ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ СПЛАЙНЫ

В. И. Киреев, Т. К. Бирюкова
Московский государственный авиационный институт, Россия
e-mail: yukon@dataforce.net

The methods of interpolation and smoothing of one-dimensional and two-dimensional grid functions by parabolic integrodifferential splines (ID-splines), polynomials (ID-polynomials) and ID-splines of any even degree based on the totality of integral and differential conditions of concordance are suggested and mathematically substantiated.

1. Введение

Методы аппроксимации сложных технических поверхностей, а также конструирования разностных схем решения многомерных задач математической физики связаны с использованием аппарата теории приближений и сплайн-функций. Большой опыт в развитии теории сплайн-функций накоплен в ведущих математических институтах РАН, в частности в ИВТ СО РАН, в Московском и Новосибирском университетах и в других организациях [1–7].

В настоящее время наиболее развитыми и математически обоснованными являются методы аппроксимации кубическими сплайнами, которые обобщены на сплайны произвольной нечетной степени. По способу построения эти сплайны — дифференциальные, так как их условия согласования с аппроксимируемой функцией носят дифференциальный характер. Устойчивость сплайнов нечетных степеней обеспечивается симметричностью соответствующих условий согласования на концах каждого частичного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (x_i — узлы сетки $\Delta_1: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$), а также граничных условий на концах отрезка $[a, b]$.

Однако в большом числе вычислительных задач точность исходных данных соответствует точности аппроксимации параболическими многочленами и сплайнами. При конструировании интерполяционных сплайнов четных степеней указанный принцип симметрии не обеспечивается, что влечет за собой неустойчивость, например, параболических сплайнов, построенных обычным способом. Их регуляризация осуществляется путем сдвига узлов сплайна относительно узлов аппроксимируемой сеточной функции [5], что существенно усложняет расчетные алгоритмы.

Традиционные параболические сплайны, также основанные только на дифференциальных условиях согласования аппроксимирующих и аппроксимируемых функций, не обладают свойством консервативности в том смысле, что они не сохраняют интегральные свойства исходных функций (площади под кривыми и объемы под поверхностями). Однако в современных вычислительных алгоритмах математической физики отдается предпочтение консервативным методам, конструируемым для интегральных законов сохранения массы, импульса и энергии. Поэтому желательно, чтобы аппроксимационные алгоритмы, встраиваемые в расчетные схемы, удовлетворяли условию консервативности. При геометрическом моделировании сложных технических поверхностей соблюдение равенства площадей и объемов под заданными и искомыми функциями также предоставляет новые возможности в повышении качества аппроксимации. Из этого следует необходимость совершенствования подходов к численной аппроксимации сплайнами и многочленами, которые удовлетворяли бы требованиям консервативности, устойчивости, сходимости, экономичности, гибкости при их реализации.

В данной статье в развитие [8, 9] предлагаются новые методы аппроксимации функций одной и двух переменных интегродифференциальными многочленами и консервативными интегродифференциальными сплайнами одной и двух переменных как параболическими, так и произвольной четной степени, построенными на основе интегральных условий или совокупности интегральных и дифференциальных условий согласования аппроксимирующей и аппроксимируемой функций. Использование интегральных условий согласования обеспечивает симметричность условий, определяющих параметры сплайна, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, и, тем самым, реализуется возможность построения устойчивых одномерных и двумерных параболических ИД-сплайнов минимального дефекта (т. е. дефекта 1), узлы которых совпадают с узлами исходной сеточной функции.

Одномерные параболические ИД-многочлены $S_{2\text{ИД},i}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяются интегральным условием согласования (нулевой интегральной невязки) многочлена и аппроксимируемой функции $f(x)$ в совокупности с функциональными условиями согласования (условиями интерполяции) или дифференциальными условиями согласования:

$$\delta S^{(-1)}_{2\text{ИД},i}(x_i, x_{i+1}) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} [S_{2\text{ИД},i}(x) - f(x)]dx = 0,$$

$$\delta S^{(p)}_{2\text{ИД},i}(x_k) = S^{(p)}_{2\text{ИД},i}(x_k) - f^{(p)}(x_k) = 0 \quad (k = i, i+1),$$

где $p = 0$ или 1 — порядок производной; x_i — узлы сетки $\Delta_1:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, введенной на отрезке $[a, b]$. При этом для построения параболических ИД-многочленов используется двухточечный шаблон, в то время как классические интерполяционные многочлены второй степени, определяемые только функциональными условиями согласования, строятся на трехточечном шаблоне. Таким образом, использование интегродифференциального метода позволяет повысить гибкость интерполирования, поскольку параболические ИД-многочлены замыкаются на одном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и для вычисления их параметров можно конструировать алгоритмы, учитывающие поведение функции в данной локальной области.

Для построения двумерных интерполяционных параболических ИД-многочленов $S_{2,2\text{ИД},(i,j)}(x, y)$ в прямоугольной области $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ используется двумерное интегральное условие согласования с аппроксимируемой функцией $f(x,y)$

$$\delta S^{(-1,-1)}_{2,2\text{ИД},(i,j)}(x_i,x_{i+1},y_j,y_{j+1}) = \iint\limits_{\Omega_{i,j}} [S_{2,2\text{ИД},(i,j)}(x,y) - f(x,y)]dxdy = 0$$

в совокупности с традиционными условиями интерполяции и одномерными условиями согласования на границах области $\Omega_{i,j}$.

На основе одномерных и двумерных параболических ИД-многочленов в работе построены различные типы параболических ИД-сплайнов. Для аппроксимации функции, заданной на сетке Δ_1 с малой погрешностью (не превышающей $O(H^3)$, $H = \max\limits_{i=1,\dots,n} h_i$) сконструированы так называемые слабо сглаживающие параболические ИД-сплайны $\widetilde{S}_{2\text{ИД}}(x)$, которые для функций $f(x) \in C^m_{[a,b]} (m \geq 3)$ обеспечивают порядок аппроксимации $O(H^3)$ на всем
исследуемом отрезке $[a,b]$ и, в частности, в узлах сеточной функции. Таким образом, слабо сглаживающие ИД-сплайны близки к интерполяционным.

В статье предлагаются также методы сглаживания ИД-сплайнами функций, заданных с погрешностью, превышающей $O(H^3)$, и методы восстановления функций, заданных своими интегралами на частичных отрезках. На основе одномерных сконструированы двумерные параболические слабо сглаживающие ИД-сплайны $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$, аппроксимирующие сеточные функции $f(x_i,y_j)$, заданные с малой погрешностью на сетке $\Delta_2 = \Delta_x \times \Delta_y$ ($\Delta_x: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_x} = b$, $\Delta_y: \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_y} = d$). В работе получены оценки погрешностей аппроксимации функций различных классов гладкости одномерными и двумерными параболическими слабо сглаживающими ИД-сплайнами, из которых следует их сходимость.

Интегродифференциальный подход имеет преимущества и при построении интерполяционных сплайнов произвольной четной степени. Традиционно при конструировании сплайнов четных степеней используются только дифференциальные условия согласования. Для обеспечения существования и единственности такого сплайна необходимо вводить дополнительные узлы "минимального дефекта" [5, 6]. При этом структура сплайна существенно усложняется. Использование интегральных условий согласования позволяет конструировать одно- и двумерные ИД-многочлены и ИД-сплайны произвольной четной степени, узлы которых совпадают с узлами аппроксимируемой сеточной функции. Формулы звеньев ИД-сплайнов в этом случае достаточно просты и способ их построения не представляет особых вычислительных сложностей.

