

Построение диаграммы Вороного с ограничениями на плоскости*

Т. Ф. КИРЕЕВ[†], Г. Т. БУЛГАКОВА

¹Уфимский государственный авиационный технический университет, Россия

[†]Контактный e-mail: kireevtf@ufntc.ru

Рассмотрен вопрос построения диаграммы Вороного с ограничениями на плоскости, также известный как обобщенная обратная задача Вороного. Эта задача заключается в том, чтобы по заданному набору отрезков на плоскости построить такую диаграмму Вороного, ребра которой будут лежать на этих отрезках. Предложен алгоритм построения диаграммы Вороного с ограничениями с простым доказательством корректности. Описана процедура построения двумерной расчетной сетки на основе такой диаграммы.

Ключевые слова: диаграмма Вороного, обратная задача Вороного, плоская расчетная сетка.

Библиографическая ссылка: Киреев Т.Ф., Булгакова Г.Т. Построение диаграммы Вороного с ограничениями на плоскости // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 4. С. 28–37. DOI: 10.25743/ICT.2019.24.4.003.

Введение

Диаграмма Вороного имеет огромное множество применений, одно из них — построение расчетных сеток для численного решения задач гидро- и геомеханики. Для таких задач традиционно используются хорошо изученные сетки на основе триангуляции расчетной области, в частности триангуляции Делоне [1–3]. По сравнению с ними сетки на основе диаграммы Вороного имеют некоторые преимущества: их ячейки представляют собой выпуклые многоугольники, а использование узлов-генераторов диаграммы Вороного в качестве расчетных узлов делает такую сетку в точности ортогональной.

При решении гидродинамических задач методом конечных объемов с помощью двухточечной аппроксимации потока сетка на основе диаграммы Вороного позволяет снизить эффект ориентации благодаря тому, что ее ячейки имеют форму выпуклого многоугольника [4]. Свойство ортогональности повышает точность аппроксимации конвективных слагаемых, но в некоторых случаях уменьшает точность аппроксимации массовых слагаемых. Локальное изменение степени ортогональности ячеек позволяет регулировать локальное соотношение ошибки аппроксимации этих двух слагаемых.

Исследование диаграммы Вороного с ограничениями в настоящей работе мотивировано рядом задач подземной гидродинамики, в которых роль ограничений играют пластовые разломы сложной формы, естественные и техногенные трещины.

*Title translation and abstract in English can be found on page 37.

© ИВТ СО РАН, 2019.

Задача построения диаграммы Вороного часто рассматривается как задача построения триангуляции Делоне и наоборот, из-за двойственности между этими двумя объектами. Однако триангуляция Делоне с ограничениями уже не является двойственной к диаграмме Вороного с ограничениями [5]. Узловые точки диаграммы, которая двойственна к такой триангуляции, будут лежать на ребрах триангуляции, поэтому ребра этой диаграммы всегда будут перпендикулярны структурным отрезкам, вместо того чтобы лежать на них.

Для учета ограничений в диаграмме Вороного чаще всего применяют метод отсеечения, при котором ячейки Вороного обрезаются так, чтобы их границы лежали на структурных отрезках [6]. Недостаток этого подхода заключается в том, что ячейки вблизи структурных отрезков становятся невыпуклыми и теряют свойство ортогональности.

В данной работе изучается вопрос построения диаграммы Вороного с ограничениями, в которой ребра ячеек Вороного в точности формируют структурные отрезки ограничения, т. е. ячейки Вороного не обрезаются. Эта задача также известна как обобщенная обратная задача Вороного (Generalized Inverse Voronoi Problem) [7]. Она заключается в том, чтобы по заданному ограничению найти набор узлов, для которых диаграмма Вороного будет являться диаграммой Вороного с ограничением. В предположении, что узлы диаграммы Вороного могут лежать сколь угодно близко друг к другу, очевидно, что решение этой задачи всегда существует. Открытой проблемой остается поиск оптимального решения, в котором множество узлов диаграммы было бы минимально [8]. Для случая, когда структурные отрезки ограничения разбивают плоскость на прямоугольники, существует простой алгоритм решения этой задачи с помощью решетки Ханана [8].

Один из подходов для построения диаграммы Вороного с ограничениями заключается в использовании триангуляции Делоне [5]. Сначала генерируется триангуляция Делоне с ограничениями, затем проводится локальная корректировка триангуляции: ее ребра перестраиваются так, чтобы они оказались перпендикулярны структурным отрезкам. В конце вычисляется диаграмма Вороного, двойственная к полученной триангуляции. Достоинство алгоритма заключается в том, что он “прокладывает мост” между триангуляцией с ограничениями и диаграммой Вороного с ограничениями. Так, например, можно использовать готовые алгоритмы измельчения или сглаживания триангуляции, чтобы получить измельченную или сглаженную диаграмму Вороного. Вторым подходом заключается в формировании множества узлов диаграммы Вороного напрямую, без использования триангуляции Делоне [9, 10].

