 0.6$ ) для второго метода

также очень существенны. Причем  $\tilde{P}_1$  отклоняется от  $P_1$  в сторону завышения, в то время как величины  $\tilde{P}_2, \tilde{P}_3, \tilde{P}_4, \tilde{P}_5$  отклоняются от соответствующих значений  $P_2, P_3, P_4$  и  $P_5$  в сторону занижения.

Отметим, что рассматриваемый здесь способ оценивания равносильен использованию в качестве оценки вероятности перехода средней геометрической с весами  $h_t$  от соотношения частот соседних интервалов. То есть для рассматриваемого здесь метода

$$\tilde{P} = \prod_{t=1}^{k-1} \left( \frac{N_{t+1}}{N_t} \right)^{h_t}.$$

Известно, что среднее геометрическое от неодинаковых положительных величин всегда меньше, чем среднее арифметическое с теми же весовыми коэффициентами (считается, что все они положительные, в сумме равные единице). То есть выполняется неравенство

$$\prod_{t=1}^{k-1} \left( \frac{N_{t+1}}{N_t} \right)^{h_t} < \sum_{t=1}^{k-1} h_t \left( \frac{N_{t+1}}{N_t} \right).$$

Поэтому

$$\tilde{P}^2 < \tilde{P}^1.$$

Т а б л и ц а 3. Изменения условной вероятности  $P$  и вероятности нахождения  $P_t$  в интервалах  $t = 1, \dots, 5$  в зависимости от значений параметра  $\lambda$  (случай  $\lambda > 0.6$ )

$\lambda$	$P$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$
0.66	0.5169	0.5017	0.2593	0.1340	0.0693	0.0358
0.64	0.5273	0.4928	0.2598	0.1370	0.0722	0.0381
0.62	0.5379	0.4839	0.2603	0.1400	0.0753	0.0405
0.60	0.5488	0.4748	0.2606	0.1430	0.0785	0.0431

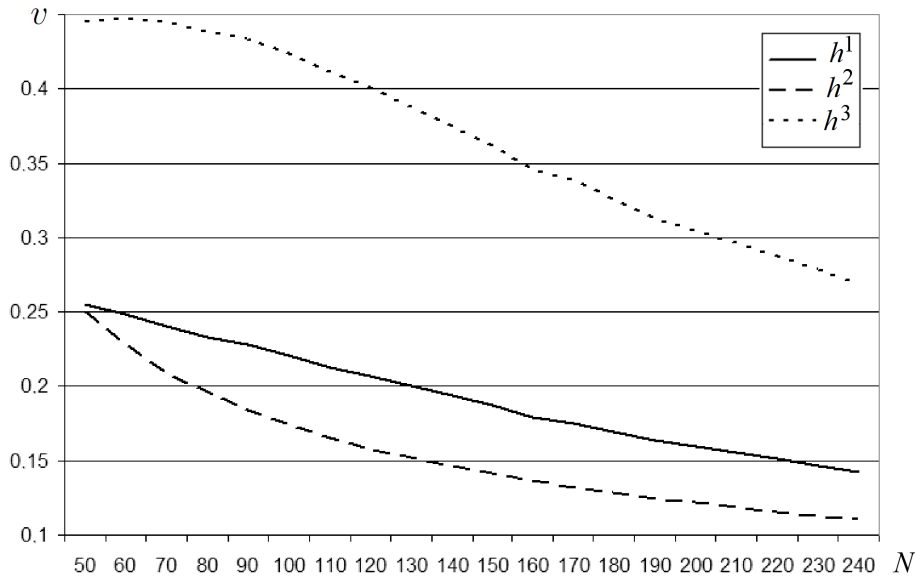


Рис. 4. Относительные среднеквадратические отклонения от средних значений оценок коэффициентов  $\tilde{\lambda}_i$  по экспериментам  $i = 1, \dots, m$  в зависимости от объема выборки  $N$  для второго метода