Все рассматриваемые одно- и двумерные ИД-сплайны являются консервативными, т. е. сохраняют площади под кривыми и объемы под поверхностями. Предложенные методы аппроксимации методически исследованы с помощью численных экспериментов применительно к одномерным и двумерным функциям различных классов гладкости.

2. Одномерные параболические интегродифференциальные многочлены и локальные интегродифференциальные сплайны

Введем определения одномерного интегродифференциального сплайна и многочлена. Пусть на отрезке $[a,b]$ на сетке несовпадающих узлов

$$\Delta_1: \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n_1} < x_n = b \tag{1}$$

задана функция $f_i = f(x_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$.

Функция $S_r^{[q]}(x) = \bigcup\limits_{i-0}^{n-1} S_{r,i}(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ и принадлежащая классу гладкости $C^m_{[a,b]}$, составленная из звеньев $S_{r,i}(x)$, называется *одномерным алгебраическим интегродифференциальным сплайном степени* r *дефекта* q $(0 \le m \le r,\ q = r - m)$ с узлами на сетке Δ_1, если каждое звено сплайна при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ представляется в виде многочлена r-й степени $S_{r,i}(x) = \sum\limits_{k=0}^{r} \dfrac{a_{k,i}}{k!}(x - x_i)^k$ с коэффициентами $a_{k,i}$, определяемыми из совокупности интегральных и дифференциальных условий согласования:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} S_{r,i}(x)dx = I_i^{i+1}, \quad \text{где} \quad I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx, \tag{2}$$

$$S_{r,i}^{(p_1)}(x_k) = f_k^{(p_1)}, \quad \text{где} \quad f_k^{(p_1)} = f^{(p_1)}(x_k) \quad (k = i, i+1), \tag{3}$$

где (p_1 — порядки производных, принимающие целые значения из интервала $0 \le p_1 \le m$, и условий непрерывности сплайна $S_r^{[q]}(x)$ и его производных во внутренних узлах сетки Δ_1:

$$S_{r,i-1}^{(p_2)}(x)\Big|_{x=x_i} = S_{r,i}^{(p_2)}(x) = \Big|_{x=x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

где p_2 — порядки производных, принимающие целые значения из интервала $0 \le p_2 \le m$, причем множества порядков производных $\{p_1\}$ и $\{p_2\}$ в условиях (3) и (4) должны быть такими, чтобы их пересечение было нулевым, т. е. $\{p_1\} \cap \{p_2\} = \varnothing$, а логическая сумма составляла последовательность $0, 1, 2, \ldots, m$, т. е. $\{p_1\} \cup \{p_2\} = \{0, 1, 2 \ldots, m\}$.

Многочлен $S_{r,i}(x)$ степени r, аппроксимирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и удовлетворяющий на этом отрезке интегральному условию согласования (2) в совокупности с дифференциальными условиями согласования вида (3), называется *интегродифференциальным многочленом.* Коэффициенты $a_{k,i}$ выражаются через параметры дифференциального и интегрального типов $f_i^{(p)} = f^{(p)}(x_i)$, $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$, которые будут называться *параметрами* сплайна или многочлена.

С помощью интегрального условия согласования (2) и функциональных условий согласования (3) при $p = 0$ путем разрешения уравнений (получающихся из (2), (3)) относительно коэффициентов $a_{k,i}$ выводится формула первого интерполяционного ИД-многочлена на $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_{2\text{ИД}\,1,i}(x) = f_i + \left(\frac{6\nabla I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} - \frac{2\triangle f_{i+1}}{h_{i+1}}\right)(x - x_i) + \left(-\frac{6\nabla I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} - \frac{3\triangle f_{i+1}}{h_{i+1}^2}\right)(x - x_i)^2, \tag{5}$$

где $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$, $\nabla I_i^{i+1} = I_i^{i+1} - f_i h_{i+1}$, $\triangle f_{i+1} = f_{i+1} - f_i$. Дифференциальные условия согласования (3) при $p = 1$ $(k = i, i+1)$ и интегральное условие (2) на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяют формулу второго ИД-многочлена:

$$S_{2\text{ИД}\,2,i}(x) = \left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{1}{2}f_i' h_{i+1} - \frac{1}{6}\triangle f_{i+1}' h_{i+1}\right) + f_i'(x - x_i) + \frac{\triangle f_{i+1}'}{2h_{i+1}}(x - x_i)^2, \tag{6}$$

где $\triangle f_{i+1}' = f_{i+1}' - f_i'$. Если объединить многочлены $S_{2\text{ИД}\,1,i}(x)$ на всех частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, рассматривая их в качестве звеньев сплайна, то получится локальный интерполяционный параболический ИД-сплайн на отрезке $[a,b]$:

$$S_{2\text{ИД}\,1}(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_{2\text{ИД}\,1,i}(x). \tag{7}$$

Сплайн (7) в общем случае имеет дефект $q = 2$, т. е. обеспечивается непрерывность только самого сплайна.

Далее на базе полученных ИД-многочленов $S_{2\text{ИД}\,1,i}(x)$, $S_{2\text{ИД}\,2,i}(x)$ строятся параболические ИД-сплайны минимального дефекта $q = 1$ (имеющие непрерывные первые производные).

Авторами получены оценки погрешностей аппроксимации функций различных классов гладкости ИД-многочленами (5), (6). Здесь приводятся оценки для многочлена (5), обобщенные в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Если параболический ИД-многочлен $S_{2\text{ИД}\,1,i}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ интерполирует функцию $f(x) \in C^m_{[x_i,x_{i+1}]}$ $(m = 1, 2, 3)$, причем параметры ИД-многочлена I_i^{i+1}, f_k $(k = i, i+1)$ известны точно или вычислены с точностью не ниже $O(h^{m+2})$, $O(h^{m+1})$ соответственно, то справедливы оценки:*

$$\left\| R^{(p)}_{2\text{ИД}\,1}(x) \right\|_{[x_i,x_{i+1}]} = \left\| S^{(p)}_{2\text{ИД}\,1,i}(x) - f^{(p)}(x) \right\|_{[x_i,x_{i+1}]} \le T_{m,p} h_{i+1}^{m-p} \left\| f^{(m)}(x) \right\|_{[x_i,x_{i+1}]},$$

где $p = 0, 1$ — порядок производной, $\|g(x)\|_{[x_i,x_{i+1}]} = \max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |g(x)|$ — равномерная норма, $T_{m,p}$ — константы, приведенные в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Константа	Класс функции $f(x)$		
	$C^3_{[x_i,x_{i+1}]}$	$C^2_{[x_i,x_{i+1}]}$	$C^1_{[x_i,x_{i+1}]}$
$T_{m,0}$	$\dfrac{1}{72\sqrt{3}} \approx 0.008019$	$\dfrac{1}{25\sqrt{2}} \approx 0.028284$	$\dfrac{1}{6}$
$T_{m,1}$	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{4}$	2

3. Одномерные параболические глобальные интегродифференциальные сплайны

Использование аппарата интегродифференциальных сплайнов позволяет решить следующие задачи аппроксимации:

1. Задача слабого сглаживания сеточных функций.

Пусть на сетке Δ_1 (1) задана функция $\{f_i = f(x_i) \pm \theta_i\}_{i=0}^n$, где θ_i — погрешности измерения или вычисления значений функции, не превышающие $O(H^3)(H = \max\limits_{i=1,\dots,n} h_i)$. Требуется построить глобальный параболический ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2\text{ИД}}(x)$ с узлами на сетке Δ_1, имеющий погрешность аппроксимации $\left\| \widetilde{S}_{2\text{ИД}}(x) - f(x) \right\|_{[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| \widetilde{S}_{2\text{ИД}}(x) - f(x) \right|$, не превышающую $O(H^3)$ (для $f(x) \in C^m_{[a,b]}$ $(m \ge 3)$), и удовлетворяющий на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, n-1)$ интегральному условию согласования (2) и условиям непрерывности сплайна и его первой производной ((4) при $p_2 = 0, 1$) в узлах сетки Δ_1.

