

Расчеты сверхзвукового пограничного слоя в полной и локально автомоделной постановках

Ю. Н. Григорьев¹, А. Г. Горобчук^{1,2}, И. В. Ершов³

¹Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

³Новосибирский государственный аграрный университет, 630039 Новосибирск, Россия

Контактный автор: Григорьев Юрий Н., e-mail: grigor@ict.nsc.ru

Поступила 17 декабря 2019 г., доработана 29 января 2020 г., принята в печать 26 февраля 2020 г.

Проведены расчеты течения в плоском пограничном слое сжимаемого колебательно возбужденного газа в локально автомоделной постановке для ряда характерных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что во всех рассмотренных случаях имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям для продольной координаты $x \geq 8 - 15$. Параллельно те же течения рассчитывались в полной постановке на основе конечно-разностной схемы типа Кранка — Николсон. Показано, что для всех рассмотренных граничных и начальных условий предельные локально автомоделные профили совпадают с профилями, рассчитанными в полной постановке. Это позволяет обоснованно использовать легко рассчитываемые локально автомоделные профили в задачах линейной теории устойчивости.

Ключевые слова: пограничный слой, колебательно возбужденный газ, локально автомоделные решения, конечно-разностные расчеты.

Цитирование: Григорьев Ю.Н., Горобчук А.Г., Ершов И.В. Расчеты сверхзвукового пограничного слоя в полной и локально автомоделной постановках. Вычислительные технологии. 2020. 25(2): 50–62.

Введение

В расчетах линейной устойчивости безградиентных пограничных слоев [1–3] в простейших случаях в качестве исходного стационарного решения используются, как правило, автомоделные решения. Однако при необходимости учесть свойства реального газа, например в сверхзвуковых неравновесных пограничных слоях [3–5], оказывается, что соответствующие автомоделные решения отсутствуют. При этом можно по-прежнему использовать имеющиеся автомоделные решения, как это было сделано в [5], а дополнительные факторы (возбуждение колебательных степеней свободы, диссоциацию-рекомбинацию и т. п.) учитывать только в уравнениях линейной теории устойчивости. В качестве паллиатива используются также локально автомоделные решения [3, 4], зависящие от координаты вдоль потока как от параметра. Здесь возникают два варианта в зависимости от постановки задачи — вида граничных условий и наличия источников тепла или вещества в потоке и т. п. Существуют граничные условия, при которых локально автомоделные решения с возрастанием координаты-параметра

стремятся к некоторому предельному решению, которое и следует использовать в расчетах устойчивости. В других случаях, например при наличии вдува (сублимации) на поверхности или неизотермической реакции в объеме, такого предела не существует. Тем не менее иногда используются локально автомодельные решения, отнесенные к продольной координате, определяемой числом Рейнольдса из задачи устойчивости, что естественно приводит к некоторой неопределенной ошибке.

Наиболее последовательным подходом, позволяющим исключить любые условности, является прямой расчет стационарного течения на основе конечно-разностных методов для системы уравнений пограничного слоя, в которых учтены все процессы реального газа. Такой подход предпочтителен, особенно в прикладных задачах.

Представляет интерес исследовать возможности локально автомодельного приближения для пограничного слоя колебательно возбужденного газа с различными граничными условиями, провести расчеты полных уравнений пограничного слоя в тех же условиях конечно-разностным методом и сравнить результаты обоих подходов. Это сравнение позволит в дальнейшем оценить точность расчетов линейной теории устойчивости в зависимости от вида стационарных решений.

1. Исходные уравнения

Исходная система уравнений плоского пограничного слоя колебательно возбужденного газа в приближении Прандтля получена из полных уравнений двухтемпературной релаксационной аэродинамики колебательно возбужденного газа [1] на основе стандартной процедуры [2]. В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны текущее расстояние $x = L$ вдоль пластины, параметры невозмущенного потока вне пограничного слоя: скорость U_∞ , плотность ρ_∞ и температура T_∞ , коэффициент сдвиговой вязкости μ_∞ , коэффициент теплопроводности, обусловленный переносом энергии в поступательных и вращательных степенях свободы, $\lambda_\infty = (5c_{vt}/2 + 6c_{vr}/5)\mu_\infty(T)$, коэффициент теплопроводности, описывающий диффузионный перенос энергии колебательных квантов $\lambda_{v,\infty} = 6c_{vv}\mu_\infty(T)/5$. Здесь коэффициенты теплопроводности выражены через коэффициент сдвиговой вязкости $\mu_\infty(T)$ с помощью полуэмпирических соотношений Эйкена [1]. Зависимость вязкости от температуры описывается формулой Сазерленда. Предполагается, что коэффициенты теплоемкости c_{vt} , c_{vr} , c_{vv} постоянны. Для обезразмеривания давления и времени используются комбинированные величины $\rho_\infty U_\infty^2$ и L/U_∞ соответственно.

