

## Математическое моделирование селективного водозаборного процесса в трехслойном стратифицированном водоеме при заборе воды из внутреннего пространства

И. Д. МУЗАЕВ<sup>1,2</sup>, К. С. ХАРЕБОВ<sup>1</sup>, Н. И. МУЗАЕВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Геофизический институт Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия

<sup>2</sup>Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Владикавказ, Россия

Контактный автор: Музаев Илларион Д., e-mail: [illarion.muzaev@yandex.ru](mailto:illarion.muzaev@yandex.ru)

Поступила 11 сентября 2019 г., доработана 14 февраля 2020 г., принята в печать 2 марта 2020 г.

Проведено механико-математическое моделирование селективного водозаборного процесса в трехслойном стратифицированном водоеме, когда вода забирается из внутреннего объема промежуточного слоя водоема. Составленная математическая модель представляет контактную начально-краевую задачу теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости. Водозабор из внутреннего пространства промежуточного слоя смоделирован в виде объемного стока с бесконечно малой толщиной и конечным сточным расходом. В результате решения поставленной начально-краевой задачи получена система расчетных формул, которая с привлечением компьютерных средств позволяет выбирать диаметр водозаборной трубы и расход через нее, вычислять отметку глубинного расположения конца водозаборной трубы. Выбор этих параметров обеспечивает селективный водозабор исключительно из промежуточного слоя, где вода чище и холоднее, чем в других слоях водоема.

*Ключевые слова:* стратифицированный водоем, селективный водозабор, водозаборное окно, контактная начально-краевая задача, теории поверхностных и внутренних гравитационных волн, интегральное преобразование Лапласа, идеальная несжимаемая жидкость.

*Цитирование:* Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И. Математическое моделирование селективного водозаборного процесса в трехслойном стратифицированном водоеме при заборе воды из внутреннего пространства. Вычислительные технологии. 2020. 25(2): 36–49.

### Введение

При решении вопросов, связанных с водоснабжением различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций, в ряде случаев бывает целесообразно забирать воду из внутреннего объема промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема — источника водоснабжения. Во внутреннем объеме промежуточного слоя вода бывает чище, чем в нижнем мутном слое, и холоднее, чем в верхнем слое. Проектирование и компьютерное моделирование такого водозаборного

устройства и процесса забора воды должны исключать попадание воды из верхнего и нижнего слоев в водозаборную трубу, подведенную к промежуточному слою. Подобный способ водозабора обычно называется селективным. В справочных литературных источниках [1, 2] и строительных нормах и правилах [3] для расчета и проектирования рекомендуется использовать следующие эмпирические формулы. В случае, когда вода забирается из внутреннего объема верхнего слоя двухслойного стратифицированного водоема (рис. 1), рекомендована эмпирическая формула Давидиана — Гловера (1) [1, 2, 4, 5]

$$\frac{H_1}{d} = 0.42 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{gd \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1}}}}, \quad (1)$$

где  $H_1$  и  $H_2$  — толщины слоев,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — плотность верхнего и нижнего слоев воды соответственно,  $g$  — ускорение силы тяжести. Когда вода забирается из нижнего слоя двухслойного стратифицированного водоема, рекомендована эмпирическая формула Харлемана [1, 2, 5]

$$\frac{H_2}{d} = 0.69 \sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{gH_2 \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1}}}}, \quad (2)$$

где приняты такие же обозначения, как и в (1).

В справочных литературных источниках, а также в строительных нормах и правилах [1–5] рекомендовано применять эти формулы только, когда вода забирается из двухслойного стратифицированного водоема. В случае необходимости забора воды из внутреннего объема промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема такой простой эмпирической формулы не существует.

В статье [6] поставлена и решена начально-краевая задача, моделирующая селективный водозаборный процесс в трехслойном стратифицированном водоеме, когда вода забирается из промежуточного слоя через окно, устроенное на участке боковой грани водоема. Задача поставлена и решена аналитически в рамках линейной теории по-

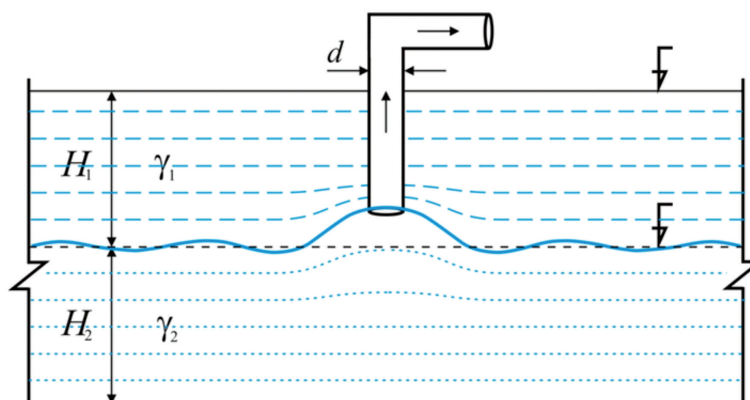


Рис. 1. Нижнее критическое положение раздела слоев воды

Fig. 1. The lower critical position of the interface between water layers

верхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости. В результате получена совокупность расчетных формул, которые позволяют рассчитать и спроектировать водозаборное устройство, а также подобрать расход и скорость забираемой воды таким образом, чтобы вода из верхнего и нижнего слоев не попадала в водозаборное окно, что обеспечивает селективный водозаборный процесс из промежуточного слоя водоема.

Селективный водозаборный процесс, когда вода забирается из внутреннего пространства промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема, до настоящего времени не изучен, и в литературных источниках не представлена совокупность расчетных формул, позволяющих рассчитывать и проектировать водозаборные устройства, обеспечивающие водозабор из внутреннего объема промежуточного слоя.

Теоретические разработки и вычислительные эксперименты, представленные в настоящей статье, относятся к данной проблеме.

## 1. Постановка и решение контактной начально-краевой задачи

Расчетная схема водозаборного процесса, когда вода забирается из внутреннего объема промежуточного слоя трехслойного плотностно-стратифицированного водоема — источника водоснабжения различных промышленных предприятий, в том числе тепловых и атомных электростанций, представлена на рис. 2.

Водоем имеет форму прямоугольного параллелепипеда длиной  $L_1$  и шириной  $L_2$ . Через  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, H_1, H_2, H_3$  обозначены плотность и толщина верхнего, промежуточного и нижнего слоев воды соответственно. Вода из водоема забирается через трубопровод, подведенный к промежуточному слою водоема.