Здесь  $\tilde{P}^1, \tilde{P}^2$  — оценки вероятности перехода по первому (рассмотренному в предыдущем разделе) и второму (рассматриваемому в этом разделе) методам при одних и тех же весовых коэффициентах. Представленные данные экспериментальных расчетов подтверждают это неравенство. Более того, выявлено наличие более сильных свойств: между оценками  $\tilde{P}^1$  и  $\tilde{P}^2$  находится “истинное” значение условной вероятности. Здесь  $\bar{P}^1$  и  $\bar{P}^2$  — среднегеометрические значения оценок  $\tilde{P}^1$  и  $\tilde{P}^2$  по всем экспериментам, полученные первым и вторым методами. При всех рассмотренных значениях  $N$  и любых из трех способов задания весовых коэффициентов выполняются неравенства

$$\bar{P}^2 < P < \bar{P}^1.$$

Эти неравенства равносильны следующим неравенствам, наблюдаемым на рис. 1, 3,

$$\bar{\lambda}^2 > \lambda > \bar{\lambda}^1,$$

где  $\bar{\lambda}^1, \bar{\lambda}^2$  — средние оценки коэффициента  $\lambda$ , рассчитываемые первым и вторым методами.

Все три способа взвешивания дают для рассматриваемого метода существенные среднеквадратические отклонения в оценках параметров  $\tilde{\lambda}$  от их среднего значения (достигающие 50 %  $\bar{\lambda}$  при  $N = 100$  для третьего способа взвешивания).

Особо следует отметить факт возрастания среднеквадратического отклонения для первого и особенно для третьего способов взвешивания при увеличении объема выборки  $N$  с 50 до 100. Этот факт находится в противоречии с общей экспериментально выявленной (и априори ожидавшейся) тенденцией снижения и последующей стабилизации среднеквадратических отклонений с ростом числа испытаний  $N$  в эксперименте.

Из рис. 3 и 4 видно, что для рассматриваемого здесь метода наихудшим как по величине систематического смещения оценки  $\tilde{\lambda}$ , так и по среднеквадратическим отклонениям  $v$  является третий способ взвешивания. Наилучший для всех  $N$  — второй способ взвешивания.

## 5. Оценка параметра $\lambda$ методом наименьших квадратов на базе линеаризации

Здесь будет представлен метод оценки показателя  $\lambda$ , использованный в статье [3]. В его основе лежит соображение о том, что частоты распределения случайных величин по разным интервалам  $n_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ , можно рассматривать как оценку вероятностей  $P_t$  попадания случайной величины в разные интервалы. Эту вероятность можно представить как функцию

$$P_t = Be^{-\lambda t},$$

зависящую от параметров  $\lambda$  и  $B$ . Используя логарифмирование указанной нелинейной зависимости от искомых переменных, можно представить ее в виде эквивалентной линейной зависимости. Положим

$$y = \ln B.$$

Получаем уравнение линейной аппроксимации

$$y - \lambda t + \varepsilon_t = \ln \left( \frac{N_{t+1}}{N_t} \right), \quad t = 1, \dots, k, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_t$  — погрешность аппроксимации. Используем метод наименьших квадратов. Он состоит в решении задачи

$$\sum_{t=1}^k h_t(\varepsilon_t)^2 \rightarrow \min$$

при условии (9). Получим значения  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{\lambda}$  и  $\varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ . Нам потребуется только  $\tilde{\lambda}$ . Используя  $\tilde{\lambda}$ , можем вычислить  $\tilde{P}$ , затем  $\tilde{A}$  и после этого  $\tilde{P}_t$ ,  $t = 1, \dots, k$ .