В настоящей работе предложен такой алгоритм построения диаграммы Вороного с ограничениями на плоскости с простым доказательством корректности.

1. Диаграмма Вороного

Определение 1. Для заданного конечного множества точек $S \subset \mathbb{R}^2$ ячейкой Вороного точки $i \in S$ называется множество

$$\text{VoroCell}(S, i) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - i\| < \|x - j\| \forall j \in S, j \neq i\}.$$

Определение 2. Ребром между ячейками $\text{VoroCell}(S, i)$ и $\text{VoroCell}(S, j)$ при $i \neq j$ называется непустое множество

$$\text{VoroEdge}(S, i, j) = \overline{\text{VoroCell}(S, i)} \cap \overline{\text{VoroCell}(S, j)}.$$

Определение 3. Вершиной между ячейками $VoroCell(S, i)$, $VoroCell(S, j)$ и $VoroCell(S, k)$ при $i \neq j$ и $i \neq k$ называется непустое множество

$$VoroVertex(S, i, j, k) = \bigcap_{m \in \{i, j, k\}} \overline{VoroCell(S, m)}.$$

Ячейка Вороного — это открытая выпуклая область в \mathbb{R}^2 , поскольку ее можно представить в виде пересечения $|S| - 1$ полуплоскостей. Поэтому ребра между ячейками Вороного представляют собой отрезки, лучи или линии в \mathbb{R}^2 , а вершины между ячейками Вороного — точки в \mathbb{R}^2 . Ребро или вершина могут не существовать, если соответствующее пересечение ячеек Вороного пусто. Иногда ребро может вырождаться в точку, а несколько вершин могут совпадать друг с другом (это происходит, когда S содержит 4 и более точек, лежащих на одной окружности).

Утверждение 1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество, $i \in S$, C — открытый круг конечного радиуса, граница которого проходит через точку i , и $C \cap S = \emptyset$. Тогда $\overline{VoroCell(S, i)}$ содержит в себе центр круга C .

Доказательство. Пусть c — центр круга C . Предположим, что $c \notin \overline{VoroCell(S, i)}$. Тогда существует точка $j \in S$, такая, что $j \neq i$ и $c \in \overline{VoroCell(S, j)}$, следовательно, $\|c - j\| \leq \|c - i\|$. Если $\|c - j\| < \|c - i\|$, то возникает противоречие с условием $C \cap S = \emptyset$, поскольку $j \in C$. Если же $\|c - j\| = \|c - i\|$, то точка c лежит в пересечении $\overline{VoroCell(S, i)} \cap \overline{VoroCell(S, j)}$, что противоречит исходному предположению. \square

Следствие 1.1. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество, $i, j \in S$ — две различные точки, C — открытый круг конечного радиуса, граница которого проходит через точки i, j , и $C \cap S = \emptyset$. Тогда ребро $VoroEdge(S, i, j)$ существует и содержит в себе центр круга C .

Доказательство. Пусть c — центр круга C . Согласно утверждению 1, $c \in \overline{VoroCell(S, i)}$ и $c \in \overline{VoroCell(S, j)}$. Значит, $c \in VoroEdge(S, i, j)$, а следовательно, это ребро существует. \square

Следствие 1.2. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество, $i, j, k \in S$ — три различные точки, C — открытый круг конечного радиуса, граница которого проходит через точки i, j, k , и $C \cap S = \emptyset$. Тогда вершина $VoroVertex(S, i, j, k)$ существует и совпадает с центром круга C .

Доказательство. Пусть c — центр круга C . Согласно утверждению 1, $c \in \overline{VoroCell(S, i)}$, $c \in \overline{VoroCell(S, j)}$ и $c \in \overline{VoroCell(S, k)}$. Значит, $c \in VoroVertex(S, i, j, k)$, а следовательно, эта вершина существует. Но $VoroVertex(S, i, j, k)$ может быть либо пустым множеством, либо состоять из одной точки, поэтому $c = VoroVertex(S, i, j, k)$. \square

Определение 4. Множеством ячеек диаграммы Вороного называется

$$VC(S) = \{VoroCell(S, i)\}_{i \in S}.$$

Определение 5. Множеством ребер диаграммы Вороного называется

$$VE(S) = \{VoroEdge(S, i, j)\}_{i, j \in S, i \neq j}.$$

Определение 6. Множеством вершин диаграммы Вороного называется

$$VV(S) = \{VoroVertex(S, i, j, k)\}_{i,j,k \in S, i \neq j, i \neq k}.$$

Определение 7. Диаграммой Вороного для множества точек $S \subset \mathbb{R}^2$ называется кортеж

$$VD(S) = (VC(S), VE(S), VV(S)).$$

Определение 8. Точки S диаграммы Вороного $VD(S)$ называются узлами или узловыми точками.

