ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ФИКТИВНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

А. Т. Мухамбетжанов, М. О. Отелбаев, Ш. С. Смагулов
Казахский государственный национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: mexmat@mail.lorton.almaty.kz

A new version of the iterational method is suggested for the solution of non-linear boundary problems with the natural limitation (restriction) on the non-linearity, as well as a new modernization of the fictitious domain method.

Одной из актуальных проблем вычислительной математики является построение сходящегося итерационного метода для нелинейных краевых задач (см., например, [1, 2]). В работе [1] предложены сходящиеся итерационные методы для монотонных операторов, в [2] исследовались итерационные методы для нелинейных краевых задач (схемы типа простой итерации). При этом требуются дифференцируемость оператора и оценки разных типов. Сходимость доказывается отысканием неподвижной точки некоторого вспомогательного оператора. Простота и универсальность характерны и для разностных методов решения краевых задач в регулярных расчетных областях. Важным направлением теории разностных схем представляются исследования разностным методом решений краевых задач в сложных нерегулярных областях. Один из возможных способов решения таких задач — применение нерегулярных сеток (см., например, [3]). Другая возможность связана с применением обычных разностных схем на регулярных сетках со специальной аппроксимацией вблизи границы [4, 5]. Заманчивой является перспектива применения однородных разностных методов на основе метода фиктивных областей. Такой подход позволяет, в частности, существенно повысить степень автоматизации программирования [6]. Обоснованию метода фиктивных областей для нелинейных краевых задач посвящены работы [7, 9]. При численной реализации разностных схем и метода фиктивных областей появляется трудность построения оптимального итерационного метода, в котором скорость сходимости не зависит от малого параметра. Еще бóльшие сложности возникают для нелинейных операторов.

1. О приближенном решении одного класса нелинейных краевых задач

Пусть Ω область R^n. В Ω рассмотрим краевую задачу

$$Lu = F, \quad x \in \Omega,$$

$$B_j u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{1.1}$$

$\partial\tilde{\Omega}$ — часть границы $\partial\Omega$ области Ω. Здесь L — нелинейный дифференциальный оператор, B_j — линейные операторы, $\partial\Omega$ — границы области Ω.

Задачу (1.1) будем изучать в $L_2(\Omega)$. Граничные условия понимаются в смысле $L_2(\partial\tilde{\Omega})$.

Будем предполагать, что

(П1). Найдутся операторы B и A, такие, что преобразование $Mv = BL(Av)$ таково, что M непрерывен и при любом $v \in L_2(\Omega)$ элемент Av удовлетворяет условиям

$$B_j Av|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k,$$

A — интегральный ограниченный оператор, а B — замкнутый и имеет плотную область определения.

Конечно, возникает вопрос, как выбрать операторы A и B. Если хорошо описана область определения оператора L, то такая задача, как правило, легко решается. Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть задача (1.1) имеет вид

$$Lu = -\triangle u + g(x,u) = f \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0,$$

где Ω — квадрат, $\partial\Omega$ — граница Ω. Тогда возьмем в качестве оператора A интегральный оператор

$$Av = \int\limits_{\Omega} G(x,y)v(y)dy,$$

где $G(\,,\,)$ — функция Грина задачи

$$-\triangle u = f, \quad x \in \Omega,$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В качестве оператора B берем единичные преобразования. Тогда (П1) будет выполнен при некоторых ограничениях на $g(x,u)$.

Пример 2. Пусть задача (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u + g(t,x,u) = f(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,1),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где Ω — квадрат.

При выполнении некоторых условий (здесь мы их не обсуждаем) на $g(t,x,u)$ в качестве B можно взять единичное преобразование, а в качестве A — оператор, определенный равенством

$$Av = \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega} G(t,x,y)v(y)dydt,$$

где $G(t,x,y)$ есть выписываемая явно функция Грина для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \triangle u = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

В уравнении (1.1) положим $u = Av$ и подействуем оператором B. Тогда, если $\tilde{f} \in D(B)$, обозначая $B\tilde{f}$ через f, для v получаем уравнения

$$M(v) = f \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \tag{1.1$'$}$$

где $M(\cdot)$ — непрерывное преобразование, $D(\cdot)$ — область определения. Решив (1.1$'$), положив $u = Av$, получим решение (1.1).

Ниже предложим один способ приближенного решения (1.1$'$). Обозначим

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} |M(v) - f|^2 dx.$$

Заметим, что на решении (1.1$'$) функционал J обращается в нуль и $J > 0$, если $M(v) \neq f$. Поэтому будем искать решение (1.1$'$) как элемент, доставляющий минимум J. Предположим, что

(П2).

$$M(v) - M(v_0) = B(v_0)(v - v_0) + R(v_0, v - v_0),$$

где $B(v_0)$ — линейный, а $R(\cdot,\cdot)$ — остаточный операторы, которые удовлетворяют условиям

$$\|B(v_0)\| \le c_1(\|v_0\|),$$

$$\|R(v_0, v - v_0)\| \le c_2(\|v_0\|,\ \|v - v_0\|)\|v - v_0\|^{1+\gamma}.$$

Здесь $\|\cdot\|$ — норма оператора или элемента, $c_1(\cdot)$ и $c_2(\cdot,\cdot)$ (и появляющиеся в дальнейшем $c_3(\cdot)$, $c_4(\cdot)$, …, $c_8(\cdot)$) — непрерывные неубывающие функции своих аргументов из $[0, \infty)$, а число γ из (0,1].

В этом предположении оператор $B(v_0)$ — производная по Гато преобразования $M(v)$ в точке $v{-}v_0$. Он играет важную роль в дальнейшем. На него и на $M(v)$ наложим следующие ограничения.

(П3). Оператор $B(v_0)$ из (П2) имеет ограниченный обратный $B^{-1}(v_0)$ и

$$\|B^{*-1}(v_0)\| \le c_3(\|v_0\|).$$

(П4). Для любого v имеет место оценка

$$\|v\| \le c_4(\|Mv\|).$$

Пусть ε — малое число из (0,1). Для $v = v_0 + \varepsilon\omega$, пользуясь предположением (П2), получим

$$J(v) = J(v_0 + \varepsilon\omega) = \|M(v) - f\|^2 = \|M(v) - M(v_0) + M(v_0) - f\|^2 =$$

$$= \|M(v) - M(v_0)\|^2 + 2\langle M(v) - M(v_0), M(v_0) - f\rangle + J(v_0) =$$

$$= J(v_0) + \|B(v_0)\varepsilon\omega + R(v_0, \varepsilon\omega)\|^2 + 2\langle B(v_0)\varepsilon\omega + R(v_0, \varepsilon\omega), M(v_0) - f\rangle =$$

$$= J(v_0) + 2\varepsilon\langle B(v_0)\omega, M(v_0) - f\rangle + D = J(v_0) + 2\varepsilon\langle \omega, B^*(v_0)(M(v_0) - f)\rangle + D.$$

где $D = \|B(v_0)\varepsilon\omega + R(v_0, \varepsilon\omega)\|^2 + 2\langle R(v_0, \varepsilon\omega), M(v_0) - f\rangle$.