На рис. 5 представлены средние значения по экспериментам параметра  $\tilde{\lambda}$  при разных  $N$  для трех способов заданных весовых коэффициентов. Как видно из рис. 3 и 5,

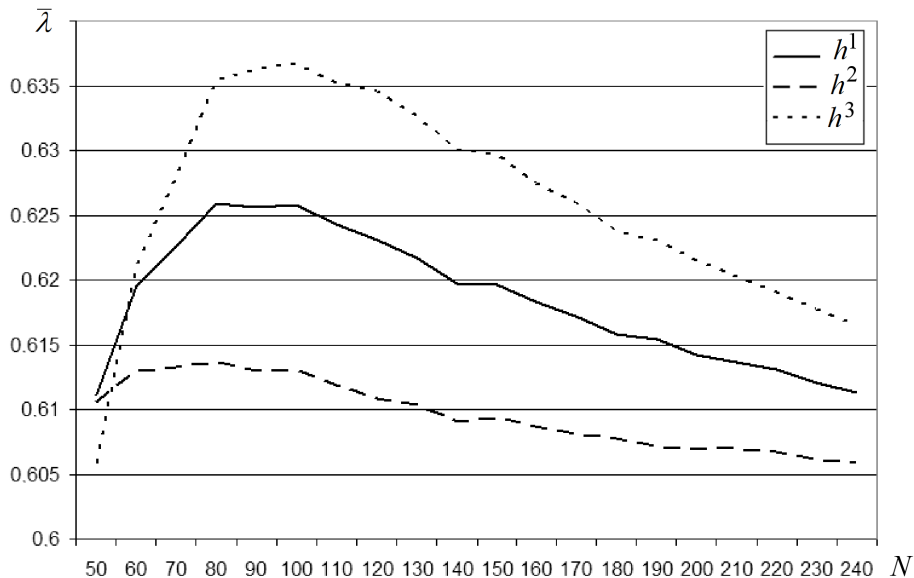


Рис. 5. Изменения средних значений оценок коэффициентов  $\tilde{\lambda}$  в зависимости от объема выборки  $N$  (истинное значение  $\lambda = 0.6$ ) для третьего метода

значение  $\bar{\lambda}$  имеет примерно такой же характер отклонения от истинного значения  $\lambda = 0.6$  для рассматриваемого здесь метода, как и для метода, рассмотренного в предыдущем разделе.

Так же, как и для метода из предыдущего раздела, наименьшее отклонение имеет место для второго способа задания весовых коэффициентов. На втором месте довольно устойчиво находится первый способ задания весовых коэффициентов, т. е. когда все весовые коэффициенты одинаковые. Третье место, как и в методе, рассмотренном в предыдущем разделе, занимает по отклонениям третий способ задания весовых коэффициентов. Для обоих методов при всех  $N$  выполняются неравенства

$$\lambda < \bar{\lambda}(h^2) < \bar{\lambda}(h^1) < \bar{\lambda}(h^3),$$

где  $\bar{\lambda}(h^j)$  — средние арифметические оценки коэффициента  $\lambda$  с использованием весовых коэффициентов с номером  $j = 1, 2, 3$ .

Можно также отметить, что использование второго варианта задания весовых коэффициентов для рассматриваемого здесь метода приводит к несколько бóльшим смещениям, чем для метода из предыдущего раздела:

$$\lambda < \bar{\lambda}^2(h^2) < \bar{\lambda}^3(h^2),$$

где  $\bar{\lambda}^2(h^2)$ ,  $\bar{\lambda}^3(h^2)$  — средние значения оценок коэффициента  $\lambda$  в случае применения второго и третьего методов с использованием второго варианта весовых коэффициентов.

При этом для первого и третьего вариантов весовых коэффициентов рассматриваемый здесь метод дает, как правило, существенно меньшее смещение, чем метод из предыдущего раздела:

$$\lambda < \bar{\lambda}^3(h^1) < \bar{\lambda}^2(h^2),$$

$$\lambda < \bar{\lambda}^3(h^3) < \bar{\lambda}^2(h^3).$$

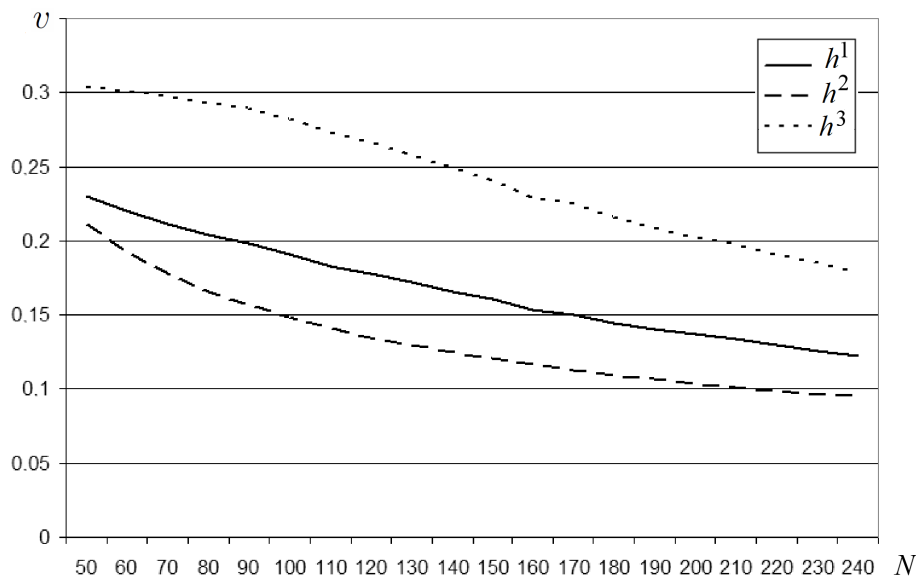


Рис. 6. Относительные среднеквадратические отклонения от средних значений оценок коэффициентов  $\tilde{\lambda}_i$  по экспериментам  $i = 1, \dots, m$  в зависимости от объема выборки  $N$  для третьего метода

Для рассматриваемого метода, как и для метода из предыдущего раздела, проявляется факт увеличения смещения  $\bar{\lambda}$  с ростом  $N$  в диапазоне от 50 до 100.

Из рис. 6 видно, что для рассматриваемого здесь метода также наибольшее среднеквадратическое отклонение дает использование третьего способа взвешивания, наименьшее — второго способа.

## 6. Обсуждение

Проведенные экспериментальные расчеты показывают, что все три рассмотренных метода дают удовлетворительные для экспресс-оценок результаты при относительно большом числе испытаний  $N$  в экспериментах. В качестве такого порогового значения, обеспечивающего приемлемые по точности результаты, можно принять  $N = 200$  (для рассматриваемых здесь значений  $\lambda$  и  $k$ ). В табл. 4 приведены полученные при  $N = 200$  в результате расчетов смещения величин  $\bar{\lambda}$  относительно  $\lambda$  для всех трех методов и трех способов задания весовых коэффициентов. Смещения представлены в процентах, т. е. они соответствуют показателям

$$\Delta = (\bar{\lambda} - \lambda) \cdot 100.$$

Как видно из таблицы, даже в самом худшем случае абсолютные значения смещений ( $|\Delta| = 3.0$ ) не превосходят 5% от значения коэффициента  $\lambda = 0.6$ . Для второго и третьего методов при втором способе задания весовых коэффициентов отклонения составляют менее 1% от значения  $\lambda$ .

При  $N = 200$  среднеквадратические отклонения не превышают 30% от коэффициента  $\lambda$ . Об этом свидетельствуют представленные в табл. 5 данные по показателю  $\sigma = v/\bar{\lambda}$ , рассчитанные для всех трех методов и трех способов взвешивания. По этому показателю существенно лидирующее положение занимает второй способ взвешивания при втором и третьем методах расчета.

С ростом объема выборки  $N$  оценки будут улучшаться по обоим рассматриваемым здесь показателям. Например, при  $N = 1000$  абсолютные значения смещения по всем рассматриваемым здесь способам оценивания не превышают 1% по абсолютной величине. Для второго и третьего методов при втором способе взвешивания это смещение становится меньше чем 0.2% (табл. 6). При этом более чем в два раза, по сравнению со случаем  $N = 200$ , уменьшаются относительные среднеквадратические отклонения (табл. 7). По этому показателю также лидирует второй способ взвешивания при втором и третьем методах.