Задача построения диаграммы Вороного заключается в том, чтобы по заданным узловым точкам S найти диаграмму Вороного $VD(S)$. На практике, как правило, множество S выступает в качестве входных данных.

2. Диаграмма Вороного с ограничениями

Определение 9. Плоский конечный граф $G = (V, E)$ в \mathbb{R}^2 , в котором все ребра E являются отрезками, а все вершины V имеют ненулевую степень, называется ограничением. Ребра графа называются структурными отрезками. Ребро между двумя вершинами v_1 и v_2 обозначается $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Ограничение G может состоять из нескольких компонентов связности и содержать в себе некоторое количество циклов.

Определение 10. Диаграмма Вороного $VD(S)$ поддерживает ограничение G , если:

- 1) $V \subseteq VV(S)$;
- 2) $\forall (e \in E) \exists (\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq VE(S)) : e = \bigcup_{i=1..k} e_i$.

В этом случае $VD(S)$ называется диаграммой Вороного с ограничением G .

Утверждение 2. Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ — конечное множество, $G = (\{v_1, v_2\}, \{e\})$ — ограничение, в котором $e = \langle v_1, v_2 \rangle$. Если существует два открытых круга C_1 и C_2 с конечными радиусами и центрами в точках v_1 и v_2 , таких, что

- 1) $|\partial C_1 \cap S| \geq 3$ и $|\partial C_2 \cap S| \geq 3$,
- 2) $\partial C_1 \cap \partial C_2 = \{i, j\} \subset S, i \neq j$,
- 3) $C_1 \cap S = C_2 \cap S = \emptyset$,

то диаграмма Вороного $VD(S)$ поддерживает ограничение G .

Доказательство. Поскольку ∂C_1 — окружность и $|\partial C_1 \cap S| \geq 3$, то в $\partial C_1 \cap S$ найдутся три различные точки. Согласно следствию 1.2, $v_1 \in VV(S)$. Аналогично $v_2 \in VV(S)$. Согласно следствию 1.1, ребро $VoroEdge(S, i, j)$ содержит в себе точки v_1 и v_2 . Поскольку $VoroEdge(S, i, j)$ — выпуклое множество (отрезок, луч или линия), оно содержит в себе ребро e графа.

Докажем теперь, что $VoroEdge(S, i, j)$ не может содержать никаких других точек, кроме e . Рассмотрим точку $x = tv_1 + (1-t)v_2$ для некоторого $t > 1$. Поскольку $|\partial C_1 \cap S| \geq 3$, на границе круга C_1 найдется точка $k \in S$, отличная от точек i и j . Круги C_1 и C_2 не содержат точку k , и их границы пересекаются в точках i, j , поэтому $\|x - k\| < \|x - i\| = \|x - j\|$. Значит, точка x не принадлежит множествам $VoroCell(S, i)$, $VoroCell(S, j)$, а следовательно, не принадлежит множеству $VoroEdge(S, i, j)$. Аналогично для случая $t < 0$. Таким образом, $e = \langle v_1, v_2 \rangle = VoroEdge(S, i, j) \subseteq E$. \square

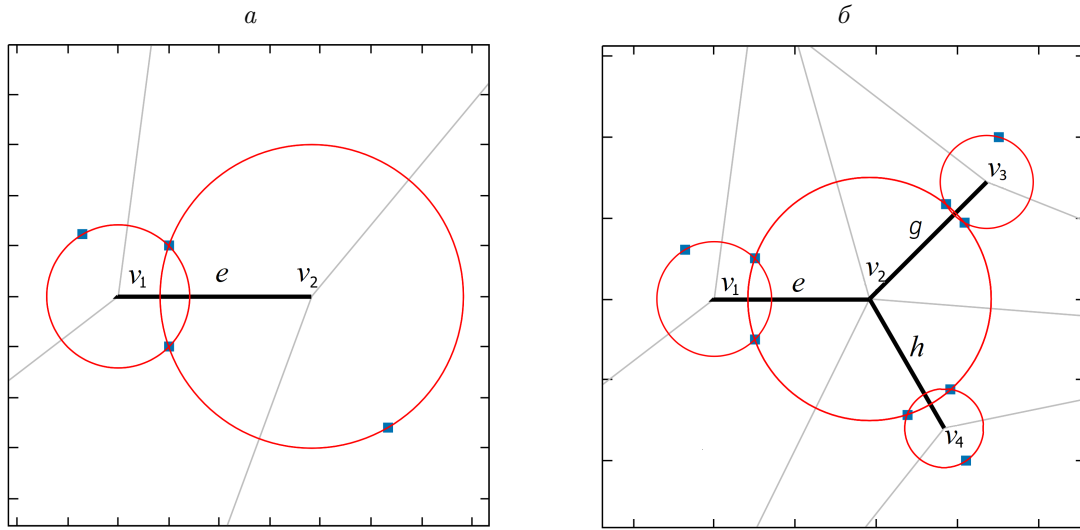


Рис. 1. Примеры диаграмм Вороного с ограничением. Серыми и черными линиями показаны ребра диаграммы, синими точками — узлы диаграммы