В выбранной пространственной координатной системе  $OXYZ$  ось  $OX$  направлена вдоль невозмущенной поверхности раздела промежуточного и нижнего слоев водоема. Ось  $OY$  направлена по ширине, а ось  $OZ$  — вертикально вверх.

При включении водозаборной системы первоначально горизонтальные поверхности раздела слоев возмущаются и на них образуются внутренние гравитационные волны. Отметку нижнего конца водозаборного трубопровода и расход забираемой воды надо

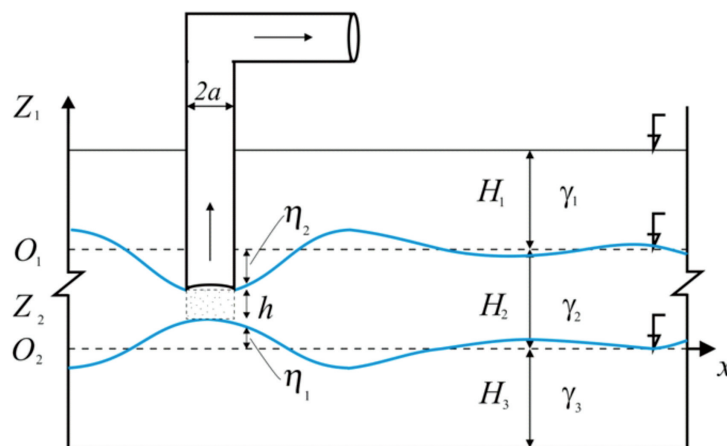


Рис. 2. Схема водозаборного процесса / Fig. 2. The scheme of the water intake process

подобрать таким образом, чтобы поверхность раздела верхнего и промежуточного слоев не опустилась до отметки нижнего конца трубопровода и одновременно поверхность раздела промежуточного и нижнего слоев не поднялась до отметки его нижнего конца. Это обеспечит селективный водозабор исключительно из промежуточного слоя водоема.

Согласно линейной теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в идеальной несжимаемой жидкости математическую модель вышеописанного водозаборного процесса будет представлять следующая контактная начально-краевая задача [6–10]:

$$\Delta\Phi_1(x, y, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad H_2 < z < H_1 + H_2, \quad (3)$$

$$\Delta\Phi_2(x, y, z, t) = -\frac{q(t)}{2a2bh} f(x, y, z) \quad \text{при} \quad 0 < z < H_2, \quad (4)$$

$$\Delta\Phi_3(x, y, z, t) = 0 \quad \text{при} \quad -H_3 < z < 0, \quad (5)$$

$$\Phi_i = \dot{\Phi}_i = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (6)$$

$$\Phi'_{i,x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \text{ и } x = L_1, \quad (7)$$

$$\Phi'_{i,y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \text{ и } y = L_2, \quad (8)$$

$$\dot{\Phi}_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = H_1 + H_2, \quad (9)$$

$$\Phi'_{1,z} = \Phi'_{2,z}, \quad \gamma_1(\ddot{\Phi}_1 + g\Phi'_{1,z}) = \gamma_2(\ddot{\Phi}_2 + g\Phi'_{2,z}) \quad \text{при} \quad z = H_2, \quad (10)$$

$$\Phi'_{2,z} = \Phi'_{3,z}, \quad \gamma_2(\ddot{\Phi}_2 + g\Phi'_{2,z}) = \gamma_3(\ddot{\Phi}_3 + g\Phi'_{3,z}) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (11)$$

$$\Phi'_{3,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_3. \quad (12)$$

Здесь приняты обозначения:  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  — потенциалы скоростей в верхнем, промежуточном и нижнем слоях воды соответственно;  $x, y, z$  — пространственные координаты жидкой точки;  $t$  — время;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\Delta$  — дифференциальный оператор Лапласа по пространственным координатам. Точкой над символами обозначены частные производные по времени  $t$ , штрихом над символами — частные производные по соответствующей пространственной координате, приписанной к символу. Например:

$$\dot{\Phi}_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}, \quad \Phi'_{1,z} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}, \quad \Phi'_{1,y} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial y} \quad \text{и т. д.} \quad (13)$$

Водозаборный процесс через трубу в дифференциальном уравнении (4) смоделирован как система стоков, непрерывно распределенная в фиктивном прямоугольнике бесконечно малой высоты  $h$ , примыкающем к месту затекания воды в трубу. Продольный и поперечный размеры прямоугольника обозначены через  $2a$  и  $2b$ . Если трубопровод имеет прямоугольное сечение, то  $2a$  и  $2b$  будут внутренними размерами поперечного сечения трубы. Если труба круглая с внутренним диаметром  $D$ , то размеры  $2a$  и  $2b$  подбираются из условия равенства площади круга и площади фиктивного прямоугольника, т. е.

$$a = b = \sqrt{\pi} \frac{D}{4}. \quad (14)$$

Вспомогательная функция  $f(x, y, z)$  равна единице, если точка  $(x, y, z)$  принадлежит введенному фиктивному параллелепипеду, в котором распределена система стоков, в противном случае  $f(x, y, z) = 0$ .

Аналитически эту функцию можно представить так:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{при } (|x - x_0| < a) \cap (|y - y_0| < b) \cap (z_0 - h < z < z_0), \\ 0 & \text{при нарушении хотя бы одного из этих неравенств,} \end{cases} \quad (15)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты центра поперечного сечения трубы, через которое вода затекает в трубу.

Расход забираемой воды через трубу  $q(t)$  равен расходу суммарного стока в фиктивном параллелепипеде и задается по следующей зависимости от времени:

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \frac{t}{t_0} & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ q_0 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad (16)$$

где  $q_0$  — постоянный расход,  $t_0$  — промежуток времени медленного полного открытия задвижки.

Относительно поставленных начальных и граничных условий можно сделать следующие разъяснения. Начальные условия (6) выражают неподвижность слоев воды и горизонтальное положение поверхностей раздела слоев и свободной поверхности в начальный момент времени  $t = 0$ , т. е. до начала открытия задвижки. Граничные условия выражают следующее: (7) и (8) — неподвижность и непроницаемость боковых граней водоема; (9) — пренебрежение волнообразованием и атмосферным давлением на свободной поверхности водоема; (10) и (11) — в линейном приближении равенство вертикальных составляющих скоростей и гидродинамических давлений на поверхностях раздела слоев воды; (12) — неподвижность и непроницаемость дна водоема.