Оценим D с помощью (П2):

$$2|\langle R(v_0,\varepsilon\omega), M(v_0)-f\rangle| \le \|R(v_0,\varepsilon\omega)\|\cdot\|M(v_0)-f\| \le c_2(\|v_2\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{1+\gamma}\sqrt{J_0},$$

$$\|B(v_0)\varepsilon\omega\| \le \|B(v_0)\|\varepsilon\|\omega\| \le \varepsilon c_1(\|v_0\|)\|\omega\|,$$
$$\|R(v_0,\varepsilon\omega)\|^2 \le c_2^2(\|v_0\|,\|v-v_0\|)\|\varepsilon\omega\|^{2(1+\gamma)} = c_2^2(\|v_0\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{2(1+\gamma)}\|\omega\|^{2(1+\gamma)}.$$

Объединяя полученные оценки, для $|D|$ получим

$$|D| \le c_2^2(\|v_0\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{1+\gamma}\|\omega\|^{1+\gamma}\sqrt{J(v_0)} + \varepsilon^2 c_1^2(\|v_0\|)\|\omega\|^2+$$
$$+c_2^2(\|v_0\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{2(1+y)}\cdot\|\omega\|^{2(1+y)}, \tag{1.2}$$

Выберем

$$\omega = -B^*(v_0)(M(v_0)-f). \tag{1.3}$$

Тогда соотношения (1.2) и (1.3) дают

$$J(v) \le J(v_0) - 2\varepsilon\|\omega\|^2 + |D|. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (П3) вытекает

$$\sqrt{J(v_0)} = \|M(v_0)-f\| = \|B^{*-1}(v_0)B^*(v_0)(M(v_0)-f)\| \le c_3(\|v_0\|)\|\omega\|.$$

Это неравенство, (П2) и (1.3) влекут оценку

$$c_3^{-1}(\|v_0\|)\sqrt{J(v_0)} \le \|\omega\| \le c_1(\|v_0\|)\sqrt{J(v_0)}. \tag{1.5}$$

Оказывается,

$$\sqrt{\|M(v_0)\|} \le \sqrt{J(v_0)} + \|f\|.$$

В самом деле,

$$\|M(v_0)\| \le \sqrt{\int\limits_\Omega \|M(v_0)\|^2 dx} \le \sqrt{\int\limits_\Omega \|M(v_0)-f+f\|^2 dx} \le$$

$$\le \sqrt{\int\limits_\Omega \|M(v_0)-f\|^2 dx} + \sqrt{\int\limits_\Omega \|f\|^2 dx} = \sqrt{J(v_0)} + \|f\|. \tag{1.5$'$}$$

Из (П4) и (1.5′) имеем

$$\|v_0\| \le c_5(\sqrt{J(v_0)} + \|f\|).$$

Отсюда и из (1.5) получаем

$$c_6^{-1}\left(\sqrt{J(v_0)} + \|f\|\right)\sqrt{J(v_0)} \le \|\omega\| \le c_6\left(\sqrt{J(v_0)} + \|f\|\right)\sqrt{J(v_0)}, \tag{1.6}$$

(напомним, что $c_5(\cdot)$, $c_6(\cdot)$ — непрерывные неубывающие на $[0,\infty)$ функции).

Используя (1.6), $|D|$ оцениваем следующим образом:

$$|D| \le c_2^2(\|v_0\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{1+\gamma}c_6^{1+\gamma}\left(\sqrt{J(v_0)} + \|f\|\right)\sqrt{J(v_0)}\left(\sqrt{J(v_0)}\right)^\gamma +$$

$$+\varepsilon^2 c_1^2(\|v_0\|)J(v_0)c_6^2\left(\sqrt{J(v_0)}+\|f\|\right)+c_2^2(\|v_0\|,\|\varepsilon\omega\|)\varepsilon^{2(1+\gamma)}(J(v_0))^{1+\gamma},$$

$$c_6\left(\sqrt{J(v_0)}+\|f\|\right)\le J(v_0)\left(c_7(\sqrt{J(v_0)}+\|f\|\right)\varepsilon^{1+\gamma}.$$

Эти неравенства и (1.4), (1.6) дают

$$J(v)\le J(v_0)\left[1-2\varepsilon c_6^{-2}\left(\sqrt{J(v_0)}+\|f\|\right)+c_7\left(\sqrt{J(v_0)}+\|f\|\right)\varepsilon^{1+\gamma}\right]. \tag{1.7}$$

Справедлива

Теорема 1.1. *Пусть выполнены (П2), (П3) и (П4). Определим последовательность* $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ *рекуррентными формулами*

$$u_{n+1}=u_n+\varepsilon\omega_n,\quad \omega_n=-B^*(u_n)(M(u_n)-f),\quad n=0,1,2,\ldots(u_0\ n).$$

Тогда существуют постоянные $\varepsilon>0$ *и* $\delta\in(0,1)$*, зависящие только от* u_0*, такие, что* u_n *при* $n\to\infty$ *стремятся к решению уравнения* $M(u)=f$*. Причем*

$$J_n=\|M(u_n)-f\|^2\le J(u_0)\delta^{2n},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

$$\|u_n-u\|\le c_8\delta^n,\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где постоянная c_8 *зависит от* u_0 *и* f*.*

Доказательство. Заметим, что выражение в квадратных скобках из (1.7) достигает минимума в точке

$$\varepsilon=[2^{-1}(1+\gamma)c_6^{-2}c_7]^{-1/\gamma}, \tag{1.8}$$

где c_7, c_6 — постоянные из уравнения (1.7), в котором берем $v_0=u_0$. Вычислим

$$u_1=u_0+\varepsilon\omega_0,\quad \omega_0=-B^*(u_0)(M(u_0)-f).$$

Из (1.7) вытекает неравенство

$$J(u_1)\le J(u_0)\delta^2, \tag{1.9}$$

где $\delta^2=1-2\varepsilon c_6^{-1}(\cdot)+c_7(\cdot)J\varepsilon^{1+\gamma}$.

Заметим, что δ в силу (1.8) строго меньше единицы при достаточно малом ε. Вычислим теперь

$$u_2=u_1+\varepsilon\omega_1,\quad \omega_1=-B^*(u_1)(M(u_1)-f).$$

Так как $c_6(\cdot)$ и $c_7(\cdot)$ монотонно не убывают, в силу (1.9) имеем

$$\delta_1^2=1-2\varepsilon c_6^{-2}(\cdot)+c_7(\cdot)\varepsilon^{1+\gamma}\le\delta^2.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$J(u_{n+1})\le J(u_n)\delta^2,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Поэтому

$$\|M(u_n)-f\|^2=J(u_n)\le J(u_{n-1})\le J(u_0)\delta^{2n}. \tag{1.10}$$

Оценим u_n-u_0:

$$u_n=u_{n-1}+\varepsilon\omega_n=u_{n-2}+\varepsilon(\omega_{n-1}+\omega_n)=u_0+\varepsilon\sum_{j=0}^{n}\omega_j.$$

Поэтому при $m > n$

$$\|u_m - u_n\| = \varepsilon \sum_{j=n+1}^{m} \omega_j.$$

Так как в (1.6) $c_6(\cdot)$ не убывает, неравенство вместе с (1.10) и (1.6) дает

$$\|u_m - u_n\| \leq \varepsilon c_6 \left(\sqrt{J(u_0)} + \|f\|\right) \sum_{j=n+1}^{m} \sqrt{J(u_j)} \leq \varepsilon c_6 \left(\sqrt{J(u_0)} + \|f\|\right),$$

$$\sqrt{J(u_0)} \sum_{j=1}^{n+1} \delta^{\gamma} \leq \varepsilon c_6 \left(\sqrt{J(u_0)} + \|f\|\right) \delta^{n+1} \frac{1}{1-\delta}.$$

Это неравенство и (1.10) доказывают теорему.

Замечание 1.1. Из доказательства теоремы вытекает, что в рекуррентных формулах для $\{u_n\}$ постоянное ε определяется равенством $\varepsilon = \varepsilon_0$, а число $\delta = \delta_0$ из равенства (1.9). Нетрудно заметить, что для справедливости теоремы годится любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Поэтому, чтобы не вычислять $c_6(\cdot)$ и $c_7(\cdot)$, счет по рекуррентным формулам теоремы 1.1 начинаем с любым достаточно малым $\varepsilon = \varepsilon_1$. После каждого шага проверяем неравенство $J(u_{n+1}) < J(u_n)$. Если это неравенство выполнено, то продолжаем вычисления с этим же ε. Если же данное неравенство нарушено, то перевычисляем последний шаг, уменьшив ε в два раза. Очевидно, что если выполняются условия теоремы, то начиная с некоторого момента менять число ε не придется. Отметим, что такая “модернизация"рекуррентной формулы теоремы 1.1 позволяет построить последовательность $\{u_n\}$, для которой $J(u_n) \to 0$, при существенно менее жестких условиях, чем (П2), (П3) и (П4).

Для сходимости традиционных итерационных методов, для решения нелинейных уравнений обычно предполагается единственность решения. Построенный итерационный метод можно применить и в случае, когда в уравнении существует много решений.