На рис. 1, *a* показаны диаграмма Вороного, поддерживающая ограничение $G = (\{v_1, v_2\}, \{e\})$, где $e = \langle v_1, v_2 \rangle$, и соответствующие окружности ∂C_1 и ∂C_2 с центрами в точках v_1 и v_2 . Множество S состоит из четырех точек. На рис 1, *б* показаны диаграмма Вороного, поддерживающая ограничение $G = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{e, g, h\})$, где $e = \langle v_1, v_2 \rangle$, $g = \langle v_2, v_3 \rangle$, $h = \langle v_2, v_4 \rangle$, и соответствующие окружности $\partial C_1, \partial C_2, \partial C_3, \partial C_4$. Множество S состоит из девяти точек.

Задачу построения диаграммы Вороного с ограничением можно сформулировать следующим образом: по заданному ограничению G требуется найти такое множество узлов S , при котором диаграмма Вороного $VD(S)$ будет являться диаграммой Вороного с ограничением G . Эта формулировка эквивалентна постановке обобщенной обратной задачи Вороного.

Алгоритм 1. Построение диаграммы Вороного с ограничениями

Входные данные: ограничение $G = (V, E)$.

Результат: множество $S \subset \mathbb{R}^2$, такое, что $VD(S)$ поддерживает ограничение G .

1. Выбрать достаточно малое число ε и для каждой вершины $v \in V$ построить открытый круг $C(v)$ радиуса ε с центром в точке v так, чтобы:
 - а) $\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 : C(v_1) \cap C(v_2) = \emptyset$;
 - б) $\forall e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E : \text{dist}(C(v_1), C(v_2)) \geq \varepsilon$;
 - в) $\forall v \in V, \forall e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E, v \neq v_1, v \neq v_2 : \text{dist}(C(v), e) \geq \varepsilon$.
2. На каждом ребре $e \in E$ расположить последовательно достаточно большое количество точек $\{w_1^e, w_2^e, \dots, w_{k(e)}^e\} \in e$ и в центре каждой точки w_i^e построить открытый круг $C(w_i^e)$ достаточного радиуса так, чтобы:
 - а) $\forall e, g \in E, e \neq g, \forall i \in \{1, \dots, k(e)\}, \forall j \in \{1, \dots, k(g)\} : C(w_i^e) \cap C(w_j^g) = \emptyset$;
 - б) $\forall e \in E, \forall i \in \{1, \dots, k(e)\}, \forall j \in \{1, \dots, k(e)\}, i \neq j : C(w_i^e) \cap C(w_j^e) \neq \emptyset \Leftrightarrow |\partial C(w_i^e) \cap \partial C(w_j^e)| = 2 \Leftrightarrow |i - j| = 1$;
 - в) $\forall v \in V, \forall e \in E, \forall i \in \{2, \dots, k(e) - 1\} : C(w_i^e) \cap C(v) = \emptyset$;

- з) $\forall v \in V, \forall e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E : C(w_1^e) \cap C(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow |\partial C(w_1^e) \cap \partial C(v)| = 2 \Leftrightarrow v = v_1;$
- д) $\forall v \in V, \forall e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E : C(w_{k(e)}^e) \cap C(v) \neq \emptyset \Leftrightarrow |\partial C(w_{k(e)}^e) \cap \partial C(v)| = 2 \Leftrightarrow v = v_2.$
- 3. $\forall e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E :$ добавить две точки пересечения окружностей $\partial C(w_1^e)$ и $\partial C(v_1)$ и две точки пересечения окружностей $\partial C(w_{k(e)}^e)$ и $\partial C(v_2)$ в множество S .
- 4. $\forall e \in E, \forall i \in \{1, \dots, k(e) - 1\} :$ добавить две точки пересечения окружностей $\partial C(w_i^e)$ и $\partial C(w_{i+1}^e)$ в множество S .
- 5. $\forall v \in V :$ если степень вершины v равна 1, то добавить в S произвольную точку v^* на окружности $\partial C(v)$, такую, что:
 - а) $v^* \notin S;$
 - б) $\forall v' \in V : v^* \notin C(v');$
 - в) $\forall e \in E, \forall i \in \{1, \dots, k(e)\} : v^* \notin C(w_i^e).$

Лемма 1. Алгоритм 1 решает задачу построения диаграммы Вороного с ограничениями.