При известных потенциалах скоростей уравнение волновой поверхности раздела верхнего и промежуточного слоев имеет следующий вид [6–10]:

$$\eta_1(x, y, t) = \frac{\gamma_1}{(\gamma_2 - \gamma_1)g} \dot{\Phi}_1(x, y, z, t) - \frac{\gamma_2}{(\gamma_2 - \gamma_1)g} \dot{\Phi}_2(x, y, z, t) \quad \text{при } z = H_2. \quad (17)$$

Уравнение волновой поверхности раздела промежуточного и нижнего слоев определяется как

$$\eta_2(x, y, t) = \frac{\gamma_2}{(\gamma_3 - \gamma_2)g} \dot{\Phi}_2(x, y, z, t) - \frac{\gamma_3}{(\gamma_3 - \gamma_2)g} \dot{\Phi}_3(x, y, z, t) \quad \text{при } z = 0. \quad (18)$$

В составленной модели влиянием тела водозаборного трубопровода на гидродинамический процесс пренебрегается в связи с тем, что объем, занятый трубой, ничтожно мал по сравнению с объемом водоема.

Поставленная контактная начально-краевая задача решена путем применения следующих методов математической физики. Вначале проведено интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$ . В результате преобразования совокупность выражений (3)–(18) с учетом начальных условий (6) в изображениях переписывается в следующем виде [11, 12]:

$$\Delta \tilde{\Phi}_1(x, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad H_2 < z < H_1 + H_2, \quad (19)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}_2(x, y, z) = -\frac{\tilde{q}}{4abh} f(x, y, z) \quad \text{при} \quad 0 < z < H_2, \quad (20)$$

$$\Delta \tilde{\Phi}_3(x, y, z) = 0 \quad \text{при} \quad -H_3 < z < 0, \quad (21)$$

$$\tilde{\Phi}'_{i,x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = L_1, \quad (22)$$

$$\tilde{\Phi}'_{i,y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = L_2, \quad (23)$$

$$\tilde{\Phi}_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = H_1 + H_2, \quad (24)$$

$$\tilde{\Phi}'_{1,z} = \tilde{\Phi}'_{2,z}, \quad \gamma_1(p^2 \tilde{\Phi}_1 + g \tilde{\Phi}'_{1,z}) = \gamma_2(p^2 \tilde{\Phi}_2 + g \tilde{\Phi}'_{2,z}) \quad \text{при} \quad z = H_2, \quad (25)$$

$$\tilde{\Phi}'_{2,z} = \tilde{\Phi}'_{3,z}, \quad \gamma_2(p^2 \tilde{\Phi}_2 + g \tilde{\Phi}'_{2,z}) = \gamma_3(p^2 \tilde{\Phi}_3 + g \tilde{\Phi}'_{3,z}) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (26)$$

$$\Phi'_{3,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где  $p$  — параметр преобразования Лапласа; знаком “ $\sim$ ” над символом обозначено изображение, соответствующее символу гидродинамической величины.

Далее функции  $\tilde{\Phi}_l(x, y, z)$  разлагаются в двойные ряды Фурье по координатам  $x$  и  $y$  [11, 12]:

$$\tilde{\Phi}_l(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\psi}_l(z) \cos \frac{n\pi}{L_1} x \cos \frac{m\pi}{L_2} y, \quad i = 1, 2, 3. \quad (28)$$

Двойные ряды (28) непосредственно удовлетворяют граничным условиям (22) и (23). После подстановки рядов (28) в дифференциальные уравнения (19)–(21), в выражения (17) и (18), а также в граничные условия (22)–(25) получится следующая контактная краевая задача относительно искомым функций  $\tilde{\psi}_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3$  [11, 12]:

$$\tilde{\psi}''_{1,zz} - \lambda^2 \tilde{\psi}_1 = 0 \quad \text{при} \quad H_2 < z < H_1 + H_2, \quad (29)$$

$$\tilde{\psi}''_{2,zz} - \lambda^2 \tilde{\psi}_2 = -\frac{\tilde{q}}{4abh} \beta f_1(z) \quad \text{при} \quad 0 < z < H_2, \quad (30)$$

$$\tilde{\psi}''_{3,zz} - \lambda^2 \tilde{\psi}_3 = 0 \quad \text{при} \quad -H_3 < z < 0, \quad (31)$$

$$\tilde{\psi}_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = H_1 + H_2, \quad (32)$$

$$\tilde{\psi}'_{1,z} = \tilde{\psi}'_{2,z}, \quad \gamma_1(p^2 \tilde{\psi}_1 + g \tilde{\psi}'_{1,z}) = \gamma_2(p^2 \tilde{\psi}_2 + g \tilde{\psi}'_{2,z}) \quad \text{при} \quad z = H_2, \quad (33)$$

$$\tilde{\psi}'_{2,z} = \tilde{\psi}'_{3,z}, \quad \gamma_2(p^2 \tilde{\psi}_2 + g \tilde{\psi}'_{2,z}) = \gamma_3(p^2 \tilde{\psi}_3 + g \tilde{\psi}'_{3,z}) \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (34)$$

$$\psi'_{3,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -H_3. \quad (35)$$

Решив контактную краевую задачу (29)–(35) относительно обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, определим функции  $\tilde{\psi}_i$ , а следовательно, и потенциалы скоростей  $\Phi_i$  в изображениях. В результате применения преобразования Лапласа и разложения изображений в ряды Фурье уравнения волновых поверхностей (17) и (18) в изображениях запишутся в следующем виде:

$$\eta_{1,n,m} = \frac{p}{(\gamma_2 - \gamma_1)g} (\gamma_1 \tilde{\psi}_1 - \gamma_2 \tilde{\psi}_2) \quad \text{при} \quad z = H_1, \quad (36)$$

$$\eta_{2,n,m} = \frac{p}{(\gamma_3 - \gamma_2)g} (\gamma_2 \tilde{\psi}_2 - \gamma_3 \tilde{\psi}_3) \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (37)$$

Правые части выражений (36) и (37) относительно параметра  $p$  интегрального преобразования Лапласа получаются в виде произведения  $\tilde{q}$  и дроби, где в числителях