Данный метод аппроксимации будем называть *методом слабого сглаживания*, а соответствующий сплайн — *слабо сглаживающим сплайном.*

2. Задача сильного сглаживания сеточных функций.

Пусть в узлах сетки Δ_1 приближенно задана функция $\{f_i = f(x_i) \pm \varepsilon_i\}_{i=0}^{n}$, где ε_i — погрешности, превышающие $O(H^3)$. Требуется построить сглаживающий глобальный параболический ИД-сплайн дефекта $q = 1$, удовлетворяющий интегральному условию согласования (2).

Данный метод аппроксимации будем называть *методом сильного сглаживания*, а соответствующий сплайн — *сильно сглаживающим сплайном.*

3. Задача восстановления функций по интегралам.

Пусть функция $f(x)$ определена значениями интегралов от нее на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$ $(x_i\,(i = 0, \ldots, n)$ — узлы сетки $\Delta_1)$: $I_0^1, I_1^2, \ldots, I_{n-1}^n$, где $I_i^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$. Требуется восстановить функцию путем построения глобального параболического ИД-сплайна дефекта $q = 1$.

Для решения задачи 1 в работе построены *параболические слабо сглаживающие ИД-сплайны.* Для этих сплайнов разность значений сплайна и функции как в узлах сетки Δ_1, так и на всем рассматриваемом отрезке при аппроксимации функций класса $C_{[a,b]}^m (m \geq 3)$ имеет порядок $O(H^3)$ и, тем самым, указанные сплайны близки к интерполяционным. Во многих практических задачах порядок точности исходных данных не превышает $O(H^3)$. В этих случаях слабо сглаживающие сплайны в сущности являются интерполяционными, так как они обеспечивают выполнение условий интерполяции в узлах сеточной функции с порядком $O(H^3)$.

Однако в отличие от традиционных интерполяционных параболических дифференциальных сплайнов устойчивость ИД-сплайнов обеспечивается без сдвига узлов сплайна относительно узлов аппроксимируемой сеточной функции, что обусловлено применением интегрального условия согласования. При этом ИД-сплайны обладают свойством консервативности, а алгоритмы их построения характеризуются простотой реализации и экономичностью.

Параметры параболических ИД-сплайнов дефекта 1 определяются единственным образом интегральными условиями согласования (2) для каждого частичного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ и условиями непрерывности сплайна и его первой производной (4) (при $p_2 = 0, 1$) в узлах $x_i\,(i = 1, \ldots, n-1)$ в совокупности с двумя граничными условиями на концах отрезка $[a, b]$.

Звено слабо сглаживающего ИД-сплайна вида 1 $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется формулой (5), где вместо f_i используются их сглаженные значения $\tilde{f}_i$. Для обеспечения непрерывности первой производной сплайна $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$ его параметры $\tilde{f}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ следует находить из трехдиагональной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\frac{1}{h_i}\tilde{f}_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)\tilde{f}_i + \frac{1}{h_{i+1}}\tilde{f}_{i+1} = 3\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^i}{h_i^2}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Граничные условия можно задать в виде $\tilde{f}_0 = f_0 = f(x_0)$, $\tilde{f}_n = f_n = f(x_n)$.

Звено слабо сглаживающего ИД-сплайна вида 2 $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ определяется формулой (6), где вместо f_i' используются значения $\bar{m}_i = \widetilde{S}'_{2ИД2,i}(x_i)$. Для обеспечения непрерывности сплайна $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ его дифференциальные параметры $\bar{m}_i$ находятся из трехдиагональной СЛАУ:

$$\bar{m}_{i-1}h_i + 2\bar{m}_i(h_i + h_{i+1}) + \bar{m}_{i+1}h_{i+1} = 6\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{9}$$

В случае равномерной сетки узлов можно использовать следующие граничные соотношения: $\bar{m}_0 = \dfrac{1}{h^2}(-2I_0^1 + 3I_1^2 - I_2^3)$, $\bar{m}_n = \dfrac{1}{h^2}(I_{n-3}^{n-2} - 3I_{n-2}^{n-1} + 2I_{n-1}^n)$. Системы (8) и (9) имеют диагональное преобладание и для их решения применяется экономичный метод прогонки.

В силу единственности сплайны $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ и $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ являются эквивалентными при эквивалентных граничных условиях и одинаковых значениях интегральных параметров I_i^{i+1}.

Для вычисления интегральных параметров сплайнов могут быть использованы лево- и правосторонние квадратурные формулы, обеспечивающие при $f(x) \in C_{[a,b]}^m (m \geq 3)$ порядок точности вычисления интегралов $O(H^4)$:

$$I_{i-1}^i = \frac{h_i^3}{6H_i^{i+1}}\left(-\frac{1}{h_{i+1}}f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1}H_i^{3(i+1)}}{h_i^2 h_{i+1}}f_i + \frac{H_{2i}^{3(i+1)}}{h_i^2}f_{i-1}\right), \tag{10}$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h_{i+1}^3}{6H_i^{i+1}}\left(\frac{H_{3i}^{2(i+1)}}{h_{i+1}^2}f_{i+1} + \frac{H_i^{i+1}H_{3i}^{i+1}}{h_i h_{i+1}^2}f_i - \frac{1}{h_i}f_{i-1}\right), \tag{11}$$

где $H_{ki}^{p(i+1)} = kh_i + ph_{i+1}$.
При равномерной сетке узлов ($h = \mathrm{const}$) соотношения (10), (11) принимают вид

$$I_{i-1}^i = \frac{h}{12}\left(-f_{i+1} + 8f_i + 5f_{i-1}\right), \quad I_i^{i+1} = \frac{h}{12}\left(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}\right).$$

Квадратурные формулы (10), (11) получаются при фиксированных $i-1$, i, $i+1$ из параметрических соотношений

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{h_i}f_{i-1} + 2\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)f_i + \frac{1}{h_{i+1}}f_{i+1}\right) = \frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^2} + \frac{I_{i-1}^i}{h_i^2},$$

$$-\frac{1}{h_i^2}f_{i-1} + \left(\frac{1}{h_{i+1}^2} - \frac{1}{h_i^2}\right)f_i + \frac{1}{h_{i+1}^2}f_{i+1} = 2\left(\frac{I_i^{i+1}}{h_{i+1}^3} - \frac{I_{i-1}^i}{h_i^3}\right),$$

которые вытекают из равенств $S_{2ИД1,i-1}^{(p)}(x_i) = S_{2ИД1,i}^{(p)}(x_i)$ ($p = 1, 2$ соответственно) для ИД-многочленов (5).