Доказательство. На шаге 1 строится набор непересекающихся кругов $C(v)$ в вершинах $v \in V$. Условие 1б алгоритма гарантирует, что на шаге 2 на каждом ребре $e \in E$ можно будет выбрать хотя бы одну точку w_i^e . Условие 1в алгоритма необходимо для того, чтобы круги $C(v)$ располагались на некотором расстоянии от ребер E (за исключением ребер, инцидентных вершине v), и благодаря этому на шаге 2 алгоритма в каждой точке w_i^e каждого ребра $e \in E$ можно будет выбрать некоторый ненулевой радиус круга $C(w_i^e)$.

На шаге 2 строятся центры кругов w_i^e на ребрах E и круги $C(w_i^e)$ (рис. 2). Условие 2а гарантирует, что круги $C(w_i^e)$ и $C(w_j^g)$, расположенные на разных ребрах, не пересекаются между собой. Условие 2б обеспечивает то, что круги $C(w_i^e)$ пересекаются только с двумя соседними кругами $C(w_{i-1}^e)$ (если $i > 1$) и $C(w_{i+1}^e)$ (если $i < k(e)$), расположенными на одном общем ребре. Условия 2в–д накладывают ограничения на характер пересечения кругов $C(w_i^e)$ и $C(v)$. Так, каждый круг $C(w_1^e)$, расположенный на ребре $e = \langle v_1, v_2 \rangle$, пересекается только с кругом $C(v_1)$, а каждый круг $C(w_{k(e)}^e)$, расположенный на ребре $e = \langle v_1, v_2 \rangle$, пересекается только с кругом $C(v_2)$. Кроме того, условия 2б, 2г и 2д обеспечивают то, что границы каждой пары пересекающихся кругов пересекаются между собой ровно в двух точках.

Наконец, на шагах 3 и 4 формируется множество S , состоящее из точек на границах кругов $C(v)$ и $C(w_i^e)$. Поскольку в графе G все вершины имеют ненулевую степень,

$$\forall v \in V, \exists e = \langle v, v_2 \rangle \in E : |\partial C(w_1^e) \cap C(v)| = 2,$$

а значит, множество S будет содержать по две точки с границы каждого круга $C(v)$.

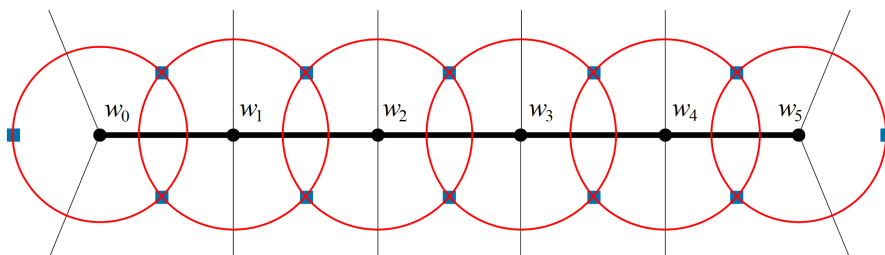


Рис. 2. Иллюстрация к алгоритму 1. Серыми и черными линиями показаны ребра диаграммы, синими точками — узлы диаграммы

Завершающий шаг 5 нужен для того, чтобы в множество S попало как минимум по три точки с границы каждого круга $C(v)$.

Докажем, что $VD(S)$ поддерживает ограничение G . Рассмотрим произвольное ребро $e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E$ и построенное на шаге 2 множество точек $\{w_1^e, w_2^e, \dots, w_{k(e)}^e\} \in e$. Ребро e можно представить в виде объединения нескольких отрезков:

$$e = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 w_1^e \rangle \cup \langle w_1^e, w_2^e \rangle \cup \dots \cup \langle w_{k(e)}^e, v_2 \rangle.$$

Обозначив $w_0^e = v_1$ и $w_{k(e)+1}^e = v_2$, имеем

$$e = \langle w_0^e, w_1^e \rangle \cup \langle w_1^e, w_2^e \rangle \cup \dots \cup \langle w_{k(e)}^e, w_{k(e)+1}^e \rangle.$$

В результате выполнения шагов 1 и 2 алгоритма при $i \in \{0, \dots, k(e)\}$ для каждого отрезка $\langle w_i^e, w_{i+1}^e \rangle$ имеется два круга $C(w_i^e)$ и $C(w_{i+1}^e)$, центры которых совпадают с концами отрезка. Кроме того,

$$|\partial C(w_{i-1}^e) \cap \partial C(w_i^e)| = |\partial C(w_i^e) \cap \partial C(w_{i+1}^e)| = |\partial C(w_{i+1}^e) \cap \partial C(w_{i+2}^e)| = 2$$