содержатся кубические полиномы с нулевыми свободными членами. В знаменателях же содержится один биквадратный полином. В связи с этим вычисление оригиналов  $\tilde{\eta}_{1,n,m}$  и  $\tilde{\eta}_{2,n,m}$  не связано с большими математическими трудностями. Для их вычисления достаточно использовать таблицу операционного исчисления и теорему о свертке двух функций. Окончательно для уравнения волновых поверхностей раздела слоев получается следующая совокупность расчетных формул:

$$\begin{aligned} \eta_1(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{1,n,m}(t) \cos a_n x \cos a_m y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{1,n,0}(t) \cos a_n x + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{1,0,m}(t) \cos a_m y, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \eta_2(x, y, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{2,n,m}(t) \cos a_n x \cos a_m y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{2,n,0}(t) \cos a_n x + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{2,0,m}(t) \cos a_m y, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\eta_{1,n,m}(t) = \frac{\gamma_2 \beta_{n,m}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left[ \left( \frac{R_1}{S_1} \omega_1^2 - g\lambda \frac{d_1}{S_1} \right) f_1(t) - \left( \frac{R_1}{S_1} \omega_2^2 - g\lambda \frac{d_1}{S_1} \right) f_2(t) \right], \quad (40)$$

$$\eta_{2,n,m}(t) = \frac{\gamma_2 \beta_{n,m}}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \left[ \left( \frac{R_2}{S_1} \omega_1^2 - g\lambda \frac{d_2}{S_1} \right) f_1(t) - \left( \frac{R_2}{S_1} \omega_2^2 - g\lambda \frac{d_2}{S_1} \right) f_2(t) \right], \quad (41)$$

где

$$R_1 = (\gamma_2 \operatorname{th} 3 + \gamma_3 \operatorname{th} 2) I_1 - (\gamma_2 \operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3 + \gamma_3) I_2, \quad (42)$$

$$d_1 = (\gamma_3 - \gamma_2) [\operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3 \cdot I_1 - \operatorname{th}_3 \cdot I_2], \quad (43)$$

$$I_1 = \frac{1}{2\lambda h} [e^{\lambda(H_2 - Z_0 + h)} + e^{-\lambda(H_2 - Z_0 + h)} - (e^{\lambda(H_2 - Z_0)} + e^{-\lambda(H_2 - Z_0)})], \quad (44)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\lambda h} [e^{\lambda(H_2 - Z_0 + h)} - e^{-\lambda(H_2 - Z_0 + h)} - (e^{\lambda(H_2 - Z_0)} - e^{-\lambda(H_2 - Z_0)})], \quad (45)$$

$$\omega_1 = \sqrt{g\lambda \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4S_1 S_3}{S_2^2}} \right) \frac{|S_2|}{2S_1}}, \quad (46)$$

$$\omega_2 = \sqrt{g\lambda \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4S_1 S_3}{S_2^2}} \right) \frac{|S_2|}{2S_1}}, \quad (47)$$

$$S_1 = \gamma_2^2 \cdot \operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3 + \gamma_2 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{th} 1 \cdot \operatorname{th} 3 + \gamma_1 \gamma_3 \operatorname{th} 1 \operatorname{th} 2, \quad (48)$$

$$S_2 = \gamma_1 \gamma_2 (\operatorname{th} 3 + \operatorname{th} 1 \cdot \operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3) + \gamma_1 \gamma_3 (\operatorname{th} 2 - \operatorname{th} 1 \cdot \operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3) - \rho_2 \rho_3 (\operatorname{th} 2 + \operatorname{th} 3), \quad (49)$$

$$S_3 = (\gamma_2 - \gamma_1) (\gamma_3 - \gamma_2) \operatorname{th} 2 \cdot \operatorname{th} 3, \quad (50)$$

$$\operatorname{th} i = \frac{1 - e^{-2\lambda H_i}}{1 + e^{-2\lambda H_i}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (51)$$

$$R_2 = \gamma_2 I_3 + \gamma_1 \operatorname{th} 1 \cdot I_4, \quad d_2 = (\gamma_2 - \gamma_1) I_4, \quad (52)$$

$$I_3 = \frac{e^{-\lambda(Z_0 - h)} + e^{-\lambda(2H_2 - Z_0 + h)} - (e^{-\lambda Z_0} + e^{-\lambda(2H_2 - Z_0)})}{h\lambda(1 + e^{-2\lambda H_2})}, \quad (53)$$

$$I_4 = \frac{e^{-\lambda(Z_0-h)} - e^{-\lambda(2H_2-Z_0+h)} - (e^{-\lambda Z_0} - e^{-\lambda(2H_2-Z_0)})}{h\lambda(1 + e^{-2\lambda H_2})}, \quad (54)$$

$$\beta_{n,m} = \frac{16}{L_1 L_2} \frac{\cos a_n x_0 \cdot \sin a_n a \cdot \cos a_m y_0 \cdot \sin a_m a}{a_n a_m}, \quad (55)$$

$$\lambda = \sqrt{a_n^2 + a_m^2}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L_1}, \quad a_m = \frac{m\pi}{L_2}, \quad (56)$$

$$\delta = \frac{q_0}{4ab}, \quad \beta_{n,0} = \frac{8b}{L_1 L_2} \frac{\cos a_n x_0 \cdot \sin a_n a}{a_n}, \quad \beta_{0,m} = \frac{8a}{L_1 L_2} \frac{\cos a_m y_0 \cdot \sin a_m a}{a_m}, \quad (57)$$

$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \omega_1 t}{t_0 \omega_1^2} & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{\cos \omega_1(t - t_0) - \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 t_0} & \text{при } t > t_0, \end{cases} \quad (58)$$

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \omega_2 t}{t_0 \omega_2^2} & \text{при } 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{\cos \omega_2(t - t_0) - \cos \omega_2 t}{\omega_2^2 t_0} & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (59)$$

В выражениях (38) и (39) в однократных рядах коэффициенты при  $\cos a_n x$  и при  $\eta_{1,n,0}(t)$  и  $\eta_{2,n,0}(t)$  вычисляются так же, как при  $\eta_{1,n,m}(t)$  и  $\eta_{2,n,m}(t)$ , с той разницей, что величина  $\lambda = \sqrt{a_n^2 + a_m^2}$  заменяется на  $a_n = n\pi/L_1$ . Коэффициенты при  $\cos a_m y$  и при  $\eta_{1,0,m}(t)$  и  $\eta_{2,0,m}(t)$  вычисляются так же, как при  $\eta_{1,n,m}(t)$  и  $\eta_{2,n,m}(t)$ , с той разницей, что величина  $\lambda$  заменяется на  $a_m = m\pi/L_2$ . Все остальные величины остаются без изменения.