2. Линейная задача в области (метод фиктивных областей)

В этом разделе построим приближенный метод решения линейной краевой задачи в области.

Пусть L — линейный дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, определенный на функциях (вектор-функциях), заданных на области $\Omega \subset R^m$. В $\Omega \subset R^m$ рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f, \quad B_j u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.1}$$

где $\partial\tilde{\Omega}$ — часть границы $\partial\Omega$ области Ω, B_j — дифференциальные операторы. Коэффициенты оператора L гладко продолжим на некоторую область Q, содержащую Ω, так, чтобы они вместе со своими производными любого порядка были ограниченными функциями на Q. Будем предполагать, что задача (2.1) однозначно разрешима в пространстве $L_2(\Omega)$ и ее решение допускает продолжение на область Q, причем имеет представление

$$u(x) = Ag = \int_Q A(x,y) g(y) dy, \quad g(y) \in L_2(Q). \tag{2.2}$$

Как правило, за ядро $A(x,y)$ можно взять функцию Грина краевой задачи для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Относительно A предполагаем, что A^{-1} существует (неограниченный) и замкнут, а операторы B_jA $(j=1,2,\,\ldots,\,k)$ также интегральные, LA в $L_2(Q)$ ограничен. Задачу (2.1) в силу (2.2) можно переписать в виде

$$Mg \equiv LAg = f, \quad x \in Q,$$

$$B_jAg|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1,2,\,\ldots,\,k. \tag{2.1$'$}$$

Так как ядро A явно пишется, то ядра $B_j(x,y)$ операторов B_jA также пишутся явно. Введем функционал

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \chi|Mu-f|^2dx + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} |(B_jA)u|^2dS, \tag{2.3}$$

где χ — характеристическая функция Ω, $dS(x)$ — элемент $\partial\tilde{\Omega}$, а $M = LA$. Преобразуем второй член в (2.3):

$$\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} |B_jA(u)|^2dS(x) = \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} |\int\limits_{Q} B_j(x,\eta)u(\eta)d\eta|^2dS(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} \left[\int\limits_{Q} B_j(x,y)u(y)dy \int\limits_{Q} B_j(x,\eta)u(\eta)d\eta\right] dS(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{Q}\int\limits_{Q} \left[\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} B_j(x,y)B_j(x,\eta)dS(x)\right] u(y)u(\eta)d\eta dy = \langle Nu,u\rangle,$$

где $\langle,\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$, а N — интегральный оператор с ядром

$$N(y,\eta) = \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\partial\tilde{\Omega}} B_j(x,y)B(x,\eta)dx. \tag{2.4}$$

Сложность вычисления ядра $N(\cdot,\cdot)$ зависит от степени сложности $\partial\tilde{\Omega}$. Используя вышеприведенные выкладки, из (2.3) получаем

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} \chi|Mu-f|^2dx + \langle Nu,u\rangle = \|\chi(Mu-f)\|^2dx + \langle Nu,u\rangle. \tag{2.3$'$}$$

Отметим, что оператор N с ядром (2.4) будет неотрицательным и самосопряженным. Если $J(u)$, то в силу (2.3) нетрудно видеть, что u есть решение задачи (2.1$'$), и наоборот. Поэтому для решения мы будем минимизировать функционал $J(\cdot)$.

Пусть u и ω элементы $L_2(Q)$. Имеем

$$J(u+\omega) = J(u) + 2\langle\chi(Mu-f),M\omega\rangle + 2\langle Nu,\omega\rangle + \|\chi M\omega\|^2 + \langle N\omega,\omega\rangle.$$

Здесь мы воспользовались тем, что гильбертово пространство действительно. Пусть $\varepsilon > 0$, а

$$\omega = -\varepsilon[M^*\chi(Mu - f) + Nu] = -\varepsilon\tilde{\omega}. \tag{2.5}$$

Тогда

$$J(u - \varepsilon\tilde{\omega}) = J(u) - 2\varepsilon\|\tilde{\omega}\|^2 + \varepsilon^2\left[\|\chi M\tilde{\omega}\|^2 + \|N\tilde{\omega}\|^2\right] \leq J(u) - 2\varepsilon\|\tilde{\omega}\|^2 + \varepsilon^2 c^2\|\tilde{\omega}\|^2,$$

где $c^2 = \|M\|^2 + \|\sqrt{N}\|^2$.

Выбрав ε из равенства $\varepsilon = c^{-2} = (\|M\|^2 + \|\sqrt{N}\|^2)^{-1}$, приходим к равенству

$$J(u - \varepsilon\tilde{\omega}) \leq J(u) - c^{-2}\|\tilde{\omega}\|^2. \tag{2.6}$$

Используя выбор (2.5) и соотношения (2.6), составим функционал (2.3), минимизирующий последовательность

$$u_{n+1} = u_n - \varepsilon\omega_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\omega_n = M^*\chi(Mu_n - f) + Nu_n, \tag{2.7}$$

где ε — произвольное положительное число, удовлетворяющее соотношению $0 < \varepsilon \leq \left(\|M\|^2 + \|\sqrt{N}\|^2\right)^{-1}$.

Мы должны доказать, что последовательность u_n, вычисленная по рекуррентным формулам (2.6), минимизирует $J(\cdot)$ и, кроме того, сходится в некоторой метрике. Для этого перечислим условия, которые будем налагать на задачу (2.1$'$):

(П2.1). Операторы M и N ограничены в $L_2(Q)$, а операторы A^{-1}, $A^{-\alpha}(\alpha > 0)$ существуют (вообще говоря, неограниченные).

(П2.2). Для любого $f \in L_2(\Omega)$ задача (2.1) имеет единственное решение в $L_2(\Omega)$, причем существует его продолжение $\tilde{u}$ на Q, допускающее представление $\tilde{u} = Av$, $v \in L_2(Q)$. Для v справедлива оценка

$$\|v\| - L_2(Q) \leq c\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где c не зависит от $f \in L_2(\Omega)$.

(П2.3). Существует $1 > \theta > 0$, такое что, если

$$\|Lu\|_{L_2(\Omega)} \leq b_0, \quad \sum_{j=0}^{k}\int\limits_{\partial\Omega}(B_j u)^2 dS < b_1,$$

то u допускает продолжение $\tilde{u}$ из Ω на Q, удовлетворяющее оценке $\|A^{-\theta}u\|^2 \leq c(b_0 + b_1)$, в которой не зависит b_0, b_1 и от u.

Для u_m из (2.7) имеем

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\varepsilon\langle u_n, \omega_n\rangle + \varepsilon^2\|\omega_n\|^2 = -2\varepsilon\langle u_n, M^*\chi(Mu_n - f)\rangle - 2\varepsilon\langle u_n, Nu_n\rangle +$$
$$+\varepsilon^2\|\omega_n\|^2 + \|u_n\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\varepsilon\langle Mu_n, \chi(Mu_n - f)\rangle + \langle u_n, Nu_n\rangle +$$
$$+\varepsilon^2\|\omega_n\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\varepsilon\langle f, \chi(Mu_n - f)\rangle + \varepsilon^2\|\omega_n\|^2 - 2\varepsilon J(u_n).$$

Отсюда

$$\|u_{n+1}\|^2 + 2\varepsilon J(u_n) = \|u_n\|^2 - 2\varepsilon\langle f, \chi(Mu_n - f)\rangle + \varepsilon^2\|\omega_n\|^2. \tag{2.8}$$

Имеет место

Лемма 2.1. *Существует постоянная $c > 0$, не зависящая от n, такая, что*

$$\|\chi(Mu_n - f)\| \leq c\|\omega_n\|^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(нормы берутся в $L_2(Q)$).