в силу условий 2 б, 2 г и 2 д. Поэтому для кругов $C(w_i^e)$ и $C(w_{i+1}^e)$ справедливо

$$\partial C(w_i^e) \cap \partial C(w_{i+1}^e) = \{a_i, b_i\} \subset S, \quad a_i \neq b_i, \quad i \in \{0, \dots, k(e)\},$$

а следовательно,

$$|\partial C(w_i^e) \cap S| \geq 4, \quad i \in \{1, \dots, k(e)\}.$$

Благодаря шагу 5 имеем

$$|\partial C(w_i^e) \cap S| \geq 3, \quad i \in \{0, k(e) + 1\}.$$

Условия 1 а и 2 а–д алгоритма гарантируют, что при $i \in \{0, \dots, k(e) + 1\}$ внутрь круга $C(w_i^e)$ не попадут никакие точки пересечения пар каких-либо других кругов, поэтому

$$C(w_i^e) \cap S = \emptyset, \quad i \in \{0, \dots, k(e) + 1\}.$$

По утверждению 2, диаграмма Вороного $VD(S)$ для каждого $i \in \{0, \dots, k(e)\}$ содержит ребро $\langle w_i^e, w_{i+1}^e \rangle = \text{VoroEdge}(S, a_i, b_i)$ и две вершины w_i^e и w_{i+1}^e . Таким образом,

$$1) \quad V \subseteq VV(S);$$

$$2) \quad \forall (e \in E) \exists (\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq VE(S)) : e = \bigcup_{i=1..k} e_i,$$

т. е. $VD(S)$ поддерживает ограничение G . \square

Для графа $G = (V, E)$ и вершины $v \in V$ обозначим $G \setminus v$ граф, который получается из графа G удалением вершины v и всех ребер $\langle v, u \rangle$, инцидентных вершине v (при этом вершины u не удаляются). Так же обозначим $G \setminus e$ граф, который получается из графа G удалением ребра e .

В качестве ε на шаге 1 алгоритма можно взять число $\frac{1}{4} \min_{v \in V} \{dist(v, G \setminus v)\}$. На шаге 2 алгоритма точки $\{w_1^e, w_2^e, \dots, w_{k(e)}^e\}$ на ребре $e = \langle v_1, v_2 \rangle \in E$ можно расположить равномерно с шагом $h = \frac{1}{4} dist(e \setminus (C(v_1) \cup C(v_2)), G \setminus e)$, а радиусы кругов $C(w_i^e)$ выбрать равными $\frac{3}{4}h$ (чтобы соседние круги $C(w_i^e)$ пересекались между собой в двух точках).

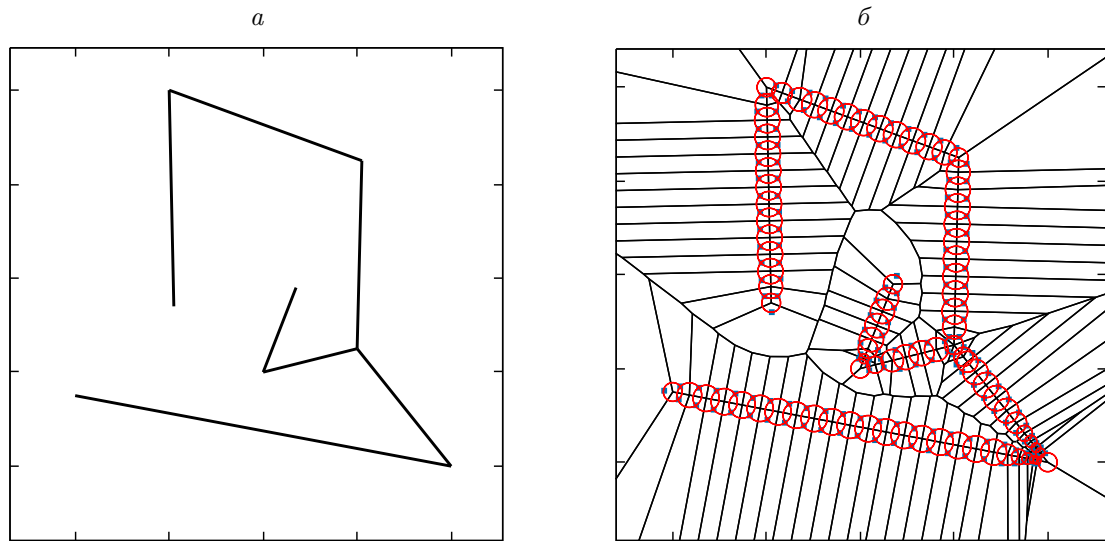


Рис. 3. Пример диаграммы Вороного с ограничением: *a* — ограничение; *б* — диаграмма Вороного. Черными линиями показаны ребра ограничения и диаграммы, синими точками — узлы диаграммы

Если требуется минимизировать количество элементов в множестве S , то можно итерационно объединять пары соседних кругов $C(w_i^e)$ в один круг большего радиуса до тех пор, пока условия 1 и 2 удовлетворяются.