В обезразмеренных таким образом переменных система имеет вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = (\gamma - 1) \mu M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\gamma_v \rho}{\tau} (T_v - T), \quad (3)$$

$$\rho u \frac{\partial T_v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T_v}{\partial y} = \frac{\gamma \mu_1}{\gamma_v Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T_v}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{\tau} (T_v - T), \quad (4)$$

$$\gamma M^2 p = \rho T. \quad (5)$$

Здесь

$$\mu(T) = \frac{1.5T^{3/2}}{T + 0.5}, \quad \mu_1 = \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{20\gamma_v}{33}, \quad \gamma_v = \frac{c_{vv}}{c_{vt} + c_{vr}}, \quad c_{vt} = \frac{3R}{2}, \quad c_{vr} = c_{vv} = R.$$

В (1)–(5) использованы стандартные обозначения гидродинамических переменных [1]. Коэффициент γ — показатель адиабаты. Коэффициент γ_v характеризует степень неравновесности колебательной степени свободы, τ — характерное время релаксации последней. Критерии $M = U_\infty/\sqrt{\gamma RT_\infty}$ и $Pr = c_p\mu_\infty/\lambda_\infty = (c_{vt} + c_{vr} + R)\mu_\infty/\lambda_\infty$ — соответственно числа Маха и Прандтля невозмущенного потока.

2. Локально автомодельные решения

Вывод локально автомодельных уравнений следует схеме вывода автомодельных уравнений для совершенного газа [2] и выполняется в два этапа. На первом система (1)–(5) приводится к виду уравнений пограничного слоя для несжимаемой жидкости. Вводится функция тока в соответствии с формулами

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Используя замену Дородницына — Хоурта [2] независимых переменных

$$x = \xi, \quad \eta = \int_0^y \rho dy, \quad (6)$$

в новых переменных имеем

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Введя обозначение

$$\bar{v} = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v,$$

приходим к уравнению неразрывности в форме

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} = 0. \quad (7)$$

Уравнение импульсов в новых переменных принимает вид

$$u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (8)$$

Аналогично преобразуются уравнения для температур

$$u \frac{\partial T}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \eta} = (\gamma - 1) \rho \mu M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\gamma}{Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \mu \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{\gamma_v \rho}{\tau} (T_v - T), \quad (9)$$

$$u \frac{\partial T_v}{\partial \xi} + \bar{v} \frac{\partial T_v}{\partial \eta} = \frac{\gamma \mu_1}{\gamma_v Pr} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \mu \frac{\partial T_v}{\partial \eta} \right) - \frac{(T_v - T)}{\tau}. \quad (10)$$

Для преобразования системы (7)–(10) к локально автомодельной форме вводится переменная Блазиуса [2] с учетом (6):

$$\zeta = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}.$$

Функция тока выражается через вспомогательную функцию $\varphi(\zeta)$:

$$\psi = \int_0^{\eta} u \, d\eta = 2\sqrt{\xi} \int_0^{\zeta} u(\zeta) \, d\zeta = \sqrt{\xi} \varphi(\zeta). \quad (11)$$

Все дифференциальные операторы системы (7)–(10) записываются в терминах функции $\varphi(\zeta)$ и ее производных по переменной ζ , обозначаемых ниже штрихами. В результате уравнение импульсов (8) преобразуется к автомодельной форме

$$\left(\frac{\mu}{T} \varphi''(\zeta) \right)' + \varphi \varphi'' = 0. \quad (12)$$

Соответственно, уравнения для температур (9), (10) из-за наличия в них релаксационных слагаемых приводятся к локально автомодельной форме, где координата $\xi \equiv x$ входит как параметр:

$$\gamma \left(\frac{\mu}{T} T' \right)' + \frac{(\gamma - 1)\mu}{4T} \text{Pr} M^2 \varphi''^2 + \text{Pr} \varphi T' + \frac{4\xi \gamma_v \text{Pr}}{\tau} (T_v - T) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{20\gamma}{33} \left(\frac{\mu}{T} T_v' \right)' + \text{Pr} \varphi T_v' - \frac{4\xi \text{Pr}}{\tau} (T_v - T) = 0. \quad (14)$$

Видно, что на передней кромке пластины при $\xi \equiv x = 0$, а также в термодинамическом равновесии при $T_v = T$ мы приходим к автомодельным уравнениям для совершенного газа [2].

Для нахождения локально автомодельных решений вводились вспомогательные функции

$$f_1 = \varphi, \quad f_2 = \varphi', \quad f_3 = \varphi'', \quad f_4 = T, \quad f_5 = T', \quad f_6 = T_v, \quad f_7 = T_v'$$

и система уравнений (12)–(14) приводилась к нормальной форме, для которой методом “стрельбы” с помощью процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка на интервале $[0, \delta]$ решалась двухточечная краевая задача. Точкой “прицеливания” служила середина интервала $\zeta_c = \delta/2$, где требовалось совпадение значений вычисляемых величин с точностью до 10^{-8} . Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\gamma = 1.4$; $\gamma_v = 0.4$; $\text{Pr} = 0.75$; $M = 2.2, 4.5$; $\delta = 8$; $\xi = 0 - 30$; $\Delta\zeta = 10^{-2}$.

В качестве граничных условий на скорость использовались

$$\frac{d\varphi(0)}{d\zeta} = \varphi'(0) = 0, \quad \frac{d\varphi(\delta)}{d\zeta} = \varphi'(\delta) = 2.$$

Для внешнего потока рассматривался набор условий, соответствующих различным аэродинамическим ситуациям — “полет в невозмущенной атмосфере”, “поток в сверхзвуковой трубе”. Для температур на поверхности ставились условия адиабатичности, изотермичности, с вариантами обмена колебательными квантами.