При $h = \mathrm{const}$ для вычисления интегралов I_i^{i+1} на всех частичных отрезках можно использовать также квадратурные формулы порядка $O(H^5)$ (см. [8]):

$$I_{i-1}^i = \frac{h}{24}(9f_{i-1} + 19f_i - 5f_{i+1} + f_{i+2}) \quad \text{— левосторонняя формула,} \tag{12}$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h}{24}(-f_{i-1} + 13(f_i + f_{i+1}) - f_{i+2}) \quad \text{— центральная формула,} \tag{13}$$

$$I_i^{i+1} = \frac{h}{24}(f_{i-2} - 5f_{i-1} + 19f_i + 9f_{i+1}) \quad \text{— правосторонняя формула.} \tag{14}$$

Для параболического ИД-сплайна $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$ справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. *Пусть функцию $f(x)(x \in [a,b])$, заданную с точностью не ниже $O(H^4)$ на сетке Δ_1 (1) с параметром неравномерности сетки $Q = \max\limits_{i=1,\dots,n} h_i \min\limits_{i=1,\dots,n} h_i$, аппроксимирует слабо сглаживающий параболический ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$. Тогда если $f(x) \in C^3_{[a,b]}$ и параметры $I_i^{i+1}(i{=}0,\dots,n-1)$ определяются по формулам (10), (11), а $\tilde{f}_i(i{=}0,\dots,n)$ — из трехдиагональной СЛАУ (8) с краевыми условиями $\tilde{f}_0 = f_0 = f(x_0)$, $\tilde{f}_n = f_n = f(x_n)$, то справедливы оценки:*

$$\left\|\widetilde{S}^{(p)}_{2\text{ИД}1}(x) - f^{(p)}(x)\right\|_{[a,b]} \le H^{3-p}\left(T_{3,p} + K_pQ^{1+p}\right)\left\|f^{(''')}(x)\right\|_{[a,b]},$$

где $p = 0,1$ — порядок производной, а константы имеют следующие значения: $T_{3,0} = \dfrac{1}{72\sqrt{3}}$, $T_{3,1} = \dfrac{1}{12}$, $K_0 = \dfrac{11}{48}$, $K_1 = \dfrac{25}{24}$.

Таким образом, при $f(x) \in C^3_{[a,b]}$ сплайны $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$ равномерно сходятся к функции $f(x)$ на последовательности сеток $\Delta_1^{(n)} : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, по крайней мере, со скоростью H^3, а их производные $\widetilde{S}'_{2\text{ИД}1}(x)$ равномерно сходятся к $f'(x)$, по крайней мере, со скоростью H^2 с ростом n.

Доказательство теоремы для сокращения текста опускается.

В работе получены также оценки погрешностей аппроксимации функций, принадлежащих классам гладкости $C^1_{[a,b]}$ и $C^2_{[a,b]}$, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Погрешность	Класс $f(x)$	
	$C^2_{[a,b]}$	$C^1_{[a,b]}$
$\left\|\widetilde{S}^{(p)}_{2\text{ИД}1}(x) - f^{(p)}(x)\right\|_{[a,b]}$	$H^{2-p}\left(T_{2,p}+K_{2,p}Q^{2+p}\right)\left\|f^{('')}(x)\right\|_{[a,b]}$	$H^{1-p}\left(T_{1,p}+(K_{1,p}+K^*_{1,p}Q)Q^{1+p}\right)\|f'(x)\|_{[a,b]}$
$p=0$	$T_{2,0} = \dfrac{1}{25\sqrt{2}}$, $K_{2,0} = \dfrac{9}{24}$	$T_{1,0} = \dfrac{1}{6}$, $K_{1,0} = \dfrac{1}{2}$, $K^*_{1,0} = \dfrac{3}{4}$
$p=1$	$T_{2,1} = \dfrac{1}{8}$, $K_{2,1} = \dfrac{19}{12}$,	$T_{1,1} = 2$, $K_{1,1} = 3$, $K^*_{1,1} = \dfrac{19}{6}$

Преимуществом метода слабого сглаживания по сравнению с интерполяцией традиционными параболическими дифференциальными сплайнами является возможность при вычислении коэффициентов сплайнов учитывать априорную информацию об аппроксимируемой функции — наличие локальных экстремумов, областей быстрого роста или убывания, точек разрыва функции или ее производных и другие особенности. Гибкость данного метода обеспечивается тем, что значения интегральных параметров I_i^{i+1} перед подстановкой их в системы (8) и (9) можно вычислять с учетом локальных свойств функции любым способом, обеспечивающим требуемую точность. Отметим один из таких способов, когда интегралы I_i^{i+1} находятся по явным КФ (10), (11), основанным на шаблоне $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$.

Пусть особая точка x^* не совпадает с узлом сплайна и принадлежит интервалу (x_k, x_{k+1}). Тогда если для вычисления I_{k-1}^k применить правостороннюю КФ (11) (основанную на шаблоне $[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$), а для вычисления I_{k+1}^{k+2} — левостороннюю КФ (10) (основанную на шаблоне $[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$), то ошибки в интегралах I_{k-1}^{k}, I_{k+1}^{k+2} будут меньше, так как интервал (x_k, x_{k+1}) с особой точкой исключен из аппроксимационных шаблонов. Интеграл же I_k^{k+1} можно найти по формуле $I_k^{k+1} = \dfrac{I_{k,L}^{k+1} + I_{k,R}^{k+1}}{2}$, где значение $I_{k,L}^{k+1}$ вычисляется по КФ (11), основанной на шаблоне $[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$, а $I_{k,R}^{k+1}$ вычисляется по КФ (10), основанной на шаблоне $[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$.

Если особая точка x^* совпадает с каким-либо узлом сплайна x_k, то интеграл I_{k-1}^{k} следует вычислять по правосторонней КФ (11) (шаблон $[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$), а интеграл I_k^{k+1} — по левосторонней КФ (10) (шаблон $[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$).

Аналогичный алгоритм применяется и при использовании формул (12) – (14) повышенного порядка точности. Такой способ учета особенностей функции при незначительном усложнении алгоритма позволяет существенно повысить точность аппроксимации методом слабого сглаживания.

Таблица 3

Функция	Сплайн	Норма	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 80$
$f_1(x) = x^4$ $[-0.9, 1.0]$	$\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.002031697	0.000207380	0.000023198	0.000002722
		$L_{2,[a,b]}$	0.000821217	0.000074794	0.000008437	0.000001027
	$S_{2Д}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.008509668	0.001096873	0.000139182	0.000017527
		$L_{2,[a,b]}$	0.001738180	0.000163700	0.000015722	0.000001573
$f_2(x) = e^x$ $[0.1, 2.0]$	$\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.000570609	0.000062119	0.000007090	0.000000837
		$L_{2,[a,b]}$	0.000178250	0.000019406	0.000002337	0.000000290
	$S_{2Д}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.002628014	0.000337959	0.000042859	0.000005397
		$L_{2,[a,b]}$	0.000414072	0.000039705	0.000003928	0.000000408
$f_3(x) = \|x\|$ $[-1.0, 1.0]$	$\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.057235350	0.028368850	0.013936680	0.006722974
		$L_{2,[a,b]}$	0.010745218	0.003798862	0.001342764	0.000474264
	$S_{2Д}(x)$	$R_{[a,b]}$	0.070211160	0.034856555	0.017180351	0.008344448
		$L_{2,[a,b]}$	0.012377421	0.004375827	0.001546731	0.000546347

Методические расчеты, проведенные для параболических слабо сглаживающих ИД-сплайнов при аппроксимации ими функций различных классов гладкости, показали, что в ряде случаев они обеспечивают более точное приближение, чем традиционные параболические дифференциальные сплайны, при построении которых для обеспечения устойчивости узлы сплайна сдвигаются относительно узлов сеточной функции [5]. Сопоставление результатов приближения функций с помощью ИД-сплайнов с результатами для классических дифференциальных сплайнов проводилось по двум нормам:

$$R_{[a,b]} = \|S(x) - f(x)\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |S(x) - f(x)| \quad \text{— равномерная норма,}$$

$$L_{2,[a,b]} = \left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\left[S(x_i) - f(x_i)\right]^2\right)^{1/2} \quad (k \gg n) \text{ — среднеквадратическая норма}$$

(n — число интервалов разбиения отрезка $[a, b]$).