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$Mv = Mu_n - f, \quad x \in \Omega,$$

$$B_j A\nu|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{2.9}$$

Обозначая $Av = u$, получаем

$$Lu = Mu_n - f, \quad x \in \Omega,$$

$$B_j u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0.$$

Согласно предположению (П2.2), эта задача имеет единственное решение u, для которого существует продолжение $\tilde{u}$ на Q, представимое в виде $\tilde{u} = Av$, причем $\|v\| \leq c\|Mu_n - f\|$. Очевидно, v есть решение (2.9). Умножим ω_n на v скалярно, тогда непосредственно вычислениями, используя (2.9), получаем

$$\langle Nu_n, v\rangle = 0, \quad \langle\omega_n, v\rangle = \langle\chi(Mu_n - f), Mv\rangle + \langle Nu_n, v\rangle = \|\chi(Mu_n - f)\|^2.$$

Отсюда и из оценки

$$\|v\| \leq c\|\chi(Mu_n - f)\|$$

в силу неравенства Коши вытекает

$$\|\chi(Mu_n - f)\| \leq c\|\omega_n\|.$$

Лемма доказана.

Из (2.8) и леммы (2.1) получаем

$$\|u_{n+1}\|^2 + 2\varepsilon J(u_n) \leq \|u_n\|^2 + c_1\varepsilon\|\omega_n\| + \varepsilon^2\|\omega_n\|^2. \tag{2.10}$$

Просуммируем эти неравенства:

$$\|u_{n+1}\|^2 + 2\varepsilon\sum_{k=0}^{n} J(u_n) \leq c_1\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\|\omega_n\| + \varepsilon^2\sum_{k=0}^{n}\|\omega_n\|^2.$$

Из (2.6) следует, что

$$J(u_{n+1}) \leq J(u_n) - c^{-2}\|\omega_n\|^2,$$

поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\omega_n\|^2 < c_0 < \infty.$$

Следовательно,

$$\|u_{n+1}\|^2 + 2\varepsilon\sum_{k=0}^{n} J(u_n) \leq c_1\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\|\omega_k\| + c_0\varepsilon^2 \leq c_1\varepsilon\sqrt{n} + \varepsilon^2 c_0.$$

В силу монотонного невозрастания $J(u_n)$ при возрастании u_n, это неравенство дает

$$J(u_n) \leq c_2 \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2.11}$$

На основании полученных результатов докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположения (П2.1), (П2.2) и (П2.3). Построим последовательность* $\{u_n\}$ *по рекуррентным формулам (2.7). Тогда последовательность*

$$v_n = Au_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

сходится к решению задачи (2.1), причем

$$\|\chi(Lv_n - f)\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial\Omega} |B_j v_n|^2 dS \leq c \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \tag{2.12}$$

$$\|A^{-\theta}(v_n - v))\|^2_{L_2(Q)} \leq c \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \tag{2.13}$$

где не зависит от f *и* n.

Доказательство. Достаточно доказать второе неравенство теоремы. Первое неравенство сразу вытекает из (2.11) и определения $J(\cdot)$. Для v_n в силу уже доказанного неравенства (2.12) теоремы имеем

$$Lv_n = f_n, \quad B_j v_n|_{\partial\tilde{\Omega}} = g_{jn}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \; j = 1, \ldots, k,$$

где f_n и g_{jn} удовлетворяют неравенству

$$\|\chi(f_n - f)\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial\Omega} |g_{jn} v_n|^2 dS = \|\chi(f_n - f)\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial\Omega} |B_j v_n|^2 dS \leq c \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Отсюда из предположения (П2.3) и (П2.2) легко вытекает фундаментальность последовательности $A^{-\theta} v_n$ и ее сходимость к $A^{-\theta} v$. Теперь снова, используя последнее неравенство (П2.3), получаем второе неравенство теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Если в (П2.3) число θ равно 1, то оператор N с ядром (2.4) не может быть интегральным; ядро $N(y, \eta)$ должно будет иметь δ-образную особенность на $\partial\tilde{\Omega}$. Тем не менее, дифференцируя граничные условия в (2.1) по касательным переменным, многие (классические) краевые задачи можно эквивалентным образом записать так, чтобы (П2.3) выполнялось при $\theta = 1$. При $\theta = 1$ вместо неравенства леммы 2.1 легко получить неравенство

$$\sqrt{J(u_n)} \leq c\|\omega_n\|.$$

В самом деле, рассмотрим задачу

$$Mv = Mu_n - f, \quad x \in \Omega,$$

$$B_j Av|_{\partial\tilde{\Omega}} = Nu_n|_{\partial\tilde{\Omega}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Обозначив $Av = u$, получаем

$$Lu = Mu_n - f,$$

$$B_j u|_{\partial\tilde{\Omega}} = Nu_n|_{\partial\tilde{\Omega}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

согласно предположениям (П2.2), (П2.3) u продолжаемо в Q, и это продолжение допускает представление

$$u = Av; \quad \|v\|_{L_2(Q)} \leq c \left(\|Mu_n - f\|_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial\Omega} (Nu_n)^2 dS \right)^{1/2} \right). \tag{2.14}$$

Умножив ω_n на v, скалярно имеем

$$\langle \omega_n, v \rangle = \langle \chi(Mu_n - f), Mv \rangle + \langle Nu_n, v \rangle =$$

$$= \|\chi(Mu_n - f)\|^2 + \langle u_n, Nv \rangle = \|\chi(Mu_n - f)\|^2 + \langle u_n, Nu_n \rangle.$$

Отсюда

$$\|\omega_n\| \|v\| \geq J(u_n).$$

Следовательно, в силу (2.14)

$$\sqrt{J(u_n)} \leq c\|\omega_n\|.$$

Но тогда из (2.6) имеем

$$J(u_{n+1}) \leq J(u_n)(1 - \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 > 0$$

и, суммируя по n, получаем

$$J(u_n) \leq J(u_0)(1 - \varepsilon_1)^n = J(u_0)e^{-\delta n}.$$

Это неравенство приводит к результату теоремы 1, в котором вместо (2.12) и (2.13) нужно воспользоваться неравенством

$$\|\chi(Lv_n - f)\|^2 + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial\Omega} \|B_j v_n\|^2 dS \leq ce^{-\delta n},$$

$$\|A^{-1}(v_n - v)\|^2_{L_2(Q)} \leq ce^{-\delta n}.$$

Для эллиптических задач (2.13) означает, что решение сходится в классе Соболева $W_2^l(\Omega)$, где l — порядок уравнения со скоростью геометрической прогрессии.

Замечание 2.2. При расчете по рекуррентным формулам не обязательно знать $\|M\|^2 + \|\sqrt{N}\|^2$. Можно пользоваться рекомендацией из замечания 1.1.

Замечание 2.3. Вычисление $N(y, \eta)$ по формуле (2.4) — не простая задача, хотя формула и явная. Поэтому при приближенном решении можно пользоваться другим ядром.

В зависимости от необходимой точности можно взять число $\delta > 0$ и положить

$$N(y, \eta) = \frac{1}{\delta^{n-1}} \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{Q} \chi_\delta(x) B_j(x, \eta) B_j(x, \eta) dx.$$

Здесь $\chi_\delta(x)$ — характеристическая функция δ-окрестности множества $\partial\Omega$.

Замечание 2.4. Если решать задачу (2.1), следуя результату теоремы 2.1, то за A можно взять резольвенту дифференциального оператора L_0 с постоянными коэффициентами.

В случае, когда Q — куб, $Q \supset \Omega$, собственными функциями оператора L_0 с периодическими краевыми условиями является тригонометрическая система $\{\varphi_l(x)\}$. В качестве A можно взять любой интегральный оператор с ядром

$$A(x,y) = \sum_{\{l\}} a_l \lambda_l^{-1} \varphi_l(x) \varphi_l(y),$$

где λ_l — собственное число в операторе L_0, соответствующее $\varphi_i(x)$, числа a_j удовлетворяют неравенству $c^{-1} < |a_j| < c$, где $c > \theta$ — любая фиксированная постоянная. Так как λ_l трудно вычислимы, а $\varphi_l(x)$ известны, это замечание поможет эффективно выбрать A.

Кроме того, если в качестве Q рассматривать все R^n, то за действие A на u можно взять свертку фундаментального решения, соответствующего оператору L_0, с элементом u. Для широкого класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами фундаментальные решения вычислены.