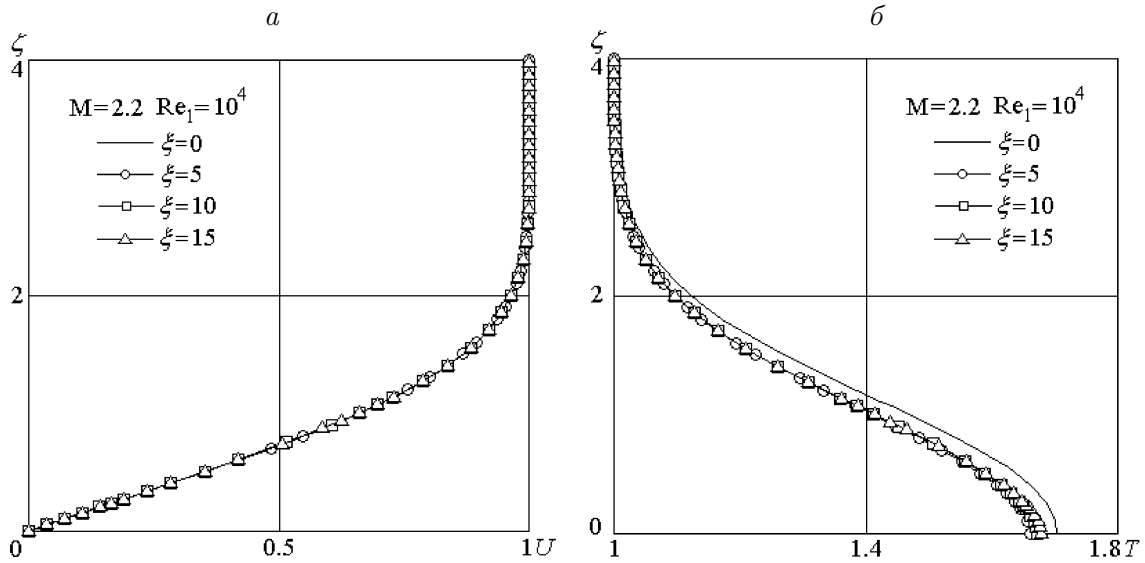


Рис. 1. Локально автомодельные профили скорости продольной U и статической температуры T

Fig. 1. Locally self-similar profiles of the longitudinal velocity U and the static temperature T

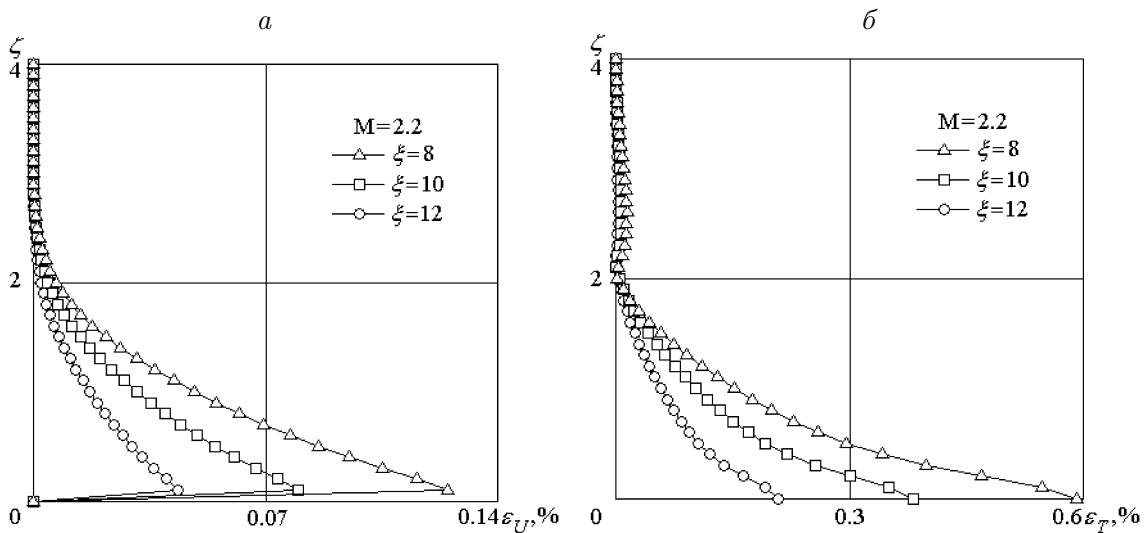


Рис. 2. Относительные отклонения локально автомодельных профилей скорости и температуры. Режим — “полет в невозмущенной атмосфере”, адиабатическая стенка

Fig. 2. The relative deviations of locally self-similar profiles of velocity and of temperatures. The flow mode is “flight in the undisturbed atmosphere”, the adiabatic wall

Во всех случаях наблюдалась сходимость локально автомодельных профилей продольной скорости и температур к некоторым предельным значениям при $\xi \equiv x = 8 - 10$. Можно отметить, что профили скорости сходились даже на меньших значениях продольной координаты. Примеры профилей приведены на рис. 1. Здесь условия — “полет в невозмущенной атмосфере”, отсутствие потока тепла (адиабатическая стенка) и полная аккомодация колебательных квантов на границе:

$$U(0) = 0, \quad \frac{dT(0)}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dT_v(0)}{d\zeta} = ax(T_v(0) - T),$$

$$U(\delta_{\max}) = 1, \quad T(\delta_{\max}) = T_v(\delta_{\max}) = 1, \quad \delta_{\max} = 8,$$

$$a = \frac{5}{3M\mu} \sqrt{\frac{2\text{Re}_1 T}{\pi\gamma}}, \quad \mu = \frac{1.5T^{3/2}}{T + 0.5}, \quad T = 1 + \frac{(\gamma - 1)}{2} \text{PrM}^2,$$

Re_1 — единичное число Рейнольдса.