В полученной совокупности расчетных формул величину  $h$ , представляющую высоту введенного фиктивного прямоугольного параллелепипеда, можно устремить к нулю и тем самым раскрыть неопределенность типа  $0/0$  в выражениях для  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$ . Однако при этом сходимости тригонометрических рядов ухудшаются. В связи с этим обстоятельством целесообразно не раскрывать указанные неопределенности, считая  $h$  очень малой величиной, примерно  $h = 0.01$  м.

Легко можно убедиться в том, что поставленная и решенная начально-краевая задача вырождается в начально-краевую задачу, моделирующую селективный водозаборный процесс, когда вода забирается из окна, устроенного на участке боковой грани водоема. Для этого в полученной совокупности формул для  $\eta_1(x, y, t)$  и  $\eta_2(x, y, t)$  достаточно величине  $x_0$  присвоить нулевое значение, а величину  $a$  устремить к нулю и тем самым раскрыть неопределенность типа  $0/0$ .

Очевидно, что селективный водозаборный процесс из внутреннего объема промежуточного слоя будет обеспечен, если диаметр водозаборной трубы, отметка ее заглубления и расход забираемой через трубу воды будут подобраны с таким расчетом, чтобы выполнялась система неравенств

$$\begin{cases} |\eta_{1,\max}(x_0, y_0, t)| < H_1 - Z_0, \\ |\eta_{2,\max}(x_0, y_0, t)| < Z_0. \end{cases} \quad (60)$$

При выполнении первого неравенства системы поверхность раздела промежуточного и верхнего слоев никогда не опустится до конца водозаборной трубы. При выполнении второго неравенства поверхность раздела промежуточного и нижнего слоев также никогда не достигнет конца водозаборной трубы.



## 2. Результаты компьютерных вычислительных экспериментов

На основе полученной совокупности расчетных формул (38)–(60) с помощью компьютера выполнены вычислительные эксперименты. Результаты экспериментов в виде графиков представлены на рис. 3–5.

На рис. 3 приведены графики зависимостей функций  $\eta_1(x_0, y_0, t)$  и  $\eta_2(x_0, y_0, t)$  от времени при различных значениях входного параметра  $Z_0$ , представляющего аппликату (отметку относительно плоскости  $Z = 0$ ) конца водозаборной трубы.  $x_0 = L_1/2$ ,  $y_0 = L_2/2$ ,  $Z = Z_0$  — координаты центра поперечного сечения конца трубы. Переменная времени  $t$  изменялась от 0 до 80 с при шаге  $\Delta t = 2$  с. Остальным входным параметрам на рис. 3–5 присваивались значения:  $L_1 = 100$  м;  $L_2 = 100$  м;  $H_1 = 3$  м;  $H_2 = 3$  м;  $H_3 = 3$  м;  $\gamma_1 = 997$  т/м<sup>3</sup>;  $\gamma_2 = 998$  т/м<sup>3</sup>;  $\gamma_3 = 1000$  т/м<sup>3</sup>;  $q_0 = 1.0$  м<sup>3</sup>/с;  $D = 1.0$  м;  $Z_0 = 1.5$  м.

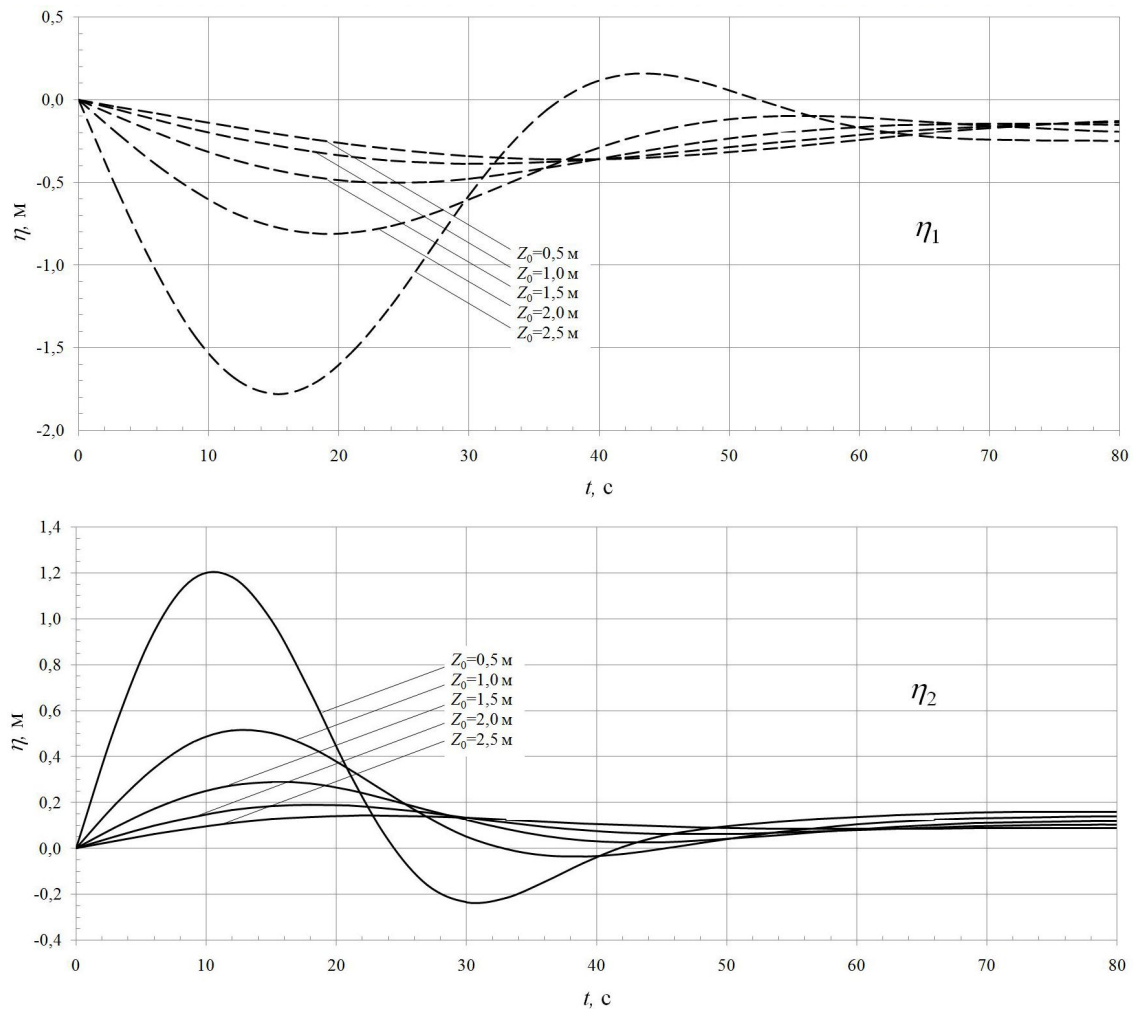


Рис. 3. Графики закона колебания поверхности раздела промежуточного и верхнего (вверху), промежуточного и нижнего (внизу) слоев при различных значениях отметки конца водозаборной трубы

Fig. 3. Graph of the oscillation law for the interfaces between the intermediate and the upper layers interface (upper part) and between the intermediate and lower layers (lower part), respectively, taken at different values of the water intake level at the pipe end

Пробными вычислительными экспериментами было установлено, что в тригонометрических рядах достаточно суммировать не более 2000 членов по каждой координате (в однократных 2000, а в двукратных  $2000 \times 2000$  членов). При дальнейшем увеличении числа членов итоговая сумма уже не изменяется.