Замечание 2.5. Рекуррентные формулы (2.7) можно заменить на следующие:

$$\begin{gathered} u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n \omega_n, \\ \omega_n = M^* \chi(Mu_n - f) + Nu_n, \\ \varepsilon_n = \|\omega_n\|^2 \left[\|M\omega_n\|^2 + \langle N\omega_n, \omega_n \rangle \right]^{-1}. \end{gathered}$$

При этом сходимость $J(u_n)$ к нулю ускорится, так как ε_n выбрано из условия достижения минимума по ε величины $J(u_n - \varepsilon\omega_n)$. Действительно,

$$J(u_n - \varepsilon\omega_n) = J(u_n) - 2\varepsilon\|\omega_n\|^2 + \varepsilon^2 \left[\|M\omega_n\|^2 + \langle N\omega_n, \omega_n \rangle \right].$$

Здесь минимум правой части достигается при $\varepsilon = \varepsilon_n$.

3. О приближенном решений нелинейных краевых задач

В данном разделе мы построим один класс нелинейных краевых задач. Результаты будут новыми и для линейных задач, рассмотренных выше.

В пространстве $L_2(\Omega)$ (Ω — ограниченная область в R^n) рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} Lu = f \text{ в } \Omega, \\ B_j u|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\partial\tilde{\Omega}$ — часть границы $\partial\Omega$ области Ω, L — необязательно линейный, а B_j ($j = 1, 2, 3, \ldots, n$) линейные дифференциальные операторы. Если в этом есть необходимость, пользуясь продолжениями из Ω на R^n, будем считать, что операторы $L(\cdot)$ и $B_j(\cdot)$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$) определены для всех u из $C_0^\infty(R^n)$.

Пусть Q — область, содержащая Ω. Предположим, что:

(П3.1). Задача (3.1) для любого $f \in L_2(\Omega)$ однозначно разрешима. Существуют область Q, содержащая Ω, и ограниченный интегральный оператор A, такие, что решение u задачи допускает продолжение из Ω на Q, представимое в виде

$$\tilde{u} = Av, \quad v \in L_2(Q),$$

причем
$$\|v\|_{L_2(Q)} \leq c_0(\|L(u)\|) + c_1\|u\|).$$

(П3.2). Операторы B_jA $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — ограниченные интегральные операторы в $L_2(Q)$, а преобразование $L(Av)$ непрерывно.

Пусть $g_1, g_2 \ldots, g_n$ — функции, ограниченные на $\partial\Omega$. Допустим, S — линейный оператор продолжения, сопоставляющий $g_1, g_2 \ldots, g_n$ — функцию u из $L_2(Q)$, такую, что в смысле обобщенных функций на $\partial\Omega$ выполнены равенства

$$B_ju|_{\partial\tilde{\Omega}} = g_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Для функции $\tilde{u} = Av$ определим

$$g_j = B_j\tilde{u}|_{\partial\tilde{\Omega}} = B_jAv|_{\partial\tilde{\Omega}}.$$

Продолжив эти g_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ оператором S, получим

$$u = S(g_2 \ldots, g_n) = \tilde{S}\tilde{u} = \tilde{S}A \cdot v. \tag{3.2}$$

Для разности
$$Gv = Av - \tilde{S}Av \tag{3.3}$$

в смысле обобщенных функций имеем

$$B_jGv|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Будем еще предполагать, что выполнено условие (П.3) решения u задачи (3.1) представимы в виде
$$u = Gv,$$

при этом
$$\|v\|_{L_2(Q)} \leq C\|f\|_{L_2(Q)}.$$

Если выполнены предположения (П3.1), (П3.2) и (П3.3), то в п. 1 в качестве B можно взять единичный оператор, а в качестве A — оператор G из равенства (3.2). Тогда при некоторых условиях на G мы сможем воспользоваться результатами п. 1. Оператор продолжения эффективно построить удается не всегда. Этот вопрос следует рассматривать отдельно в каждом конкретном случае.

4. О приближенном решении нелинейных эллиптических краевых задач

Если оператор A удается выбрать удачно, то итерационная схема, составленная по алгоритму из п. 1, будет сходиться со скоростью геометрической прогрессии. Сложность выбора оператора A вызвана тем, что он связан граничными условиями. Построение оператора продолжения из п. 3 является сложной технической задачей. Ниже мы предлагаем “грубый метод", который, на наш взгляд, более удобен в реализации.

Рассмотрим в области $\Omega \in R^n$ краевую задачу

$$L_0u + B(u) = f,$$

$$Nu|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.1}$$

Здесь L_0 — строго эллиптический оператор второго порядка, $B(\cdot)$ — нелинейный оператор, N — линейный дифференциальный граничный оператор, не выше первого порядка.

(П4.1). Предположим, что при любом $f \in L_2(\Omega)$ задача (4.1) имеет единственное решение u, которое продолжается на все R^n, так, что $u \in W_2^2(R^n)$ и кроме того, если $f \in C(\Omega)$, то $\operatorname{grad} u \in C(\Omega)$.

Линейные операторы L_0 и N (являющиеся, вообще говоря, операторами с переменными коэффициентами) также будем считать определенными на всех функциях из $C_0^\infty(R^n)$. Будем предполагать, что $B(u) = F(u, x)$, где $F(\cdot, \cdot)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов $u \in (-\infty, \infty)$, $x \in R^n$.

Нас интересует приближенное решение (4.1) при $f \in C(\Omega)$. Согласно (П4.1), решение задачи (4.1) ограничено. Ограничены также его первые производные. Поэтому решение (4.1) совпадает с решением следующей задачи:

$$Lu + \gamma(\|u\|)B(u) = f,$$

$$Nu|_{d\Omega} = 0. \tag{4.1$'$}$$

Здесь $\gamma(x)$ — дважды гладкая функция, такая, что

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in [0, t_0], \\ 0 & \text{при} \quad t \geq t_1, \end{cases} \tag{4.2}$$

где t_0 и t_1 зависят от f_0 и $0 < t_0 < t_1$. Возьмем область Q, строго содержащую Ω. Тогда в силу (4.1) решение можно представить в виде $u = Av$, где A — самосопряженный интегральный оператор, действующий из $L_2(Q)$ в $W_2^2(Q)$:

$$u = Av = \int_Q A(x, y)v(y)dy, \tag{4.3}$$

где $x \in \Omega \subset Q$.

За ядро $A(x, y)$ оператора A из (4.3) можно взять, например, функцию Грина для $-\triangle$+E с периодическими краевыми условиями в кубе Q, содержащем Ω. За $A(x, y)$ можно также взять функцию Грина задачи Дирихле (или Неймана) для $-\triangle$+E.

Еще один вариант выбора $A(x, y)$ следующий. Пусть $G(x - y)$ функция Грина оператора $-\triangle$+E на всем R^n. Эта функция может быть выписана явно (ядро Бесселя—Макдонольда). Положим $A(x, y) = \chi_Q(x)G(x - y)\chi_Q(y)$, где $\chi_Q(\cdot)$ — характеристическая функция области Q, а Q — произвольная область, содержащая Ω (в частности, Q может совпадать со всем R^n). Подставим $u = Av$ в уравнение (4.1) и получим

$$M(v) = L_0Av + \tilde{B}(Av) = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$NAv|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.4}$$

Здесь $\tilde{B}(\cdot) = \gamma[\cdot]B(\cdot)$. Введем функционал

$$J = \|\chi(L_0Av + \tilde{B}(Av) - f\|^2 + \int_{\partial\Omega} \|NAv\|^2 dS,$$

где dS — элемент поверхности $\partial\Omega$. Оператор NA будет интегральным, с ядром $N(x,y)$. Поэтому, как и в п. 2, J можно записать в виде

$$J(v) = \int\limits_Q [L_0(Av) - f]^2 \chi dx + \langle \tilde{N}v, v\rangle =$$

$$= \|\chi(L_0 Av + \tilde{B}(Av) - f\|^2 + \langle \tilde{N}v, v\rangle, \tag{4.5}$$

где χ — характеристическая функция Ω, $\tilde{N}$ — самосопряженный интегральный оператор с ядром

$$\tilde{N}(\eta, y) = \int\limits_{\partial\Omega} \tilde{N}(x,\eta)\tilde{N}(x,y)dS(x).$$

Если v — решение задачи (4.4), то J обращается в нуль, и наоборот, если $J(v) = 0$, то v есть по крайней мере или слабое, или обобщенное решение задачи (4.4). Следовательно, приближенное решение (4.4) можно искать как последовательность, реализующую минимум J.