Типичные характеристики сходимости профилей скорости и статической температуры приведены на рис. 2.

Для расчета относительных отклонений профилей скорости $\varepsilon_U(\zeta)$ и температуры $\varepsilon_T(\zeta)$ в качестве предельных профилей выбирались профили, полученные в сечении $\xi = 15$. Зависимости $\varepsilon_{U,T}(\zeta)$ вычислялись по формуле

$$\varepsilon_\varphi(\zeta) = \left| 1 - \frac{\varphi(\zeta, \xi)}{\varphi(\zeta, \xi = 15)} \right| \cdot 100\%, \quad \xi = 8, 10, 12.$$

Видно, что наибольшие относительные отклонения получаются на профилях температуры вблизи стенки, которые имеют порядок $(2 - 5) \cdot 10^{-3}$.

3. Численные расчеты пограничного слоя в полной постановке

Для перехода к конечно-разностной схеме система уравнений (1)–(4) плоского пограничного слоя колебательно возбужденного газа может быть представлена в следующем обобщенном виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0,$$

$$a_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + b_i \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(c_i \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) + d_i + e_i f_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (15)$$

Здесь индекс i относится к соответствующей искомой величине, например компоненте продольной скорости u , температуре газа T и т. д. Коэффициенты a_i , b_i , c_i , d_i , e_i , входящие в уравнение (15), могут зависеть как от скорости v и величин f_i , так и от их производных. Такая универсальная запись позволяет в дальнейшем распространить реализуемую численную схему на учет других эффектов реального газа, таких как диссоциация — рекомбинация, химические реакции, излучение.

Для численного решения уравнений (1), (15) был реализован конечно-разностный метод, кратко изложенный в [6, 7]. Расчетная область покрывалась прямоугольной сеткой по пространственным координатам: $x_n = x_0 + nh_x$, $y_j = jh_y$ ($n, j = 0, 1, 2, \dots$), h_x и h_y — соответственно шаги сетки в направлениях координатных осей x , y . Дополнительно вводилась вспомогательная сетка с полуцелыми индексами: $x_{n+1/2} = x_0 + (n + 1/2)h_x$, $y_j = jh_y$ и $x_n = x_0 + nh_x$, $y_{j+1/2} = (j + 1/2)h_y$. Для аппроксимации уравнений (15) использовалась явно-неявная конечно-разностная схема Кранка — Николсон:

$$a_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij}^n - f_{ij}^{n-1}}{h_x} + b_{ij}^{n-1/2} \frac{f_{ij+1}^{n-1/2} - f_{ij-1}^{n-1/2}}{2h_y} =$$

$$= \frac{1}{h_y} \left(c_{ij+1/2}^{n-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij+1/2}^{n-1/2} - c_{ij-1/2}^{n-1/2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij-1/2}^{n-1/2} \right) + d_{ij}^{n-1/2} + e_{ij}^{n-1/2} f_{ij}^{n-1/2}, \quad (16)$$

где $f_{ij}^{n-1/2} = s_i f_{ij}^n + (1 - s_i) f_{ij}^{n-1}$. Весовой параметр s_i может выбираться для каждого уравнения индивидуально в пределах $1/2 \leq s_i \leq 1$. Значения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i, e_i вычисляются в узлах вспомогательной сетки в полуцелых узлах $(n - 1/2, j)$, где $n, j = 1, 2, 3, \dots$

Схема (16) приводится к виду

$$\alpha_{ij} f_{ij-1}^n + \beta_{ij} f_{ij}^n + \gamma_{ij} f_{ij+1}^n = \delta_{ij}. \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y), \\ \beta_{ij} &= -s_i (c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} h_y^2 / h_x, \\ \gamma_{ij} &= s_i (c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y), \\ \delta_{ij} &= (1 - s_i) (c_{ij+1}^{n-1/2} + c_{ij}^{n-1/2} + b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij-1}^{n-1} - \\ &\quad - \left[(1 - s_i) (c_{ij+1}^{n-1/2} + 2c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - 2e_{ij}^{n-1/2} h_y^2) - 2a_{ij}^{n-1/2} h_y^2 / h_x \right] f_{ij}^{n-1} + \\ &\quad + (1 - s_i) (c_{ij}^{n-1/2} + c_{ij-1}^{n-1/2} - b_{ij}^{n-1/2} h_y) f_{ij+1}^{n-1} + 2d_{ij}^{n-1/2} h_y^2. \end{aligned}$$

Система разностных уравнений (17) с учетом конечно-разностных аппроксимаций граничных условий имеет трехдиагональную матрицу и эффективно решалась методом скалярной прогонки. На очередном шаге по маршевой переменной x вычислялись все значения f_{ij}^n по толщине пограничного слоя. Поперечная скорость находилась из разностного уравнения

$$\frac{(\rho u)_j^n - (\rho u)_j^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho u)_{j+1}^n - (\rho u)_{j+1}^{n-1}}{2h_x} + \frac{(\rho v)_{j+1}^{n-1/2} - (\rho v)_j^{n-1/2}}{h_y} = 0, \quad (18)$$