Результаты аппроксимации функций сплайном $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ и традиционным дифференциальным сплайном $S_{2Д}(x)$ (см. [5]) приведены в табл. 3. Интегральные параметры $\hat{I}_i^{i+1}$

сплайна $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ при этом вычислялись по формулам (12) – (14) порядка точности $O(h^5)$ с учетом локальных свойств исходных функций.

Сравнение значений норм $R_{[a,b]}$ и $L_{2,[a,b]}$ для сплайнов $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ и $S_{2Д}(x)$ позволяет сделать вывод, что ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ лучше приближает рассматриваемые функции $f(x)$, чем сплайн $S_{2Д}(x)$, поскольку $R_{[a,b]}$ и $L_{2,[a,b]}$ для $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ имеют меньшие значения, чем соответствующие нормы для $S_{2Д}(x)$. Из данных табл. 3 также видно, что для $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ сходится к аппроксимируемой функции $f(x)$, о чем свидетельствует уменьшение норм при возрастании n.

Для решения задачи 2 (сильное сглаживание) можно применять уже рассмотренные ИД-сплайны с $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ и $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$, если их интегральные параметры I_i^{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ вычислять так, чтобы получающиеся сплайны осредняли погрешности измерений или вычислений и восстанавливали исходную функцию $f(x)$. Для этого сначала строятся ломаные $L_{(в)}(x)$ и $L_{(н)}(x)$, ограничивающие “полосу разброса” значений исходной функции сверху и снизу соответственно. Затем параметры I_i^{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ вычисляются как средние значения между интегралом от ломаной $L_{(в)}(x)$ и интегралом от ломаной $L_{(н)}(x)$ на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ по формуле

$$I_i^{i+1} = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} L_{(в)}(x)dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} L_{(н)}(x)dx\right).$$

Далее найденные значения интегралов I_i^{i+1} используются для вычисления параметров $\tilde{f}(x)$ сплайна $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ или $\bar{m}_i$ сплайна $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ из систем (8) и (9) соответственно. В результате подстановки найденных значений параметров в формулы звеньев сплайна $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ или $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ получаются глобальные сплайны дефекта $q = 1$, сглаживающие заданную сеточную функцию $\{f_i = f(x_i) \pm \varepsilon_i\}_{i=0}^{n}$.

Для решения задачи 3 (восстановление функции по интегралам) также используются ИД-сплайны $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ и $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$. В этом случае в качестве интегральных параметров сплайнов следует использовать заданные или заранее вычисленные значения интегралов I_i^{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$, с помощью которых находятся параметры $\tilde{f}(x)$ сплайна $\widetilde{S}_{2ИД1}(x)$ или $\bar{m}_i$ сплайна $\widetilde{S}_{2ИД2}(x)$ из систем (8) и (9) соответственно. Полученные глобальные ИД-сплайны дефекта $q = 1$ восстанавливают исходную функцию $f(x)$ при $f(x) \in C^m_{[a,b]}$ $(m \geq 3)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью $O(H^3)$, если параметры I_i^{i+1} $(i = 0, \ldots, n-1)$ заданы с точностью не ниже $O(H^4)$.

4. Двумерные параболические интегродифференциальные многочлены и сплайны

На основе одномерных интегродифференциальных параболических многочленов и сплайнов сконструированы двумерные параболические ИД-многочлены и ИД-сплайны, сохраняющие равенство объемов под аппроксимируемой и аппроксимирующей функциями. Задача слабого сглаживания функции двух переменных с помощью двумерного параболического ИД-сплайна дефекта 1 по x и по y ставится следующим образом.

Пусть на сетке $\Delta_2 = \Delta_x \times \Delta_y$ $(\Delta_x\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_x} = b,\ \Delta_y\colon c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_y} = d)$ задана функция двух переменных $\{f_{i,j} = f(x_i, y_j) \pm \theta_i, j\}_{i=0, j=0}^{n_x\ \ n_y}$, где

θ_i, j $(i = 0, \ldots, n_x, j = 0, \ldots, n_y)$ — погрешности измерения или вычисления значений функции, не превышающие $O(H_x^3 + H_y^3)(H_x = \max\limits_{i=1,\ldots,n_x} h_{xi}, H_y = \max\limits_{j=1,\ldots,n_y} h_{yj})$.

Требуется построить глобальный параболический ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$ с узлами на сетке Δ_2, имеющий для функций $f(x,y) \in C_\Omega^{m_x,m_y}$ $(m_x \geq 3, m_y \geq 3)$ погрешность аппроксимации $\left\|\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y) - f(x,y)\right\|_\Omega = \max\limits_{(x,y)\in\Omega} |\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y) - f(x,y)|$, не превышающую $O(H_x^3 + H_y^3)$, и удовлетворяющий следующим условиям:

1) двумерному интегральному условию согласования с аппроксимируемой функцией

$$\iint\limits_{\Omega_{i,j}} \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)dxdy = I2_{i,j}^{i+1,j+1}, \quad (i = 0, \ldots, n_x - 1, j = 0, \ldots, n_y - 1) \tag{15}$$

($I2_{i,j}^{i+1,j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x-1, j = 0, \ldots, n_y-1)$ — заданные или предварительно вычисленные с точностью не ниже $O(H_x^5+H_y^5)$ двойные интегралы от функции $f(x,y)$ во всех частичных областях $\Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}]$, образуемых сеткой Δ_2);

2) условиям непрерывности сплайна $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$ и его частных производных $\dfrac{\partial\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)}{\partial x\partial y}$ на границах частичных областей $\Omega_{i,j}$ и, следовательно, во всей области Ω.

Двумерные слабо сглаживающие ИД-сплайны $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$ строятся на основе одномерных ИД-сплайнов $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$, рассмотренных выше в разделе 3. Пространство $S_{2,2}^{[1,1]}(\Delta_2)$ двумерных параболических сплайнов $S_{2,2}^{[1,1]}(x,y)$ дефекта 1 по x и y (класса $C_\Omega^{1,1}$), построенных на сетке Δ_2, представляет собой тензорное произведение пространств $S_2^{[1]}(\Delta_x)$ и $S_2^{[1]}(\Delta_y)$ одномерных параболических сплайнов дефекта 1, построенных на сетках Δ_x и Δ_y соответственно [3]. Размерность пространства $S_{2,2}^{[1,1]}(\Delta_2)$ равна $(n_x+2)\cdot(n_y+2)$ (см. [3]). Следовательно, для однозначного определения коэффициентов двумерного параболического сплайна дефекта 1 по x и y $S_{2,2}^{[1,1]}(x,y)$ необходимо задать $(n_x + 2) \cdot (n_y + 2)$ условий.

Формула звена одномерного слабо сглаживающего ИД-сплайна $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в форме Лагранжа записывается следующим образом:

$$\widetilde{S}_{2\text{ИД}1,i}(x) = \frac{\varphi_1(u)}{h_{i+1}} I_i^{i+1} + \varphi_2(u)\tilde{f}_i + \varphi_3(u)\tilde{f}_{i+1}, \tag{16}$$