Согласно рис. 3, если конец водозаборной трубы опущен до середины толщины промежуточного слоя  $Z_0 = H_2/2 = 1.5$  м, то поверхность раздела промежуточного и верхнего слоев опускается на  $\eta_{1,\max} = 0.5$  м. При этом поверхность раздела промежуточного и нижнего слоев поднимается на  $\eta_{2,\max} = 0.3$  м. Очевидно, что в этом случае селективный водозаборный процесс будет обеспечен из промежуточного слоя. Из приведенных рисунков следует, что с ростом параметра  $Z_0$  значение  $|\eta_{1,\max}|$  увеличивается, а  $|\eta_{2,\max}|$ , наоборот, уменьшается. При  $Z_0 = 0.5$  м  $|\eta_{1,\max}| = 0.4$  м и  $|\eta_{2,\max}| = 1.2$  м, а максимальное значение расхода забираемой воды составляет  $q_{\max} = 0.42$  м<sup>3</sup>/с. Средняя скорость течения воды в отверстие трубопровода составляет  $v_0 = \frac{0.42 \cdot 4}{\pi d^2} = 0.54$  м/с.

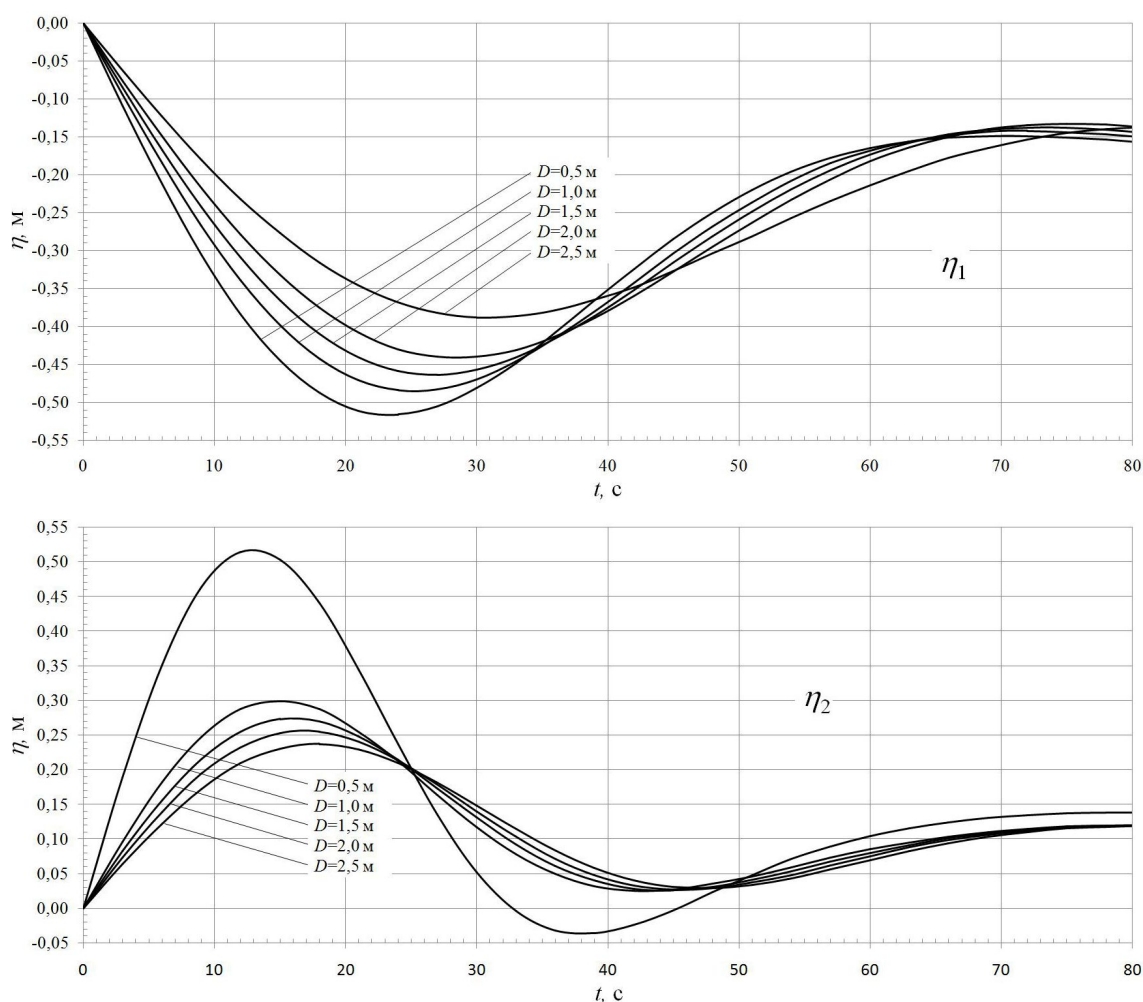


Рис. 4. Графики закона колебания поверхности раздела промежуточного и верхнего (вверху), промежуточного и нижнего (внизу) слоев при различных значениях эффективного диаметра трубы

Fig. 4. Graph of the oscillation law for the interfaces between the intermediate and the upper layers interface (upper part) and between the intermediate and lower layers (lower part), respectively, taken at different values of the effective pipe diameter