аппроксимирующего уравнение неразрывности (1). Входящая в уравнение плотность ρ зависит только от температуры и полагалась известной величиной. На основе (18) строилось рекуррентное соотношение для нахождения $v_{j+1}^{n-1/2}$ через $v_j^{n-1/2}$. Таким образом, определив значение $v_0^{n-1/2}$ из граничного условия на пластине, находили поперечную скорость в полуцелых узлах $(n - 1/2, j)$, $j = 1, 2, 3, \dots$

Для вычисления коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i, e_i , зависящих от v, f_i , в узлах вспомогательной сетки использовались формулы линейной интерполяции для этих величин, определяемых по значениям в узлах основной сетки

$$f_{ij}^{n-1/2} = \frac{f_{ij}^n + f_{ij}^{n-1}}{2}, \quad f_{ij+1/2}^n = \frac{f_{ij+1}^n + f_{ij}^n}{2}.$$

Для вычисления значений f_{ij}^n на n -м слое необходимо знать коэффициенты $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}, e_{ij}^{n-1/2}$, которые согласно приведенным выше формулам сами зависят от неизвестных величин f_{ij}^n на n -м слое. Поэтому использовался алгоритм внутренних итераций, заключающийся в следующем. Для вычисления значений $a_{ij}^{n-1/2}, b_{ij}^{n-1/2}, c_{ij}^{n-1/2}, d_{ij}^{n-1/2}, e_{ij}^{n-1/2}$ в первом приближении в качестве значений функций на n -м слое

брались их значения на $(n - 1)$ -м слое, например $f_{ij}^{n,1} = f_{ij}^{n-1}$, а последующие приближения учитывались в итерационном процессе

$$f_{ij}^{n-1/2,k} = \frac{f_{ij}^{n,k} + f_{ij}^{n-1}}{2},$$

где k — индекс внутренних итераций. На каждом шаге по маршевой переменной итерации выполнялись до сходимости. Сходимость решения к установившемуся определялась по разности относительных значений сеточной функции в равномерной норме

$$\max_j \left| \frac{f_{ij}^{n,k} - f_{ij}^{n,k-1}}{f_{ij}^{n,k}} \right| < \varepsilon,$$

где ε — заданная точность, которая в численных расчетах выбиралась равной 10^{-8} .

Система уравнений (1), (15) имеет парабологиперболический тип и требует задания начальных условий на входной границе пограничного слоя: $u(x_0, y) = u_0(y)$, $T(x_0, y) = T_0(y)$ и т. д. При этом распределение поперечной скорости $v(x_0, y)$ находилось из численного решения уравнений (17), (18) с применением внутренних итераций. В качестве начальных данных брались решения уравнений пограничного слоя в локально автомодельных переменных при $\xi = 1$. Полученное решение $v(x_0 + h_x/2, y)$ при достаточно малом h_x полагалось равным $v(x_0, y)$.

Предварительно исследовался порядок аппроксимации численной схемы на основе сравнения численных решений на последовательности сеток с изменяемым в два раза шагом. Расчеты показали, что отношение отклонений численных решений в совпадающих узлах сеток составляет величину, близкую к 4, а схема имеет близкий ко второму порядок аппроксимации.

Исследование точности численного алгоритма проводилось на основе сравнения с известными автомодельными решениями. Для упрощения весовой параметр s_i в большинстве расчетов выбирался равным $s_i = 1/2$. Относительные отклонения профилей продольной скорости $\varepsilon_U(\zeta)$ и статической температуры $\varepsilon_T(\zeta)$ от автомодельных профилей Блазиуса и Дородницына — Хоурта [2] в различных сечениях $\xi = x$ в равномерной норме рассчитывались по формуле

$$\varepsilon_{\mathbf{q}}(\zeta, \xi) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, \xi)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 0)} \right| \cdot 100 \%, \quad \xi = 5, 10, 40,$$

где вектор $\mathbf{q} = (U, T)$.

Для пограничного слоя несжимаемой изотермической жидкости расчеты проводились на отрезке $0 \leq x \leq 40$ с шагом $h_x = 0.025$. Высота пограничного слоя изменялась в пределах $0 \leq y \leq 50$, шаг сетки в поперечном направлении составлял $h_y = 0.012$. Максимальное относительное отклонение при $x = 40$ составило менее 1 %.

Для совершенного газа расчеты проводились также на отрезке $0 \leq x \leq 40$ с шагом $h_x = 0.025$, а высота пограничного слоя варьировалась в пределах $0 \leq y \leq 60$ с шагом $h_y = 0.014$. Максимальные относительные отклонения профилей продольной скорости и температуры на адиабатической стенке, рассчитанных по схеме (17), от автомодельных профилей Дородницына — Хоурта [2] при $\xi \equiv x = 40$ также не превышали 1 %. Эти сравнения дали предварительную оценку продольной координаты, на которой пограничный слой становится полностью развитым, а также его высоту в этом сечении.

Было проведено сравнение локально автомодельных профилей гидродинамических параметров с профилями, рассчитанными в полной постановке для одинаковых граничных и начальных условий. На рис. 3, *a* представлены профили, полученные в обеих постановках, для режима “полет в невозмущенной атмосфере” при $M = 4.5$ и адиабатической стенке. На рис. 3, *б* даны относительные отклонения предельных локально автомодельных профилей при $\xi = 30$ с численными расчетами на продольной координате $x = 40$, где пограничный слой можно считать полностью развитым.