Т а б л и ц а 4. Смещения средней величины оценок коэффициента  $\lambda$  при  $N = 200$  (выражены в сотых долях)

Весовой коэффициент	Метод расчета		
	1	2	3
$h^1$	-3.0	1.4	1.4
$h^2$	-2.7	0.4	0.6
$h^3$	-1.9	3.2	2.1

Т а б л и ц а 5. Среднеквадратические отклонения оценок коэффициентов  $\lambda$  от их средних значений при  $N = 200$  (выражены в относительных величинах к средним значениям)

Весовой коэффициент	Метод расчета		
	1	2	3
$h^1$	0.18	0.16	0.14
$h^2$	0.14	0.12	0.10
$h^3$	0.24	0.30	0.20

Т а б л и ц а 6. Смещения средней величины оценок коэффициента  $\lambda$  при  $N = 1000$  (выражены в сотых долях)

Весовой коэффициент	Метод расчета		
	1	2	3
$h^1$	-0.6	0.3	0.3
$h^2$	-0.5	0.1	0.1
$h^3$	-0.4	0.6	0.4

Т а б л и ц а 7. Среднеквадратические отклонения оценок коэффициентов  $\lambda$  от их средних значений при  $N = 1000$  (выражены в относительных величинах к средним значениям)

Весовой коэффициент	Метод расчета		
	1	2	3
$h^1$	0.07	0.07	0.06
$h^2$	0.06	0.05	0.05
$h^3$	0.12	0.12	0.08

На основе представленных в статье результатов расчетов можно рекомендовать к использованию второй либо третий метод экспресс-оценки параметров экспоненциального закона распределения (из рассмотренных здесь трех методов). Для обоих из этих методов наиболее эффективным является второй способ задания весовых коэффициентов. Для получения надежных оценок параметров экспоненциального закона распределения необходимо проводить не менее 200 испытаний в эксперименте.

Эти рекомендации справедливы при близких к рассмотренным в данной статье значениях  $\lambda = 0.6$  и  $k = 5$ . Если ожидаемые коэффициенты  $\lambda$  существенно меньше 0.6 и количество рассматриваемых интервалов  $k$  больше 5, то для получения надежных оценок, вероятно, потребуется большее количество испытаний в эксперименте. Этот и другие аспекты оценок нуждаются в дополнительных исследованиях.

## Заключение

Основным результатом исследований является демонстрация возможностей изучения свойств методов математической статистики на основе метода Монте-Карло. Технология многократных статистических испытаний позволила выявить интересные эффекты методов оценки параметров законов распределения. Естественно, что данная технология может быть дополнена наборами новых показателей качества метода оценки, применяться к другим, не рассмотренным в статье методам, к другим законам распределения случайной величины и методам оценки параметров распределения случайной величины. Эти возможности нуждаются в дальнейшем теоретическом осмыслении.

Представленные исследования возникли в связи с необходимостью решения научно-прикладной задачи оценки параметров жизнедеятельности отдельных видов рыб в оз. Байкал на основе результатов экспериментальных отловов. В каждом эксперименте вылавливается некоторое количество рыб (соответствующее числу  $N$  в используемых нами обозначениях) данного вида. Специалисты-ихтиологи распределяли выловленных рыб по возрастным группам  $t = 1, \dots, k$ , где  $t$  — возраст в годах,  $k$  — максимально допустимый возраст для данного вида рыб.

Располагаемые данные показывали, что в первом приближении для описания распределения по возрастам рассматриваемых видов рыб (большая и малая голомянка, омуль) можно использовать усеченный экспоненциальный закон распределения, рассмотренный в данной статье. В этом законе коэффициент  $\lambda$  используется как коэффициент смертности, величины  $P_t$  интерпретируются как вероятности дожития до возраста  $t$ .