На рис. 3 показана диаграмма Вороного с ограничением, построенная с помощью такого алгоритма. На рис. 3, *б* красным цветом изображены окружности $\partial C(v)$ и $\partial C(w_i^e)$.

На практике может быть полезна немного другая постановка задачи построения диаграммы Вороного с ограничениями: по заданному ограничению G и заданному множеству узлов S_0 требуется найти такое множество узлов S_1 , при котором диаграмма Вороного $VD(S_0 \cup S_1)$ будет являться диаграммой Вороного с ограничением G . Для решения этой задачи достаточно дополнить шаги 1 и 2 алгоритма 1 условиями:

- 1) $\forall v \in V : C(v) \cap S_0 = \emptyset$;
- 2) $\forall e \in E, \forall i \in \{1, \dots, k(e)\} : C(w_i^e) \cap S_0 = \emptyset$.

Эти условия можно удовлетворить, удалив из множества S_0 подмножества $\cup_{v \in V} C(v) \cap S_0$ и $\cup_{e \in E, i \in \{1, \dots, k(e)\}} C(w_i^e) \cap S_0$ либо выбрав радиусы кругов $C(v)$ и $C(w_i^e)$ достаточно малыми, а число $k(e)$ достаточно большим, не модифицируя при этом S_0 .

Для построения двумерной расчетной сетки с ограничением G можно использовать множество $S_0 = \{(i\Delta x, j\Delta y) \in \mathbb{Z}^2 : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$, для которого диаграмма Вороного является равномерной сеткой из прямоугольных ячеек длиной Δx и шириной Δy . На рис. 4, *а* показана расчетная сетка для прямоугольной области с ограничением из рис. 3, *а*, построенная таким методом.

Одна из важных задач — построение сеток для областей со сложными границами. Построив диаграмму Вороного с ограничением в виде замкнутого непересекающегося контура, можно получить расчетную сетку для области, ограниченной этим контуром (рис. 4, *б*).

Основные идеи алгоритма можно обобщить для построения трехмерной диаграммы Вороного с ограничениями в виде поверхностей. Разбив все поверхности на плоские треугольники, можно построить сферы с центрами в вершинах треугольников.

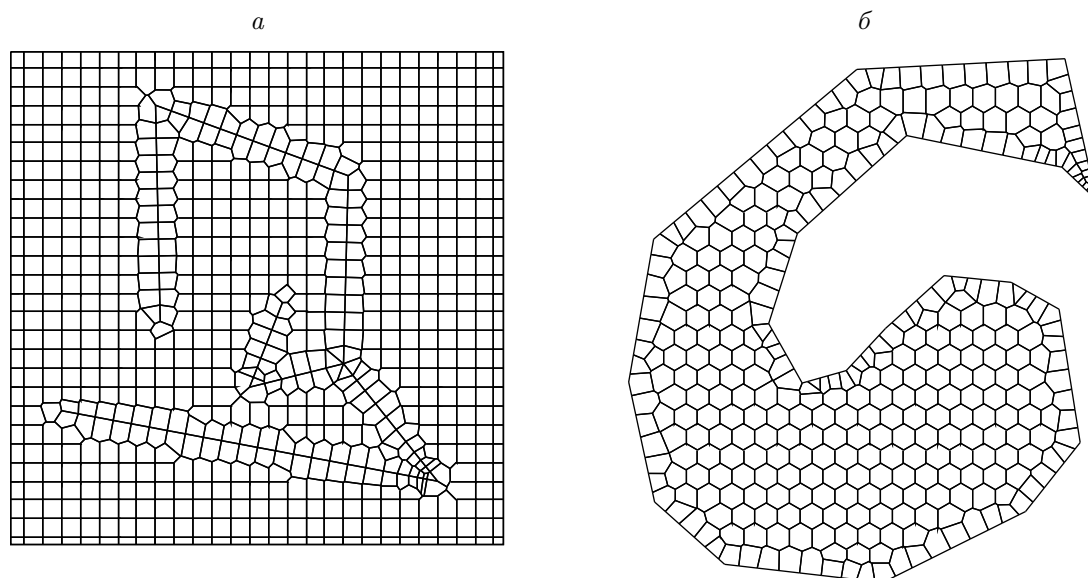


Рис. 4. Примеры расчетных сеток: *a* — сетка для прямоугольной области; *б* — сетка для невыпуклой области. Черными линиями показаны ребра сетки

Для каждого треугольника пересечение трех его сфер будет определять два узла диаграммы Вороного, равноудаленных от плоскости треугольника [9, 10].