Для минимизации $J(v)$ нужны некоторые предположения.

(П4.2). Существует $\theta \in [0,1]$, такое, что, если $J(v_1)$, $J(v_2) < c < \infty$, то $\chi A v_1$, $\chi A v_2$ имеют продолжения u_1 и u_2 из Ω на Q, для которых

$$\|A^{-\theta}(u_1 - u_2)\|_Q^2 \le c_1 \left[\int\limits_{\partial\Omega} \|Nv_1 - Nv_2\|^2 dS(x) + \|M(v_1) - m(v_2)\|_\Omega^2 \right],$$

где c_1 не зависит от v_1 и v_2. Это предположение для корректных эллиптических задач, как правило, выполняется, при этом $\theta < 1$.

Норма левой части тем сильнее, чем больше θ. Увеличению θ мешает в основном граничное условие.

(П4.3). Если $J(v) < \infty$, то $\|v\| \le c(J(v)) < \infty$, а задача

$$L_0 u + \dot{\tilde{B}}(Av)u = R \in L_2(\Omega),$$

$$Nu|_{\partial\Omega} = 0$$

однозначно разрешима. Причем решение u допускает продолжение $\tilde{u}$ из Ω на Q, удовлетворяющее оценке

$$\|A^{-1}\tilde{u}\|_Q| \le c\|R\|_{L_2(\Omega)},$$

где c не зависит от R, но может зависеть от $J(v)$.

Сначала рассмотрим “дифференциальный"вариант приближенного решения задачи (4.1). Допустим, что v в выражении для J зависит от параметра ξ. Продифференцируем J по ξ:

$$J_\xi = 2\langle \chi\,(M(v) - f)\,, \quad \dot{M}(v)v_\xi\rangle + 2\langle \tilde{N}v, v_\xi\rangle =$$
$$= 2\langle \dot{M}^*(v)\,(\chi\,(M(v) - f)) + \tilde{N}v, v_\xi\rangle.$$

Здесь

$$M(v) = L_0 Av + \tilde{B}(Av), \quad \dot{M}(v) = \dot{\tilde{B}}(Av)A + L_0 A.$$

Выберем v_ξ из уравнения

$$v_\xi = -[\dot{M}^*(v)\left(\chi\left(M(v)-f\right)\right) + \tilde{N}v], \quad v|_{\xi=0} = v_0. \tag{4.6}$$

Нетрудно доказать, что эта задача Коши разрешима. Таким образом,

$$J_\xi = -2\|v_\xi\|^2, \quad J\|_{\xi=0} = J(v_0). \tag{4.6$'$}$$

Отсюда вытекает

$$J = J(v_0) - 2\int\limits_0^\xi \|v_\xi\|^2 d\xi, \quad \int\limits_0^\infty \|v_\xi\|^2 d\xi < \infty. \tag{4.7}$$

В предположении (П4.3) за R примем $\chi\left(M(v)-f\right)$. Пусть $\tilde{u}$ — функция из (П4.3). Умножим v_ξ скалярно на $g = A^{-1}\tilde{u}$. Тогда

$$\langle v_\xi, g\rangle = \langle \chi\left(M(v)-f\right), \quad \left[L_0 + \dot{\tilde{B}}(Av)\right] Ag\rangle = \langle \chi\left(M(v)-f\right),$$

$$\left(L_0 + \dot{\tilde{B}}(A)\right)\tilde{u}\rangle = \|\chi\left(M(v)-f\right)\|^2.$$

(Здесь мы учитывали, что $\langle \tilde{N}v, g\rangle$ обращается в нуль в силу равенств $NAg|_{\partial\Omega} = N\tilde{u}|_{\partial\Omega} = 0$).

Из (П4.3) и полученного для $\langle v_\xi, g\rangle$ равенства имеем

$$\|\chi\left(M(v)-f\right)\|^2 \le \|g\|v_\xi\| \le c\|\chi\left(M(v)-f\right)\|\|v_\xi\|.$$

Отсюда и из (4.7) вытекает, что

$$\int\limits_0^\infty \|\chi\left(M(v)-f\right)\|^2 d\xi \le c_1 < \infty. \tag{4.8}$$

Умножим теперь v_ξ на v скалярно и проинтегрируем от 0 до ξ:

$$\frac{\|v_\xi\|^2}{2} - \frac{\|v(0)\|^2}{2} = \int\limits_0^\xi -\Big(\langle \chi\left(M(v)-f\right), \dot{M}(v)v\rangle + \langle \tilde{N}v, v\rangle\Big) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\xi \Big(-J(v) - \langle \chi\left(M(v)-f\right), \dot{M}(v)v - M(v) + f\rangle\Big) d\xi = -\int\limits_0^\xi J(v)d\xi -$$

$$-\langle \chi\left(M(v)-f\right), f + \dot{\tilde{B}}(Av)Av - \tilde{B}(Av)\rangle.$$

Это равенство и (4.8) дают оценку

$$\frac{\|v_\xi\|^2}{2} + \int\limits_0^\xi J d\xi \le \frac{\|v(0)\|^2}{2} + c_1\sqrt{\int\limits_0^\xi \|\chi\left[f + \dot{\tilde{B}}(Av)Av - \tilde{B}(Av)\right]\|^2 d\xi}.$$

В силу построения $\tilde{B}(\cdot)$ подынтегральное выражение в правой части ограничено постоянным числом. Поэтому

$$\frac{\|v(\xi)\|^2}{2} + \int\limits_0^\xi J d\xi \leq \frac{\|v(0)\|^2}{2} + c_2\sqrt{\xi}. \tag{4.8$'$}$$

Далее из (4.7) получаем, что J по ξ монотонно не возрастает. Следовательно, из (4.8$'$) вытекает

$$\frac{\|v(\xi)\|^2}{2} + J\xi \leq \frac{\|v(0)\|^2}{2} + c_2\sqrt{\xi}.$$

А это неравенство дает

$$J \leq c_3\xi^{-1/2}, \quad \|v(\xi)\| c_3\xi^{-1/4}. \tag{4.8$''$}$$

Теперь воспользуемся предположением (П3.2). Тогда получаем, что имеет место

Теорема 4.1. *Пусть выполнены предположения (П4.1), (П4.2) и (П4.3). Тогда, если v решение (4.6), то при $\xi \to +\infty$ v стремится к решению задачи (4.4). Причем*

$$\|LAv - f\|_\Omega^2 + \int\limits_{\partial\Omega} \|NAv\|^2 dS(x) \leq \frac{c}{\sqrt{\xi}}.$$

Кроме того, если $\tilde{v}$ — решение (4.4), $\tilde{u}$ — продолжение $\chi A\tilde{v}$, а u — продолжение χAv, то

$$\|A^{-\theta}(u - \tilde{u})\|_Q^2 \leq \frac{c}{\sqrt{\xi}}.$$

Если положить в этой теореме $Av = u$, получим следующее утверждение.

Теорема 4.1$'$. *Пусть выполнены (П4.1), (П4.2) и (П4.3). Определяем v из уравнения (4.6). Положим $u = Av$, тогда имеет место оценка*

$$\|Lu - f\|_\Omega^2 + \int\limits_{\partial\Omega} \|Nu\|^2 dS(x) \leq \frac{c}{\sqrt{\xi}}.$$

Доказательство. Первое неравенство непосредственно следует из (4.8$''$). Достаточно доказать второе неравенство. Из предположения (П4.2) имеем

$$\|A^{-\theta}(u - \tilde{u})\|^2 \leq c\left[\int\limits_{\partial\Omega} \|NAv\|^2 dS(x) + \|\chi(Mv) - M(A(A^{-1}\tilde{u}))\|_{L_2(Q)}^2\right] =$$

$$= c\left[\int\limits_{\partial\Omega} \|NAv\|^2 dS(x) + \|\chi((Mv) - f)\|_Q^2\right] = cJ.$$

Отсюда вытекает второе неравенство теоремы.

Замечание 4.1. В условиях теоремы 4.1 при $\xi \to \infty$ функционал J стремится к нулю, а v стремится к решению.