Относительные отклонения профилей скорости $\varepsilon_U(\zeta)$, плотности $\varepsilon_\rho(\zeta)$, статической $\varepsilon_T(\zeta)$ и колебательной $\varepsilon_{T_v}(\zeta)$ температур вычислялись по формуле

$$\varepsilon_{\mathbf{q}}(\zeta, \xi) = \left| 1 - \frac{\mathbf{q}(\zeta, x = 40)}{\mathbf{q}(\zeta, \xi = 30)} \right| \cdot 100 \%,$$

где вектор $\mathbf{q} = (U, \rho, T, T_v)$.

Видно, что максимальное отклонение проявляют профили температур, которое в данных условиях теплообмена на пластине ($T' = 0$ — адиабатическая стенка) не превышает 3%. В тех же условиях при $M = 2.2$ максимальное отклонение имеет место для продольной скорости, которое составляет примерно 2%, в то время как отклонения температур лежат в пределах 1%.

На рис. 4 приведены аналогичные сравнения при $M = 4.5$, но для случая охлаждаемой изотермической стенки с граничным условием $T(0) = T_v(0) = 1$. В этом случае все отклонения возрастают приблизительно в полтора раза, но тем не менее не пре-

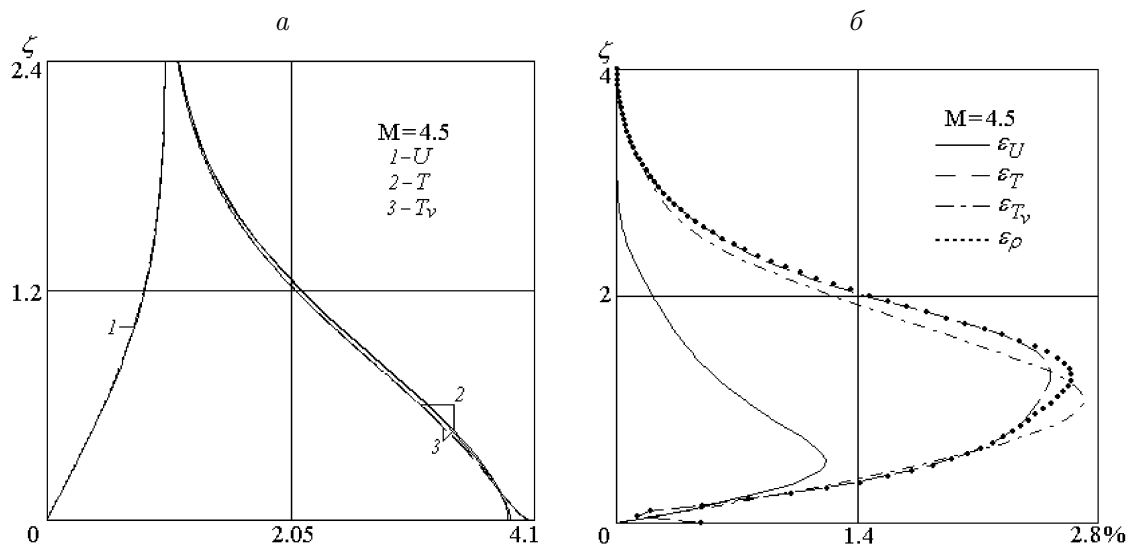


Рис. 3. Профили гидродинамических параметров. Режим течения — “полет в невозмущенной атмосфере”, адиабатическая стенка: *a* — профили продольной скорости U , статической T и колебательной T_v температур, сплошная линия — приближение локальной автомодельности, штриховая — численное решение полной задачи; *б* — относительные отклонения профилей гидродинамических параметров

Fig. 3. Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. The flow mode is “flight in the undisturbed atmosphere”, the adiabatic wall: *a* — profiles of the longitudinal velocity, U , the static, T , and the vibrational, T_v , temperatures, the solid curves are local self-similarity approximation, the dashed curves are numerical solution of the full problem; *б* — comparison of the profiles hydrodynamic parameters

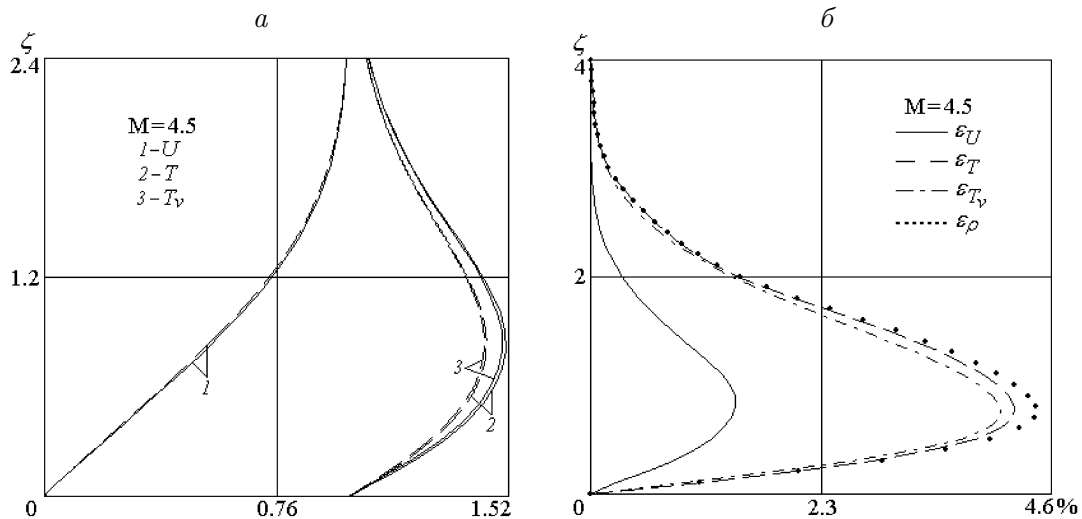


Рис. 4. Профили гидродинамических параметров. Режим течения — “полет в невозмущенной атмосфере”, изотермическая стенка: *a* — профили продольной скорости U , статической T и колебательной T_v температур, сплошная линия — приближение локальной автомодельности, штриховая — численное решение полной задачи; *б* — относительные отклонения профилей гидродинамических параметров