Таким образом, предложены алгоритм построения диаграммы Вороного с ограничениями на плоскости и процедура построения двумерной расчетной сетки на основе такой диаграммы. Полученная расчетная сетка является локально ортогональной, а ее ячейки представляют собой выпуклые многоугольники. Использование такой сетки может повысить точность численного решения некоторых задач гидро- и геомеханики.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке ООО “Уфимский НТЦ” и РФФИ (грант № 17-41-020226-р_а).

Список литературы / References

- [1] **Shewchuk, J.R.** Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation // *Comput. Geometry*. 2002. Vol. 22, No. 1-3. P. 21–74.
- [2] **Lo S.H.** Finite element mesh generation. London: CRC Press, 2014. 672 p.
- [3] **Frey, P., George, P.L.** Mesh generation: application to finite elements. 2nd Edition. London: ISTE & Wiley LTD, 2008. 848 p.
- [4] **Palagi, C.L., Aziz, K.** Use of voronoi grid in reservoir simulation // *SPE Advanced Technology Series*. 1994. Vol. 2, No. 2. P. 69–77.
- [5] **Branets, L.V., Branets, L.V., Ghai, S.S. et al.** Efficient and accurate reservoir modeling using adaptive gridding with global scale up // *Proc. of SPE Reservoir Simulation Symp.* 2009. 11 p. SPE118946. DOI: 10.2118/118946-MS.
- [6] **Yan, D., Wang, W., Lévy, B., Liu, Y.** Efficient computation of clipped Voronoi diagram for mesh generation // *Computer-Aided Design*. 2013. Vol. 45, No. 4. P. 843–852.

- [7] Aloupis, G., Pérez-Rosés, H., Pineda-Villavicencio, G. et al. Fitting voronoi diagrams to planar tessellations // Intern. Work. on Combinatorial Algorithms IWOCA 2013: Combinatorial Algorithms, Heidelberg, 2013. P. 349–361.
- [8] Banerjee, S., Bhattacharya, B.B., Das, S. et al. On the construction of generalized voronoi inverse of a rectangular tessellation // Proc. 9th Intern. IEEE Symp. on Voronoi Diagrams in Sci. and Eng. New Brunswick, NJ: IEEE, 2012. P 132–137.
- [9] Berge, R.L. Unstructured pebi grids adapting to geological features in subsurface reservoirs: Master's thesis. Norwegian Univ. of Sci. and Techn., 2016. 105 p.
- [10] Abdelkader, A., Bajaj, C.L., Ebeida, M.S., Mitchell, S.A. A seed placement strategy for conforming voronoi meshing // Proc. of 29th Canadian Conf. on Comput. Geometry. CCCG 2017, Ottawa, Ontario, July 26–28. 2017. P. 95–100.

*Поступила в редакцию 18 января 2019 г.,
с доработки — 24 апреля 2019 г.*

Construction of the Voronoi diagram with constraints on a plane

KIREEV, TIMUR F.*, BULGAKOVA, GUZEL T.

¹Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450000, Russia

*Corresponding author: Kireev, Timur F., e-mail: kireevtf@ufntc.ru

Purpose. The problem of construction the Voronoi diagram with constrains on a plane, also known as the generalized inverse Voronoi problem, is considered. The problem is to construct a Voronoi diagram on the plane, which edges lie on a given set of segments.

Methodology. Constructing a Voronoi diagram with constraints is based on the formation of a set of circles and the placement of sites of the diagram at the intersections of these circles. The procedure for constructing a diagram is described by a formal language to prove its correctness.

Findings. An algorithm for constructing a constrained Voronoi diagram with proof of correctness is proposed. A procedure for constructing a two-dimensional computational grid based on such a diagram is described.

Value. The proposed algorithm is rather brief and has a simple proof of correctness. The use of such a grid can improve the accuracy of the numerical solution of some problems in fluid mechanics.

Keywords: Voronoi diagram, inverse Voronoi problem, planar mesh.

Cite: Kireev, T.F., Bulgakova, G.T. Constructing a conforming Voronoi diagram on the plane // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 4. P. 28–37. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.4.003.

Acknowledgements. This research was supported by Ufa NTC LLC and RFBR (grant No. 17-41-020226-p_a).

*Received January 18, 2019
Received in revised form April 24, 2019*