где $u = \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}}$ $(0 \leq u \leq 1)$, $\varphi_1(u) = 6u(1-u)$, $\varphi_2(u) = (1-u)(1-3u)$, $\varphi_3(u) = u(3u-2)$. Тогда звено двумерного слабо сглаживающего ИД-сплайна $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y) = \bigcup\limits_{i=0}^{n_x-1} \bigcup\limits_{j=0}^{n_y-1} \widetilde{S}_{2,2\text{ИД},(\text{i,j})}(x,y)$ в частичной области $\Omega_{i,j}$ имеет вид

$$\widetilde{S}_{2,2\text{ИД},(\text{i,j})}(x,y) = \varphi^T(u)\widetilde{F}\varphi(v), \text{ где } u = \frac{x - x_i}{h_{xi+1}}, \ v = \frac{y - y_j}{h_{yj+1}}, \ h_{xi+1} = x_{i+1} - x_i, \ h_{yj+1} = y_{j+1} - y_j,$$

$$\varphi^T(u) = \left[\frac{\varphi_1(u)}{h_{xi+1}} \ \varphi_2(u) \ \varphi_3(u)\right], \ \varphi(v) = \begin{bmatrix} \varphi_1(v)/h_{y\,j+1} \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \end{bmatrix}, \ \widetilde{F} = \begin{pmatrix} I2_{i,j}^{i+1,j+1} & I_{xi(j)}^{i+1} & I_{xi(j+1)}^{i+1} \\ I_{yj(i)}^{j+1} & \tilde{f}_{i,j} & \tilde{f}_{i,j+1} \\ I_{yj(i+j)}^{j+1} & \tilde{f}_{i+1,j} & \tilde{f}_{i+1.j+1} \end{pmatrix},$$

$I_{xi(j)}^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j)dx$, $I_{yj(i)}^{j+1} = \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y)dy$, $\tilde{f}_{i,j}$ — параметры, вычисляемые аналогично соответствующим параметрам одномерного сплайна $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$.

В силу того что размерность пространства $S_{2,2}^{[1,1]}(\Delta_2)$ равна $(n_x + 2) \cdot (n_y + 2)$, значения параметров сплайна $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)$, имеющего непрерывные производные $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial x \partial y}$, определяются единственным образом на основе двумерных интегральных условий согласования (15) (их количество $n_x \cdot n_y$) в совокупности с краевыми условиями (в количестве $2n_x + 2n_y + 4$).

Сплайн $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)$ по построению удовлетворяет интегральному условию согласования (15) в каждой частичной области $\Omega_{i,j}$. Это легко показать, вычислив двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega_{i,j}} \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)dxdy$.

Значения параметров $I_{xi(j)}^{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y)$, $I_{yj(i)}^{j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$, $\tilde{f}_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y)$ следует находить так, чтобы обеспечить непрерывность сплайна $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)$ и производных $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x, y)}{\partial x \partial y}$ на границах частичных областей $\Omega_{i,j}$ (и, следовательно, во всей области Ω). Для этого предлагается следующий алгоритм.

1) Двойные интегралы $I2_{i,j}^{i+1,j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$ вычисляются по известным значениям функции $f_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y)$ в узлах сетки Δ_2 путем применения формул (10), (11) последовательно сначала в направлении оси X, а затем в направлении оси Y по правилу:

а) находятся значения $\bar{I}_{xi(j)}^{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y)$ по формулам, аналогичным (10), (11):

$$\bar{I}_{xi-1(j)}^{i} = \frac{h_{xi}^3}{6H_{xi}^{i+1}} \left(-\frac{1}{h_{xi+1}} f_{i+1,j} + \frac{H_{xi}^{i+1} H_{xi}^{3(i+1)}}{h_{xi}^2 h_{xi+1}} f_{i,j} + \frac{H_{x2i}^{3(i+1)}}{h_{xi}^2} f_{i-1,j} \right),$$

$$\bar{I}_{xi(j)}^{i+1} = \frac{h_{xi+1}^3}{6H_{xi}^{i+1}} \left(\frac{H_{x3i}^{2(i+1)}}{h_{xi+1}^2} f_{i+1,j} + \frac{H_{xi}^{i+1} H_{x3i}^{i+1}}{h_{xi} h_{xi+1}^2} f_{i,j} - \frac{1}{h_{xi}} f_{i-1,j} \right),$$

где $H_{xki}^{p(i+1)} = kh_{xi} + ph_{xi+1}$;

б) вычисляются значения $I2_{i,j}^{i+1,j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1, j = 0, \ldots, n_y - 1)$ по формулам, аналогичным (10), (11), с использованием значений $\bar{I}_{xi(j)}^{i+1}$, найденных в п. *а*):

$$I2_{i,j-1}^{i+1,j} = \frac{h_{yj}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(-\frac{1}{h_{yj+1}} \bar{I}_{xi(j+1)}^{i+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{yj}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2 h_{yj+1}} \bar{I}_{xi(j)}^{i+1} + \frac{H_{y2j}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2} \bar{I}_{xi(j-1)}^{i+1} \right),$$

$$I2_{i,j}^{i+1,j+1} = \frac{h_{yj+1}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(\frac{H_{y3j}^{2(j+1)}}{h_{yj+1}^2} \bar{I}_{xi(j+1)}^{i+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{y3j}^{j+1}}{h_{yj} h_{yj+1}^2} \bar{I}_{xi(j)}^{i+1} - \frac{1}{h_{yj}} \bar{I}_{xi(j-1)}^{i+1} \right),$$

где $H_{ykj}^{p(j+1)} = kh_{yj} + ph_{yj+1}$. (Такой способ нахождения двойных интегралов корректен, поскольку частичные области $\Omega_{i,j}$ являются прямоугольниками и, следовательно,

$I2_{i,j}^{i+1,j+1} \iint\limits_{\Omega_{i,j}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \left[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \right] dy.$) При этом следует учитывать локальные свойства аппроксимируемых функций способом, аналогичным способу, предложенному выше в разделе 3 для одномерных ИД-сплайнов.

Далее параметры $I_{xi(j)}^{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y)$, $I_{yj(i)}^{j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x,$ $j = 0, \ldots, n_y - 1)$, $\tilde{f}_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y)$ вычисляются из соотношений, вытекающих из условий непрерывности производных $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,\text{2ИД}}(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \widetilde{S}_{2,\text{2ИД}}(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}_{2,\text{2ИД}}(x,y)}{\partial x \partial y}$.

2) Величины $I_{xi(j)}^{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y)$ находятся для $\forall i = 0, \ldots, n_x - 1$ из СЛАУ:

$$\frac{1}{h_{yj}} I_{xi(j-1)}^{i+1} + 2\left(\frac{1}{h_{yj}} + \frac{1}{h_{yj+1}}\right) I_{xi(j)}^{i+1} + \frac{1}{h_{yj+1}} I_{xi(j+1)}^{i+1} = 3\left(\frac{I2_{i,j}^{i+1,j+1}}{h_{yj+1}^2} + \frac{I2_{i,j-1}^{i+1,j}}{h_{yj}^2}\right),\ j = 1, \ldots, n_y - 1. \quad (17)$$

В качестве граничных значений $I_{xi(0)}^{i+1}$, $I_{xi(n_y)}^{i+1}$ для решения каждой СЛАУ (17) $(i = 0, \ldots,$ $n_x - 1)$ можно взять величины $\bar{I}_{xi(0)}^{i+1}$, $\bar{I}_{xi(n_y)}^{i+1}$, вычисленные в п. 1a данного алгоритма. Тем самым используются $2 \cdot n_x$ краевых условий.