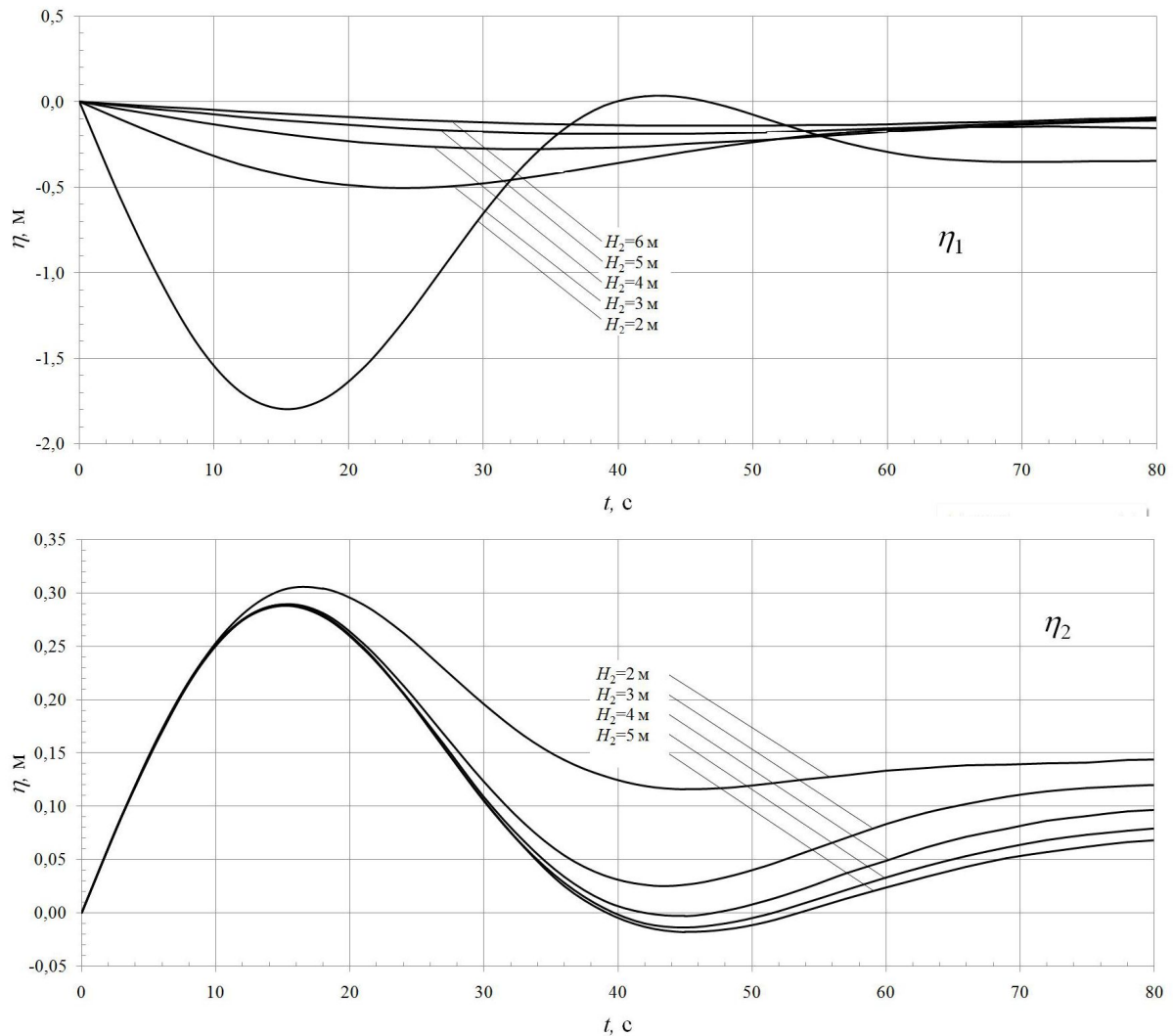


Рис. 5. Графики закона колебания поверхности раздела промежуточного и верхнего (вверху), промежуточного и нижнего (внизу) слоев при различных значениях толщины промежуточного слоя

Fig. 5. Graph of the oscillation law for the interfaces between the intermediate and the upper layers interface (upper part) and between the intermediate and lower layers (lower part), respectively, taken at different values of the thickness of the intermediate layer

На рис. 4 представлены графики зависимости величин  $\eta_1 \left( \frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}, t \right)$  и  $\eta_2 \left( \frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}, t \right)$  от времени при различных значениях эффективного диаметра водозаборной трубы. По мере его увеличения эти величины уменьшаются. Это обусловлено тем, что при постоянном расходе  $q = 1.0 \text{ м}^3/\text{с}$  с увеличением диаметра трубы скорость всасывания воды в трубу уменьшается обратно пропорционально квадрату диаметра.

На рис. 5 представлены графики зависимости величин  $\eta_1 \left( \frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}, t \right)$  и  $\eta_2 \left( \frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2}, t \right)$  от времени при различных значениях толщины  $H_2$  промежуточного слоя. Из этих графиков следует, что максимальное опускание поверхности раздела промежуточного и верхнего слоев, т. е.  $\eta_{1,\max}$ , существенно зависит от толщины  $H_2$  промежуточного слоя.

При этом максимальное поднятие поверхности раздела промежуточного и нижнего слоев  $\eta_{2,\max}$  практически не зависит от толщины промежуточного слоя.

## Выводы

1. Поставлена и решена пространственная контактная начально-краевая задача теории поверхностных и внутренних гравитационных волн в слоистой идеальной несжимаемой жидкости, моделирующая селективный водозаборный процесс из внутреннего объема промежуточного слоя трехслойного стратифицированного водоема, где вода бывает чище, чем в нижнем слое, и холоднее, чем в верхнем.

2. В результате решения поставленной контактной начально-краевой задачи получена совокупность расчетных формул, в которых в качестве внешних входных параметров содержатся диаметр водозаборной трубы, расход забираемой через трубу воды и отметка заглубления конца водозаборной трубы.

3. На основе полученной совокупности формул выполнены вычислительные эксперименты на компьютере и тем самым установлены закономерности влияния вышеуказанных внешних входных параметров на селективный водозаборный процесс. Полученная совокупность расчетных формул позволяет осуществить подбор диаметра водозаборной трубы, определить отметку ее заглубления в промежуточном слое и расход забираемой через трубу воды таким образом, чтобы обеспечить забор воды исключительно из промежуточного слоя воды в водоеме.