Стремления к нулю для J можно добиться в более слабых ограничениях. Например, возьмем

$$v_\xi = -J\frac{\omega}{\|\omega\|^2}, \quad v|_{\xi=0} = v_0,$$

$$\omega = \dot{M}^*(v)\chi(M(v) - f) + \tilde{N}v. \tag{4.6$'$}$$

Подставляя v_ξ в выражение для J_ξ, получаем $J_\xi = -2J$. Поэтому при таком выборе v_ξ

$$J = e^{-2\xi}J(v_0) = c_0e^{-2\xi}, \quad c_0 = J(v_0).$$

Видно, что J стремится к нулю экспоненциально. Но отметим, что задачу Коши (4.6$'$) теперь труднее решать (а также доказывать существование ее решения), чем задачу (4.6).

Выкладки этого замечания верны для очень обширного класса задач, по крайней мере формально. Поэтому, базируясь на выборе (4.6$'$), можно составить для задачи (4.4) (а следовательно, и для (4.1)) итерационный процесс

$$v_{n+1} = v_n - \varepsilon_n\omega_n,$$

$$\omega_n = \dot{M}^*(v_n)\chi[M(v_n) - f] + \tilde{N}v_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.9}$$

В этом процессе ε_1, ε_2, ..., выбирается следующим образом. Пусть уже выбран ε_{n-1}. Вычислим v_{n+1} по формуле (4.9). Выбрав $\varepsilon_n = 2^j\varepsilon_{n-1}$ $(j = -1, 0, 1)$ и обозначив вычисленное значение v_{n+1} через $v_{n+1,j}$, найдем $J(v_{n+1,j})$ $(j = -1, 0, 1)$. Обозначим $\tilde{J} = \min \tilde{J}(v_{n+1,j})$ $(j = -1, 0, 1)$. Если $\tilde{J} = J(v_{n+1,1})$, то берем $\varepsilon_n = 2\varepsilon_{n-1}$, если же $J(v_{n+1,1}) > \tilde{J}$ и $\tilde{J} = J(v_{n+1,0})$, то берем $\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$.

Наконец, если $J(v_{n+1,1})$, $J(v_{n+1,0}) > \tilde{J}$, то берем $\varepsilon_n = 0.5\varepsilon_{n-1}$. Мы можем оказаться в ситуации, когда вычисленное значение $J(v_{n+1})$ (с уже выбранным ε_n) не меньше, чем $J(v_n)$. В таком случае нужно делать пересчет v_{n+1}, взяв $\varepsilon_n' = 0.5\varepsilon_n$. Для достаточно общих краевых задач (в частности, для задач, которые удовлетворяют (П4.1), (П4.2) и (П4.3)) можно доказать, что такой расчет приведет к построению последовательности v_n, для которой имеет место соотношение $J(v_n) \to 0$. В предположениях (П4.2), (П4.3) из стремления $J(v_n)$ к нулю вытекает сходимость v_n (в слабой метрике) к решению задачи (4.4).

5. О приближенном решении нелинейных эллиптических задач итерацией

Основным недостатком метода, описанного в предыдущем разделе, является тот факт, что уравнение (4.6), позволяющее строить приближенное решение (4.4), само есть дифференциальное уравнение. Мы признаем возможную неудовлетворенность читателя. Более удобным для численной реализации был бы дискретный вариант (4.6).

Этот раздел — непосредственное продолжение п. 4. Поэтому, если не оговорено иное, используются принятые ранее обозначения. Считаем также, что выполнены предположения (П4.1), (П4.2) и (П4.3). Кроме того, предположим также, что выполнено следующее условие.

(П5.1). Если $J(v) < c_0$, $\|\omega\| = 1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 < 1$, то выполнено неравенство $\|\tilde{B}(Av + \varepsilon\omega) - \tilde{B}(Av) - \varepsilon\tilde{B}(Av)\omega\| \le c_1\varepsilon^2$, где $c_1 < \infty$ непрерывно зависит от c_0 и не убывает при возрастании c_0.

Пусть $\|\omega\| = 1$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, где ε_0 — число, фигурирующее в (П5.1). Тогда

$$J(v) \le J(v_0) \le c_0,$$

$$J(v + \varepsilon\omega) = \|\chi(M(v + \varepsilon\omega) - f)\|^2 + \langle(\tilde{N}(v + \varepsilon\omega), v + \varepsilon\omega)\rangle =$$

$$= \|\chi(M(v+\varepsilon\omega) - (M(v)) + \chi(M(v) - f)\|^2 +$$
$$+\langle(\tilde{N}v, v\rangle + 2\varepsilon\langle(\tilde{N}v, \omega\rangle + \varepsilon^2\langle\tilde{N}\omega, \omega\rangle = J(v) + 2\langle\chi M(v) - f),$$
$$M(v+\varepsilon\omega) - M(v)\rangle + 2\varepsilon\langle\tilde{N}v, \omega\rangle + \langle\tilde{N}\omega, \omega\rangle\varepsilon^2 +$$
$$+\|\chi(M(v+\varepsilon\omega) - (M(v))\|^2 = J(v) + 2\varepsilon\langle\chi(M(v) - f), L_0 A\omega\rangle + 2\varepsilon\langle\tilde{N}v, \omega\rangle +$$
$$+2\varepsilon\langle\chi(M(v) - f), \dot{\tilde{B}}(Av)A\omega\rangle + 2\langle\chi(M(v) - f), \tilde{B}(Av + \varepsilon\omega) - \tilde{B}(Av) -$$
$$-\dot{\tilde{B}}(Av)\varepsilon A\omega\rangle + \varepsilon^2\langle\tilde{N}\omega, \omega\rangle + \|\chi(L_0 A\omega\varepsilon) + \chi(\tilde{B}(Av + \varepsilon\omega) -$$
$$-\tilde{B}(Av) - \varepsilon\dot{\tilde{B}}(Av)A\omega + \varepsilon\dot{\tilde{B}}(Av)A\omega\|^2.$$

Отсюда и из предположения (П5.1) вытекает, что

$$J(v+\varepsilon\omega) \leq J(v) + 2\varepsilon\langle(L_0A)^*\chi(M(v) - f) + \tilde{N}v + \left(\dot{\tilde{B}}(Av)A\right)^* \chi(M(v) - f), \omega\rangle + c_2\varepsilon^2,$$

где c_2 зависит от $J(v_0) = c_0$. Выберем $\omega = -\dfrac{\tilde{\omega}}{\|\tilde{\omega}\|}$, где

$$\tilde{\omega} = \left(\tilde{N}v + \left[(L_0A)^* + \left(\dot{\tilde{B}}(Av)A\right)^*\right] \chi(M(v) - f)\right).$$

Откуда

$$J(v+\varepsilon\omega) \leq J(v) - 2\varepsilon\|\tilde{\omega}\| + \varepsilon^2 c_2. \tag{5.1}$$

Оценим $\tilde{\omega}$. Пусть g — решение задачи

$$L_0 g + \dot{\tilde{B}}(Av)g = \chi(M(v) - f) \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$Ng|_{\partial\Omega} = 0.$$

Продолжим g с Ω на Q согласно (П4.3). Это продолжение обозначим также через g. Положим $\tilde{g} = \dot{A}^{-1}g$. Умножим ω скалярно на g. Тогда с учетом граничного условия на g, определения N и выбора g, имеем

$$\langle\tilde{\omega}, \tilde{g}\rangle = \|\chi(M(v) - f)\|^2.$$

Теперь, учитывая 4.3, получаем

$$\|\chi(M(v) - f)\|^2 \leq \|\tilde{\omega}\|\|\tilde{g}\| \leq \tilde{c}\|\tilde{\omega}\|\|\chi(M(v) - f)\|.$$