3) Величины $I_{yj(i)}^{j+1}$ $(j = 0, \ldots, n_y - 1,\ i = 0, \ldots, n_x)$ находятся для $\forall j = 0, \ldots, n_y - 1$ из СЛАУ:

$$\frac{1}{h_{xi}} I_{yj(i-1)}^{j+1} + 2\left(\frac{1}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{xi+1}}\right) I_{yj(i)}^{j+1} + \frac{1}{h_{xi+1}} I_{yj(i+1)}^{j+1} = 3\left(\frac{I2_{i,j}^{i+1,j+1}}{h_{xi+1}^2} + \frac{I2_{i-1,j}^{i,j+1}}{h_{xi}^2}\right),\ i = 1, \ldots, n_x - 1. \quad (18)$$

Граничные значения $I_{yj(0)}^{j+1}$, $I_{yj(n_x)}^{j+1}$ для каждой СЛАУ (18) $(j = 0, \ldots, n_y - 1)$ можно вычислить по формулам, аналогичным (10), (11) (при $i = 0$ и $i = n_x$):

$$I_{yj-1(i)}^{j} = \frac{h_{yj}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(-\frac{1}{h_{yj+1}} f_{i,j+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{yj}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2 h_{yj+1}} f_{i,j} + \frac{H_{y2j}^{3(j+1)}}{h_{yj}^2} f_{i,j-1} \right),$$

$$I_{yj(i)}^{j+1} = \frac{h_{yj+1}^3}{6H_{yj}^{j+1}} \left(\frac{H_{y3j}^{2(j+1)}}{h_{yj+1}^2} f_{i,j+1} + \frac{H_{yj}^{j+1} H_{y3j}^{j+1}}{h_{yj} h_{yj+1}^2} f_{i,j} - \frac{1}{h_{yj}} f_{i,j-1} \right).$$

Тем самым используются $2 \cdot n_y$ краевых условий.

4) По найденным значениям $I_{xi(0)}^{i+1}$, $I_{xi(n_y)}^{i+1}$ $i = 0, \ldots, n_x - 1)$ вычисляются величины $\tilde{f}_{i,0}$ и $\tilde{f}_{i,n_y}$ $(i = 0, \ldots, n_x)$ из следующей СЛАУ при $j = 0, j = n_y$:

$$\frac{1}{h_{xi}} \tilde{f}_{i-1,j} + 2\left(\frac{1}{h_{xi}} + \frac{1}{h_{xi+1}}\right) \tilde{f}_{i,j} + \frac{1}{h_{xi+1}} \tilde{f}_{i+1,j} = 3\left(\frac{I_{xi(j)}^{i+1}}{h_{xi+1}^2} + \frac{I_{xi-1(j)}^{i}}{h_{xi}^2}\right),\ i = 1, \ldots, n_x - 1. \quad (19)$$

Краевые условия для решения систем (19) при $j = 0, j = n_y$ можно задать в виде $\tilde{f}_{0,j} = f_{0,j}$, $\tilde{f}_{n_x,j} = f_{n_x,j}$ (используются четыре краевых условия).

5) По найденным значениям $I_{yj(i)}^{j+1}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$ и $\tilde{f}_{i,0}$, $\tilde{f}_{i,n_y}$ $(i =$ $0, \ldots, n_x)$ вычисляются значения параметров $\tilde{f}_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$ из следующей СЛАУ при $i = 0, \ldots, n_x$:

$$\frac{1}{h_{yj}} \tilde{f}_{i,j-1} + 2\left(\frac{1}{h_{yj}} + \frac{1}{h_{yj+1}}\right) \tilde{f}_{i,j} + \frac{1}{h_{yj+1}} \tilde{f}_{i,j+1} = 3\left(\frac{I_{yj(i)}^{j+1}}{h_{yj+1}^2} + \frac{I_{yj-1(i)}^{j}}{h_{yj}^2}\right),\ j = 1, \ldots, n_y - 1.$$

Для сплайна $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$ доказана следующая теорема сходимости.

Теорема 3. *Пусть функцию двух переменных $f(x,y) \in C^{3,3}_{\Omega}$, определенную в области Ω, заданную с точностью не ниже $O(H_x^4 + H_y^4)$ на сетке Δ_2, аппроксимирует слабо сглаживающий глобальный параболический ИД-сплайн $\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$. Тогда если параметры сплайна $I2^{i+1,j+1}_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$, $I^{i+1}_{xi(j)}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y)$, $I^{j+1}_{yj(i)}$ $(i = 0, \ldots, n_x,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$, $\tilde{f}_{i,j}$ $(i = 0, \ldots, n_x - 1,\ j = 0, \ldots, n_y - 1)$ находятся по алгоритму, приведенному выше, то справедливы оценки:*

$$\left\| D^{p_x,p_y} \left\{ \widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y) - f(x,y) \right\} \right\|_{\Omega} \le \bar{K}_{3,p_x} H_x^{3-p_x} \left\| D^{3,p_y} f(x,y) \right\|_{\Omega} + \bar{K}_{3,p_y} H_y^{3-p_y} \left\| D^{p_x,3} f(x,y) \right\|_{\Omega} +$$

$$+ \bar{K}_{3,p_x} H_x^{3-p_x} \bar{K}_{3,p_y} H_y^{3-p_y} \left\| D^{3,3} f(x,y) \right\|_{\Omega},$$

где $p_x = 0, 1$, $p_y = 0, 1$ — порядки производных по x и y соответственно;

$$D^{p_x,p_y} g(x,y) = \frac{\partial^{p_x+p_y} g(x,y)}{\partial x^{p_x} \partial y^{p_y}}; \quad \bar{K}_{3,p_x} = T_{3,p_x} + K_{p_x} Q_x^{1+p_x}; \quad \bar{K}_{3,p_y} = T_{3,p_y} + K_{p_y} Q_y^{1+p_y};$$

константы $T_{3,p}$ и K_p $(p = p_x, p_y)$ — те же, что и в теореме 2 для сплайна $\widetilde{S}_{2\text{ИД}1}(x)$; $Q_x = \max\limits_{i=1,\ldots,n_x} h_{xi} / \min\limits_{i=1,\ldots,n_x} h_{xi}$; $Q_y = \max\limits_{j=1,\ldots,n_y} h_{yj} / \min\limits_{j=1,\ldots,n_y} h_{yj}$.

Таким образом, при $f(x,y) \in C^{3,3}_{\Omega}$ сплайны и их производные $D^{p_x,p_y}\widetilde{S}_{2,2\text{ИД}}(x,y)$ $(p_x = 0,1, p_y = 0,1)$ с ростом n_x, n_y равномерно сходятся к функции $f(x,y)$ на последовательности сеток $\Delta_2^{(n_x,n_y)} = \Delta_x^{(n_x)} \times \Delta_y^{(n_y)}$ $(\Delta_x^{(n_x)} :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n_x} = b,\ \Delta_y^{(n_y)} :\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n_y} = d)$, по крайней мере, со скоростью $H_x^{3-p_x} + H_y^{3-p_y}$.

5. Одномерные и двумерные интегродифференциальные сплайны и многочлены произвольной четной степени

Аналогично параболическим ИД-многочленам и ИД-сплайнам конструируются одномерные и двумерные интерполяционные ИД-многочлены и ИД-сплайны произвольной четной степени.

Формула ИД-многочлена $S_{2m\text{ИД},i}(x)$ одной переменной степени $2m$, аппроксимирующего функцию $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ и удовлетворяющего интегральному условию согласования (2) и дифференциальным условиям согласования (3) при $p_1 = 0, \ldots, m-1$, имеет вид

$$S_{2m\text{ИД},i}(x) = \frac{1}{h_{i+1}} \varphi_{(-1)}(u) I_i^{i+1} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} h_{i+1}^{\alpha} [\varphi_\alpha(u) f_i^{(\alpha)} + \Psi_\alpha(u) f_{i+1}^{(\alpha)}], \tag{20}$$

где

$$u = \frac{x - x_i}{h_{i+1}}\ (0 \le u \le 1); \quad \Psi_\alpha(u) = (-1)^\alpha \varphi_\alpha(1-u),\ \alpha = 0, \ldots, m-1;$$

$$\varphi_{(-1)}(u) = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}} u^m (1-u)^m \quad \left(C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \right);$$

$$\varphi_\alpha(u) = (1-u)^m \left\{ \sum_{\beta=0}^{m-\alpha-1} \frac{1}{\alpha!} C^{\beta}_{m-1+\beta} u^{\alpha+\beta} - \left[\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k \frac{(-1)^k}{m+k+1}} \sum_{\beta=0}^{m-\alpha-1} \left(\frac{1}{\alpha!} C^{\beta}_{m-1+\beta} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{(-1)^k}{\alpha+\beta+k+1} \right) \right] u^m \right\}$$

$$(\alpha = 0, \ldots, m-1).$$

В частности, при $m = 1$ из общей формулы (20) получается формула параболического ИД-многочлена $S_{2\text{ИД}1,i}(x)$ (5) (или в форме Лагранжа — (16)).