## Список литературы

- [1] **Аверкиев А.Г., Макаров И.И., Синотин В.И.** Бесплотинные водозаборные сооружения. М.; Л.: Энергия; 1969: 164.
- [2] Справочник по гидравлике / Под ред. В.А. Большакова. Киев: Вища школа; 1977: 223–225.
- [3] **Соколов А.С., Макаров И.И., Кравец В.И., Филиппова З.Р.** Методические указания по технологическим расчетам водоемов-охладителей. СПб.: ВНИИГ; 2003: 116.
- [4] **Craya A.** Recherches theoriques sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites differentes. La Houille Blanche. 1949; (1):44–55. DOI: 10.1051/lhb/1949017
- [5] **Harleman D.R.F., Stozenbach K.D.** Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972; (4):22–31.
- [6] **Музаев И.Д., Харебов К.С., Музаев Н.И.** Теоретические положения автоматизации проектирования селективных водозаборных устройств. Вычислительные технологии. 2016; 21(4):99–110.
- [7] **Белолипецкий В.М., Костюк В.Ю., Шокин Ю.И.** Математическое моделирование течений стратифицированной жидкости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние; 1991: 176.
- [8] **Музаев И.Д., Музаев Н.И.** Математическое моделирование для системы автоматизации проектирования (САПР) селективных водозаборных устройств. Математический форум. Т. 8, ч. 2: Исследование по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и проблемам математического образования. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А; 2014: 8(2):202–211.
- [9] **Сретенский Л.Н.** Теория волновых движений жидкости. М.: Наука; 1977: 815.

- [10] Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит.; 1947: 929.
- [11] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа; 1970: 710.
- [12] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука; 1977: 830.

---

Вычислительные технологии, 2020, том 25, № 2, с. 36–49. © ИВТ СО РАН, 2020  
Computational Technologies, 2020, vol. 25, no. 2, pp. 36–49. © ICT SB RAS, 2020

ISSN 1560-7534  
eISSN 2313-691X

---

MATHEMATICAL MODELLING

---

DOI:10.25743/ICT.2020.25.2.004

**Mathematical modelling of the selective intake process from the interior volume in a three-layer stratified reservoir**

MUSAEV ILLARION D.<sup>1,2</sup>, KHAREBOV KONSTANTIN S.<sup>1</sup>, MUSAEV NUGZAR I.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Geophysical Institute — the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Centre RAS, 362002, Vladikavkaz, Russia

<sup>2</sup>Vladikavkaz Branch of the Financial University under the Government RF, 362002, Vladikavkaz, Russia

Corresponding author: Musaev Illarion D., e-mail: [illarion.muzaev@yandex.ru](mailto:illarion.muzaev@yandex.ru)

Received September 11, 2019, revised February 14, 2020, accepted March 2, 2020

**Abstract**

The purpose of this work is to carry out mathematical modelling of selective water intake process in a three-layer stratified reservoir, when the water is taken from the interior volume of the intermediate layer of the reservoir.

In the methodology for solving the problem, the water intake from the interior volume of the intermediate layer is modelled as a finite flow rate drain of fluid through an infinitely thin layer. The contact initial-boundary value problem of the theory of surface and internal gravitational waves in an ideal incompressible fluid is used as a mathematical model of the water intake process.

As a result we obtain a system of calculation formulas for estimation of the diameter of water intake pipe and the flow rate through it. The depth mark of the end of the water intake pipe was calculated.

**Originality/value:**

1. The boundary value problem simulating a selective water intake process from the internal volume of the intermediate layer of a three-layer stratified reservoir was formulated and solved.

2. On the basis of the obtained set of formulas, computer experiments were performed and thus the regularities of the influence of the above external input parameters on the process were established.

3. The choice of these parameters provides selective intake exclusively from the intermediate layer, where the water is cleaner than in the lower layer and colder in summer than in the upper layer.

*Keywords:* stratified reservoir, selective water intake, contact initial boundary value problem, theories of surface and internal gravitational waves, Laplace integral transformation, ideal incompressible fluid.

*Citation:* Musaev I.D., Kharebov K.S., Musaev N.I. Mathematical modelling of the selective intake process from the interior volume in a three-layer stratified reservoir. Computational Technologies. 2020; 25(2): 36–49. (In Russ.)

**References**

1. Averkiev A.G., Makarov I.I., Sinotin V.I. Besplotinnye vodozabornye sooruzheniya [Damless water intake structures]. Moscow; Leningrad: Energiya; 1969: 164. (In Russ.)
2. Bol'shakov V.A. Spravochnik po gidravlike [Reference book on hydraulics]. Kiev: Vyshcha Shkola; 1977: 223–225. (In Russ.)
3. Sokolov A.S., Makarov I.I., Kravets V.I. Filippova Z.R. Metodicheskie ukazaniya po tekhnologicheskim raschetam vodoemov-okhladiteley [Guidance on technological calculations of water coolers]. SPb.: VNIIG; 2003: 116. (In Russ.)
4. Craya A. Recherches theoriques sur l'ecoulement de couches superposees de fluides de densites differentes. La Houille Blanche. 1949; (1):44–55. DOI: 10.1051/lhb/1949017
5. Harleman D.R.F., Stozenbach K.D. Fluid mechanics of heat disposal from power generation. Annual Review of Fluid Mechanics. 1972; (4):22–31.
6. Muzaev I.D., Kharebov C.S., Muzaev N.I. Automation of theoretical design for selective water intake devices. Computational Technologies. 2016; 21(4):99–110. (In Russ.)
7. Belolipetskiy V.M., Kostyuk V.Yu., Ershov Yu.I. Matematicheskoe modelirovanie techeniy stratifitsirovannoy zhidkosti [Mathematical modelling of stratified fluid flows]. Novosibirsk: Nauka; 1991: 176.
8. Muzaev I.D., Muzaev N.I. Matematicheskoe modelirovanie dlya sistemy avtomatizatsii proektirovaniya (SAPR) selektivnykh vodozabornykh ustroystv [Mathematical simulation for automation of system design (CAD) for selective water-intake devices]. Matematicheskiy forum "Issledovanie po differentsial'nym uravneniyam, matematicheskomu modelirovaniyu i problemam matematicheskogo obrabotaniya". Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN i RSO-A; 2014: 8(2):202–211. (In Russ.)
9. Sretenskiy L.N. Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Theory of wave motions of a fluid]. Moscow: Nauka; 1977: 815. (In Russ.)
10. Lamb G. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow; Leningrad: Gosudarstvennoe Izdatel'stvo Tekhniko-teoreticheskoy Literatury; 1947: 929. (In Russ.)
11. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Partial differential equation in mathematical physics]. Moscow: Vysshaya Shkola; 1970: 710. (In Russ.)
12. Korn G., Korn T. Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw-Hill Book Company; 1968: 818.