Fig. 4. Comparison of the profiles of hydrodynamic parameters. The flow mode is “flight in the undisturbed atmosphere”, the isothermal wall: *a* — profiles of the longitudinal velocity, U , the static, T , and the vibrational, T_v , temperatures, the solid curves are local self-similarity approximation, the dashed curves are numerical solution of the full problem; *б* — comparison of the profiles hydrodynamic parameters

вышают 4.5%. В тех же условиях при $M = 2.2$ все отклонения остаются в пределах менее 1.5%.

Полученные результаты позволяют заключить, что для рассмотренных граничных и начальных условий локально автомодельные решения настолько близки к численным решениям полной задачи, что могут обоснованно использоваться в расчетах линейной устойчивости соответствующих пограничных слоев.

Заключение

1. Получены уравнения плоского пограничного слоя сжимаемого колебательно возбужденного газа в локально автомодельной постановке. Рассчитаны локально автомодельные решения для ряда характерных условий внешнего потока и теплообмена на границе. Показано, что во всех рассмотренных случаях имеет место сходимость профилей гидродинамических переменных к некоторым предельным значениям при $x = \xi \geq 8 - 15$.

2. Реализована универсальная конечно-разностная схема для системы уравнений плоского пограничного слоя, позволяющая последовательно учитывать такие эффекты реального газа, как сжимаемость, возбуждение колебательных мод, диссоциация — рекомбинация, химические реакции, излучение. Для случаев несжимаемой жидкости и совершенного газа показана сходимость численных решений приблизительно со вторым порядком к автомодельным решениям Блазиуса и Дородницына — Хоурта.

3. Проведено сравнение профилей гидродинамических переменных в плоском пограничном слое сжимаемого колебательно возбужденного газа, рассчитанных в локально

автомодельной и полной постановках. Показано, что для всех рассмотренных граничных и начальных условий предельные локально автомодельные профили приближают профили полностью развитого пограничного слоя, рассчитанные в полной постановке в пределах 3–5%. Это позволяет обоснованно использовать легко рассчитываемые предельные локально автомодельные профили в расчетах по линейной теории устойчивости.

Приложение

Сделана попытка перейти от системы локально автомодельных уравнений (12)–(14) к приближенной полностью автомодельной постановке путем замены температур вспомогательными функциями, использованными ранее в работах [8, 9]. Для этого коэффициент μ_1 в диффузионном слагаемом уравнений (4) и (10) преобразовывался из следующих соображений. Он был получен из приближенных соотношений Эйкена [1], выражающих коэффициенты теплопроводности через коэффициенты вязкости

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_\infty} = \mu_1 \mu(T) = \left(\frac{f_v}{f_{tr}} \right) \gamma_v \mu(T).$$

Выше, как обычно [1], использовались простейшие формулы Эйкена, из которых получалось $f_v/f_{tr} = 20/33$. Однако формулы Эйкена второго приближения и экспериментальные данные [10] показывают следующие пределы изменения поправочных коэффициентов: $f_v = 1.2 - 1.6$, $f_{tr} = 1.6 - 1.9$. Это позволяет принять, что $f_v/f_{tr} \approx 1$.

В результате уравнения (13), (14) для статической и колебательной температур в приближении локальной автомодельности запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\mu}{T} T' \right)' + \frac{(\gamma-1)\mu}{4T} M^2 \varphi''^2 + \varphi T' + \frac{4\xi\gamma_v}{\tau} (T_v - T) &= 0, \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\mu}{T} T'_v \right)' + \varphi T'_v - \frac{4\xi}{\tau} (T_v - T) &= 0. \end{aligned}$$

Введем функцию $\theta = T + \gamma_v T_v$, для которой из двух уравнений получаем уравнение

$$\frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\mu}{T} \theta' \right)' + \frac{(\gamma-1)\mu}{4T} M^2 \varphi''^2 + \varphi \theta' = 0.$$

Если ввести приближенно колебательную температуру как $\bar{T}_v = (\theta - \bar{T})/\gamma_v$ (где \bar{T} — температура из автомодельной системы для совершенного газа), то придем к автомодельной системе вида

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu}{T} \varphi''(\zeta) \right)' + \varphi \varphi'' &= 0, \\ \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\mu}{T} \bar{T}' \right)' + \frac{(\gamma-1)\mu}{4T} M^2 \varphi''^2 + \varphi \bar{T}' &= 0, \quad \frac{\gamma}{\text{Pr}} \left(\frac{\mu}{T} \bar{T}'_v \right)' + \varphi \bar{T}'_v = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Это равносильно отбрасыванию релаксационных слагаемых в системе уравнений (12)–(14) локальной автомодельности. Как следует из численных расчетов, проведенных в данной статье, локально автомодельные профили при $\xi = 0$, соответствующие системе (19), могут служить лишь грубым приближением, особенно для колебательной температуры.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-01-00168а).