Сплайн $S_{2m\text{ИД}}(x) = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} S_{2m\text{ИД},i}(x)$, составленный из многочленов $S_{2m\text{ИД},i}(x)$ (20) как из звеньев, является интерполяционным, имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяет интегральному условию согласования (2) на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Двумерный ИД-многочлен $S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$ степени $2m$ по x и y в частичной области $\Omega_{i,j}$ имеет вид

$$S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y) = \varphi^{\mathrm{T}}(u) F \varphi(v),$$

где

$$\varphi^{\mathrm{T}}(u) = \left[\frac{\varphi_{(-1)}(u)}{h_{xi+1}} \varphi_0(u)\ \psi_0(u)\ h_{xi+1}\varphi_1(u)\ h_{xi+1}\psi_1(u)\ \ldots\ h_{xi+1}^{m-1}\varphi_{m-1}(u)\ h_{xi+1}^{m-1}\psi_{m-1}(u) \right],$$

$$\varphi^{\mathrm{T}}(v) = \left[\frac{\varphi_{(-1)}(v)}{h_{yj+1}} \varphi_0(v)\ \psi_0(v)\ h_{yj+1}\varphi_1(v)\ h_{yj+1}\psi_1(v)\ \ldots\ h_{yj+1}^{m-1}\varphi_{m-1}(v)\ h_{yj+1}^{m-1}\psi_{m-1}(v) \right],$$

$$F = \begin{pmatrix}
I2_{i,j}^{i+1,j+1} & I_{xi(j)}^{i+1} & I_{xi(j+1)}^{i+1} & dI_{xi(j)}^{i+1} & dI_{xi(j+1)}^{i+1} & \cdots & d^{m-1}I_{xi(j)}^{i+1} & d^{m-1}I_{xi(j+1)}^{i+1} \\
I_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j} & f_{i,j+1} & f_{i,j}^{(0,1)} & f_{i,j+1}^{(0,1)} & \cdots & f_{i,j}^{(0,m-1)} & f_{i,j+1}^{(0,m-1)} \\
I_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1} & f_{i+1,j}^{(0,1)} & f_{i+1,j+1}^{(0,1)} & \cdots & f_{i+1,j}^{(0,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(0,m-1)} \\
dI_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j}^{(1,0)} & f_{i,j+1}^{(1,0)} & f_{i,j}^{(1,1)} & f_{i,j+1}^{(1,1)} & \cdots & f_{i,j}^{(1,m-1)} & f_{i,j+1}^{(1,m-1)} \\
dI_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j}^{(1,0)} & f_{i+1,j+1}^{(1,0)} & f_{i+1,j}^{(1,1)} & f_{i+1,j+1}^{(1,1)} & \cdots & f_{i+1,j}^{(1,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(1,m-1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d^{m-1}I_{yj(i)}^{j+1} & f_{i,j}^{(m-1,0)} & f_{i,j+1}^{(m-1,0)} & f_{i,j}^{(m-1,1)} & f_{i,j+1}^{(m-1,1)} & \cdots & f_{i,j}^{(m-1,m-1)} & f_{i,j+1}^{(m-1,m-1)} \\
d^{m-1}I_{yj(i+1)}^{j+1} & f_{i+1,j}^{(m-1,0)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,0)} & f_{i+1,j}^{(m-1,1)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,1)} & \cdots & f_{i+1,j}^{(m-1,m-1)} & f_{i+1,j+1}^{(m-1,m-1)}
\end{pmatrix},$$

$\varphi_{-1}(t)$, $\varphi_\alpha(t)$, $\psi_\alpha(t)$ $(t = u, v)$, $\alpha = 0, \ldots, m-1$ — те же, что и в формуле (20) одномерного ИД-многочлена $S_{2m\text{ИД},i}(x)$.

Параметры ИД-многочлена $S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$ представляют собой выражения:

$$I2_{i,j}^{i+1,j+1} = \iint\limits_{\Omega_{i,j}} f(x,y)\,dxdy, \quad I_{xi(j)}^{i+1} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j)\,dx, \quad I_{yj(i)}^{j+1} = \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y)\,dy,$$

$$d^\alpha I_{xi(j)}^{i+1} = \left(\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial y^\alpha} dx \right) \Bigg|_{y=y_j}, \quad d^\alpha I_{yj(i)}^{j+1} = \left(\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \frac{\partial^\alpha f(x,y)}{\partial x^\alpha} dy \right) \Bigg|_{x=x_i},$$

$$f_{i,j}^{(\alpha_x,\alpha_y)} = \frac{\partial^{\alpha_x+\alpha_y} f(x,y)}{\partial x^{\alpha_x} \partial y^{\alpha_y}} \bigg|_{x=x_i, y=y_j}.$$

Из ИД-многочленов $S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$ как из звеньев можно составить двумерный ИД-сплайн $S_{2m,2m\text{ИД}}(x,y) = \bigcup_{i=0}^{n_x-1} \bigcup_{j=0}^{n_y-1} S_{2m,2m\text{ИД},(i,j)}(x,y)$, имеющий дефект $m+1$ по x и y. ИД-сплайн $S_{2m,2m\text{ИД}}(x,y)$ по построению является интерполяционным и удовлетворяет двумерному интегральному условию согласования (15) в каждой частичной области $\Omega_{i,j}$.

6. Заключение

Подводя итоги изложенному, отметим, что в статье получены и математически обоснованы интегродифференциальные параболические одномерные и двумерные слабо сглаживающие сплайны и интерполяционные многочлены, а также интегродифференциальные сплайны и многочлены произвольной четной степени. Разработаны и исследованы способы учета локальных особенностей функций при их аппроксимации одномерными и двумерными ИД-сплайнами. Доказаны теоремы сходимости одномерных и двумерных параболических ИД-сплайнов. Сформулировано несколько новых задач восполнения точно и приближенно заданных сеточных функций и предложены методы их решения на основе интегродифференциальных сплайнов.

Список литературы

[1] Яненко Н. Н., Шокин Ю. И. *Численный анализ.* Новосиб. гос. ун-т, 1980.

[2] Квасов Б. И. Алгоритмы и комплекс программ изогеометрической аппроксимации обобщенными сплайнами. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №10, 1995, 219–232.

[3] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. *Методы сплайн-функций.* Наука, М., 1980.

[4] Василенко В. А. *Теория сплайн-функций.* Новосиб. гос. ун-т, 1978.

[5] Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. *Сплайны в вычислительной математике.* Наука, М., 1976.

[6] Корнейчук Н. П. *Сплайны в теории приближения.* Наука, М., 1984.

[7] Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. *Сплайн-аппроксимация функций.* Высшая школа, М., 1983.

[8] Киреев В. И., Формалев В. Ф. *Методы алгебры и теории приближений.* МАИ, М., 1995.

[9] Киреев В. И., Патрикеева Т. К. Интегродифференциальные консервативные сплайны и их применение в интерполяции, численном дифференцировании и интегрировании. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №16, 1995, 233–244.

[10] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* Наука, М., 1989.

Поступила в редакцию 11 июля 1996 г.,
в переработанном виде 23 марта 1998 г.