В статье [3] для оценок параметров распределения по возрастам двух видов байкальских рыб (большая и малая голомянки, составляющие примерно 80% биомассы всех

рыб Байкала) применен метод, соответствующий третьему из рассмотренных в данной статье. При этом использован второй их рассмотренных здесь способов взвешивания. Для обоснования такого способа взвешивания предприняты расчеты и исследования оценок “по минимуму данных измерений” в терминологии монографии [7]. Оценки “по минимуму измерений”, названные в [8, 9] “опорными” или “особыми”, содержат в своей выпуклой оболочке, как доказано в [8], другие решения, полученные любым известным “разумным” способом в моделях линейной регрессии, в том числе при использовании любых положительных весовых коэффициентов в методах наименьших квадратов и наименьших модулей.

Расчеты на располагаемых данных показали, что “особые” решения, базирующиеся на данных о соотношениях количеств рыб первых возрастных групп, существенно меньше различаются, чем “особые” решения, базирующиеся на данных о соотношениях количеств рыб старших возрастных групп. Эти факты использованы в качестве аргументов в обосновании выбора второго способа взвешивания.

Конечно, указанная аргументация не может рассматриваться как безусловное доказательство использования именно такого способа взвешивания и, тем более, именно такого метода оценивания параметров. Во-первых, есть проблемы представительности используемых данных экспериментальных отловов. Охватить экспериментальными отловами равномерно всю огромную акваторию оз. Байкал по площади и временам года совершенно невозможно. Возникают погрешности при распределении отловленных рыб по возрастам. Во-вторых, имеются откровенные сомнения в адекватности используемой модели распределения рыб по возрастам. Коэффициенты смертности могут несколько изменяться по возрастным группам, а также с течением времени, отражая особенности функционирования экосистемы оз. Байкал в предшествующие годы.

Обсуждая возможности сравнения методов оценки параметров в “чистом виде”, авторы пришли к идее использования описанной в данной статье технологии исследования, основанной на имитации выборок методом Монте-Карло. В отечественной литературе, посвященной математической статистике, такой подход исследования методов оценки параметров не нашел широкого применения. Вместе с тем, как выяснилось в результате обсуждения представленных здесь исследований, за рубежом такой способ доказательности сравнения методов плодотворно используется. Авторы полагают, что данная статья будет способствовать развитию и применению рассмотренных здесь способов сопоставления методов на основе вычислительных экспериментов.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Иркутской области (грант № 17-410-380003) и программы ИНЦ № X1.174.1.9.

## Список литературы / References

- [1] **Вадзинский Р.Н.** Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. 295 с.  
**Vadzinskiy, R.N.** Handbook on probability distributions. Sankt-Peterburg: Nauka, 2001. 295 p. (In Russ.)
- [2] **Бернулли Я.** О законе больших чисел: Пер. с англ. М.: Наука, 1986. 176 с.  
**Bernulli, Ya.** On the law of large numbers. Moscow: Nauka, 1986. 176 p. (In Russ.)



- [3] **Бычков И.В., Зоркальцев В.И., Казазаева А.В.** Весовые коэффициенты в методе взвешенных наименьших квадратов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. № 3. С. 275–288.  
**Bychkov, I.V., Zorkal'tsev, V.I., Kazazaeva, A.V.** The weight coefficients in the weighted least squares method // Sib. J. of Numer. Mathematics. 2015. № 3. P. 275–288. (In Russ.)
- [4] **Кобзарь А.И.** Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М.: Физматлит, 2012. 816 с.  
**Kobzar', A.I.** Applied mathematical statistics. For engineers and scientists. Moscow: Fizmatlit, 2012. 816 p.
- [5] **Козлов М.В., Прохоров А.В.** Введение в математическую статистику. М.: Изд-во МГУ, 1987. 264 с.  
**Kozlov, M.V., Prohorov, A.V.** Introduction to mathematical statistics. Moscow: Izd-vo MGU, 1987. 264 p. (In Russ.)
- [6] **Кокс Д.Р., Оукс Д.** Анализ данных типа времени жизни. М.: Финансы и статистика, 1988. 191 с.  
**Koks, D.R., Ouks, D.** Analysis of life-time type data. Moscow: Finansy i Statistika, 1988. 191 p. (In Russ.)
- [7] **Мудров В.И., Кушко В.Л.** Методы обработки измерений: квазиподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983. 304 с.  
**Mudrov, V.I., Kushko, V.L.** Measurement processing methods: quasi-similar estimates. Moscow: Radio i Svyaz, 1983. 304 p. (In Russ.)
- [8] **Зоркальцев В.И.** Метод наименьших квадратов: геометрические свойства, альтернативные методы, приложения. Новосибирск: Наука, 1995. 220 с.  
**Zorkal'tsev, V.I.** The method of least squares: geometric properties, alternative methods, applications. Novosibirsk: Nauka, 1995. 220 p. (In Russ.)
- [9] **Zorkal'tsev, V.** Chebyshev, octahedral and euclidean projection of a point onto polyhedron // Proc. of Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), 22–27 May 2017, St. Petersburg, Russia. IEEE, 2017. P. 389–392. DOI 10.1109/CNSA.2017.7974039.