Список литературы

- [1] **Grigoryev Yu.N., Ershov I.V.** Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Series: Fluid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing; 2017; (117): 201. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3
- [2] **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. лит.; 1950: 676.
- [3] **Blottner F.G.** Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1963; 1(9):2156–2157.
- [4] **Гапонов С.А., Петров Г.В.** Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука; 2013: 95.
- [5] **Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.** Линейная устойчивость сверхзвукового пограничного слоя релаксирующего газа на пластине. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019; 54(3):3–15. DOI: 10.1134/S0568528119030058
- [6] **Браиловская И.Ю., Чудов Л.А.** Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Вычислительные методы и программирование: Сб. науч. тр. Московский гос. ун-т; 1962: 167–182.
- [7] **Пасконов В.М.** Стандартная программа для решения задач пограничного слоя. Численные методы в газовой динамике. М.: МГУ; 1963: 110–116.
- [8] **Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.** Асимптотическая теория кривой нейтральной устойчивости течения Куэтта колебательно-возбужденного газа. Прикл. механика и техн. физика. 2017; 58(1):3–21.
- [9] **Григорьев Ю.Н., Ершов И.В.** Асимптотическая оценка устойчивости сверхзвукового пограничного слоя в колебательно возбужденном газе на пластине. Прикладная математика и механика. 2019; 69(5-6):749–769.
- [10] **Mason E.A., Monchick L.** Heat conductivity of polyatomic and polar gases. The Journal of Chemical Physics. 1962; 36(6):1622–1639.

Calculations of supersonic boundary layer in the full and locally self-similar formulations

GRIGORYEV YURI N.¹, GOROBCHUK ALEKSEY G.^{1,2}, ERSHOV IGOR V.³

¹Institute of Computational Technologies SB RAS, 630090, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

³Novosibirsk State Agrarian University, 630090, Novosibirsk, Russia

Corresponding author: Grigoryev Yuri N., e-mail: grigor@ict.nsc.ru

Received December 17 2019, revised January 29, 2020, accepted February 26, 2020

Abstract

The article considers the possibility of using locally self-similar solutions of a stationary boundary layer in linear stability problems. These solutions are compared with various boundary conditions for a vibrationally excited gas with finite-difference calculations of the corresponding flows.

The initial system of equations for a plane boundary layer of a vibrationally excited gas was obtained from the complete equations of two-temperature relaxation aerodynamics. The relaxation of vibrational modes of gas molecules is described in the framework of the Landau — Teller equation. Transfer coefficients depend on the static flow temperature. It is shown that in all considered cases the convergence of profiles of hydrodynamic variables to some limit values takes place for the longitudinal coordinate $x \geq 8$ —15. In parallel, the same flows were calculated using the full formulation based on the finite-difference Krank — Nicholson type scheme. It is shown that for all considered boundary and initial conditions the limiting locally self-similar profiles coincide with the profiles calculated within the full formulation. The obtained result substantiates the use of locally self-similar solutions in problems of the linear theory of stability of boundary layer flows of vibrationally excited gas.

Keywords: boundary layer, vibrationally excited gas, locally self-similar solutions, finite-difference calculations.

Citation: Grigoryev Yu.N., Gorobchuk A.G., Ershov I.V. Calculations of supersonic boundary layer in the full and locally self-similar formulations. Computational Technologies. 2020; 25(2): 50–62. (In Russ.)

Acknowledgements. This research was partly supported by RFBR (grant No. 20-01-00168a).

References

1. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Stability and suppression of turbulence in relaxing molecular gas flows. Series: Fluid Mechanics and Its Applications. Springer International Publishing; 2017; (117): 201. DOI: 10.1007/978-3-319-55360-3
2. Loitsyanskii L.G. Mechanics of liquids and gases. Oxford, London, Edinburgh, New York, Toronto, Paris, Frankfurt: Pergamon; 1966: 804.
3. Blottner F.G. Similar and nonsimilar solutions for nonequilibrium laminar boundary layer. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 1963; 1(9):2156–2157.
4. Gaponov S.A., Petrov G.V. Stability of the boundary layer of a nonequilibrium dissociating gas. Novosibirsk: Nauka; 2013: 95. (In Russ.)
5. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Linear stability of the boundary layer of relaxing gas on a plate. Fluid Dynamics. 2019; 54(3):295–307. DOI: 10.1134/S0568528119030058
6. Brailovskaya I.Yu., Miracles L.A. Reshenie uravneniy pogrannichnogo sloya raznostnym metodom [Solution of boundary layer equations by the difference method]. Vychislitel'nye metody i programirovanie: Sbornik nauchnykh trudov. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Univ.; 1962: 167–182. (In Russ.)
7. Paskonov V.M. Standartnaya programma dlya resheniya zadach pogrannichnogo sloya. Chislennye metody v gazovoy dinamike [A standard program for solving boundary layer problems. Numerical methods in gas dynamics]. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta; 1963:110–116. (In Russ.)
8. Grigor'ev Yu.N., Ershov I.V. Asymptotic theory of neutral stability of the Couette flow of a vibrationally excited gas. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2017; 58(1):1–16.
9. Grigoryev Yu.N., Ershov I.V. Asymptotic estimate of stability of the supersonic boundary layer in a vibrationally excited gas on a plate. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2019; 69(5-6):749–769.
10. Mason E.A., Monchick L. Heat conductivity of polyatomic and polar gases. The Journal of Chemical Physics. 1962; 36(6):1622–1639.