*Поступила в редакцию 3 октября 2017 г.,  
с доработки — 30 августа 2018 г.*

### **Estimates of parameters for the truncated exponential law of distribution on the basis of exponential data**

BYCHKOV, IGOR V.<sup>1</sup>, ZORKAL'TSEV, VALERIY I.<sup>2,\*</sup>, MOKRY, IGOR V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, Irkutsk, 664033, Russia

<sup>2</sup>Melentiev Energy System Institute SB RAS, Irkutsk, 664033, Russia

\*Corresponding author: Zorkal'tsev, Valeriy I., e-mail: zork@isem.irk.ru

**Purpose.** A comparative analysis of methods for estimating the parameters of a truncated exponential law of the distribution of a random variable on the basis of computational experiments. The problem arose in connection with the problem of estimating mortality rates, the age structure of fish in the Lake Baikal according to the experimental catch data.

**Methodology.** The procedure for studying the properties of methods for estimating parameters laws of distribution of a random variable is based on computer experiments. This procedure uses multiple simulations based on the Monte-Carlo realizations of a set of values of a random variable. The variables are set for the given parameters under the examined law. For each implementation, the parameters are evaluated with the help of the examined method. As a result of a large number of experiments, the characteristics of the properties of the methods are determined for various sample sizes. The experiments account the presence and the magnitude of displacements in the estimates as well as the magnitude of the standard deviation of the estimates.

**Findings.** This procedure is applied to three methods for estimating the parameters of a truncated discrete exponential distribution law. Each of the methods is considered in three versions, differing in the rules for setting weight coefficients. As a result of the research, it was found that the best results are obtained by the method based on the logarithmic transformation of the exponential distribution law into a linear regression equation. Coefficients of the regression are calculated using the method of least weighted squares. We found that the best weighing was proportional to the probability of realization of the random variable under consideration. Regarding the problem of assessing the age structure of fish the best parameter is the proportion of the number of fish of the given age. An iterative procedure of successive refinement of probabilities and weights is used.

**Conclusions.** The studies presented in the article made it possible to selectively choose the best within the nine algorithms for estimating the parameters of the truncated normal distribution law. It seems that the technique used could be useful in a comparative analysis of other methods for estimating the parameters of the laws of distribution of random variables on the basis of their available sample values.

*Keywords:* Monte Carlo method, parameter estimation, exponential law.

*Cite:* Bychkov, I.V., Zorkal'tsev, V.I., Mokry, I.V. Estimates of parameters for the truncated exponential law of distribution on the basis of exponential data // Computational Technologies. 2018. Vol. 23, No. 5. P. 3–20. (In Russ.)  
DOI: 10.25743/ICT.2018.23.5.002.

**Acknowledgements.** This research was partly supported by RFBR and the Government of Irkutsk region (grant No. 17-410-380003) and the Programme of ISC SB RAS No. X1.174.1.9.

*Received 3 October 2017*

*Received in revised form 30 August 2018*