Поэтому

$$\|\tilde{\omega}\| \geq \chi(M(v) - f)\|\tilde{c}^{-1}. \tag{5.2}$$

Отсюда вытекает, что $\tilde{\omega} = 0$, если $J(v) \neq 0$. Действительно, если $\tilde{\omega} = 0$, то из (5.2) следует, что $M(v) - f = 0$ в Ω. Поэтому в силу определения $\tilde{\omega}$ имеем $0 = \tilde{\omega} = \tilde{N}v$, $\langle\tilde{N}v, v\rangle = 0$. Но тогда $J(v) = 0$. В случае $J(v) = 0$ получаем, что v — решение (4.4) и цель достигнута. Следовательно, можно считать, что $\tilde{\omega} \neq 0$. Выберем теперь ε положительным и таким, что $\varepsilon\|\tilde{\omega}\| = 2\varepsilon^2 c_2$. Отсюда и из (5.1) вытекает

$$J(v+\varepsilon W) \leq J(v) - \varepsilon\|\tilde{W}\|_Q = J(v) - \frac{\|\tilde{W}\|_Q^2}{2c_2},$$

$$\varepsilon = -\frac{\|\tilde{W}\|_Q^2}{2c_2}, \quad \varepsilon W = -\frac{1}{2c_2}\tilde{W}. \tag{5.3}$$

Определим последовательность v_n по рекуррентным формулам

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{2_2}\omega_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\omega_n = -\tilde{N}v_n + \left[(L_0A)^* + \left(\dot{\tilde{B}}(Av_n)A\right)^*\right]\chi(M(v_n) - f) \tag{5.4}$$

(напомним, что χ — характеристическая функция Ω).

Теорема 5.1. *Пусть выполнены предположения (П4.1), (П4.2),(П4.3), (П5.1) и пусть $v_n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность, построенная по рекуррентным формулам (5.4). Тогда*

$$J(v_n) \leq \frac{c}{\sqrt{n+1}},$$

где c не зависит от f.

Функции χAv_n имеют продолжения $\tilde{u}_n$ из Ω на Q, такие, что

$$\|A^{-\theta}(\tilde{u}_n - \tilde{u}_m)\|^2 \leq \frac{c}{\sqrt{n+1}} \quad (1 \leq n \leq m).$$

Последовательность Av_n сходится к решению задачи 4.1.

Доказательство. Из (5.3) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\omega_n\|_Q^2 \leq c_3 < \infty. \tag{5.5}$$

Умножим ω_n на v_n скалярно:

$$\langle\omega_n, v_n\rangle = -\langle\tilde{N}v_n, v_n\rangle - \langle\chi(M(v) - f), L_0Av_n + \dot{\tilde{B}}(Av_n)Av_n\rangle =$$

$$= -J(v_n) - \langle\chi(M(v_n) - f)), f - \tilde{B}(Av_n) + \dot{\tilde{B}}(Av_n)Av_n\rangle \leq$$

$$\leq -J(v_n) + \|\chi(M(v_n) - f)\| \cdot \|f - \tilde{B}(A(v_n)) + \dot{\tilde{B}}(Av_n)Av_n\|$$

или

$$2c_2\langle v_{n+1} - v_n, v_n\rangle + J(v_n) \leq \|\chi M(v) - f\| \cdot \|f - \tilde{B}(Av_n) + \dot{\tilde{B}}(Av_n)Av_n\|.$$

Просуммируем эти неравенства по всем n от 0 до k:

$$\sum_{n=0}^{k} J(v_n) + 2c_2\sum_{n=0}^{k}\langle v_{n+1} - v_n, v_n\rangle \leq \sum_{n=0}^{k}\|\chi(M(v_n) - f) \cdot \|f - \tilde{B}(Av_n) + \dot{\tilde{B}}(Av_n)Av_n\|.$$

Теперь воспользуемся (5.2), (5.5) и построением $\tilde{B}(\cdot)$ по $B(\cdot)$. Получим неравенство

$$\sum_{n=0}^{k} J(v_n) + 2c_2\sum_{n=0}^{k}\langle v_{n+1} - v_n, v_n\rangle \leq c_4\sum_{n=0}^{k}\|\omega_n\| \leq c_4\sqrt{k}\sqrt{\sum_{n=0}^{k}\|\omega_n\|^2} \leq c_5\sqrt{k}. \tag{5.6}$$

Преобразуем второе слагаемое левой части последнего неравенства (5.6):

$$2\sum_{n=0}^{k}\langle v_{n+1}-v_n, v_n\rangle = \sum_{n=0}^{k}\left(\|v_{n+1}\|^2-\|v_n\|^2-\|v_{n+1}-v_n\|^2\right) =$$

$$= \|v_{k+1}\|^2-\|v_0\|^2-\sum_{n=0}^{k}\|v_{n+1}-v_n\|^2.$$

Отсюда, учитывая соотношение

$$v_{n+1}-v_n = (2c_2)^{-1}\omega_n$$

из (5.6), имеем оценку

$$\|v_{k+1}\|^2+\sum_{n=1}^{k}J(v_n) \le \sqrt{k}c_6+\|v_0\|^2.$$

Поскольку функционал $J(v_n)$ не возрастает по n, из этого неравенства следует оценка

$$J(v_n) \le c_7\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Это неравенство и предположение (П4.2) доказывают теорему.

6. О приближенном решении нелинейной параболической задачи

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-(L_0u+Bu)=f, \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,1),$$
$$u|_{t=0}=0, \quad Nu|_{\partial\Omega}=0. \tag{6.1}$$

Здесь L_0 — строго эллиптический линейный оператор второго порядка, $Bu = B(u,x,t)$ — дважды непрерывно-дифференцируемая функция своих аргументов $u, x, t, u \in (-\infty,\infty)$, $x\in\tilde{\Omega}$, $t\in[0,1]$.

Если для задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle u=f,$$
$$u|_{t=0}=0, \quad Nu|_{\partial\Omega}=0 \tag{6.2}$$

можно явно написать функцию Грина, то использование результатов из п. 1 дает эффективный метод решения.

Как правило, для задачи (6.2) явно выписать функцию Грина невозможно. Поэтому мы будем действовать методом, описанным в пп. 4, 5, т. е. методом фиктивных областей. Пусть Q — куб, содержащий Ω. Помимо (6.1) рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle u=f, \quad x\in Q, \quad t\in(0,1),$$

$$u|_{t=0}=0. \tag{6.3}$$

По пространственным переменным присоединим к (6.3) периодические краевые условия.

Пусть $A(x,t,y,\eta)$ — функция Грина задачи (6.3). Она может быть выписана явно. Обозначим

$$(Av)(x,t)=\int\limits_0^t\left(\int\limits_Q A(x,t,y,\eta)v(y,\eta)dy\right)d\eta. \tag{6.4}$$

Приближенное решение задачи (6.1) будем искать в виде $u=Av$. Тогда v очевидно удовлетворяет уравнению

$$lAv-B(Av)-f=0, \tag{6.5}$$

где $l=\dfrac{\partial}{\partial t}-L_0$.

Для Av начальное условие $(Av)|_{t=0}=0$ выполняется автоматически. Поэтому к (6.5) остается присоединить условие

$$(NA)v|_{\partial\Omega}=0. \tag{6.6}$$

Так же, как и в пп. 4, 5, имеются другие варианты выбора A, например,

$$Av=\int\limits_0^t\int\limits_Q \chi(x)G(x,t,y,\eta)\chi(y)v(y,\eta)dyd\eta,$$

где $G(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — функция Грина для уравнения теплопроводности $u_t-\triangle u=f$, $u|_{t=0}=0$, $t\in[0,\infty)$, $x\in R^n$. Явный вид $G(\cdot,\cdot)$ можно найти в любой книге по уравнениям математической физики.

Для приближенного решения задачи (6.1) будем пользоваться следующими предположениями (П6.1), (П6.2), (П6.3):

(П6.1). Задача (6.1) однозначно разрешима для любого $f\in L_2(\Omega_{0,1})$, где $\Omega_{0,1}=\{(t,x):\ t\in[0,1],\ x\in\Omega\}$. Причем, если $f\in C(\Omega_{0,1})$, то решение $u(t,x)$ также непрерывно на $\Omega_{0,1}$.

В силу этого предположения при $f\in C[\Omega_{0,1}]$ решение (6.1) совпадает с решением

$$\frac{\partial u}{\partial t}-L_0u-\tilde{B}(u)=f,$$

$$u|_{t=0}=0,\quad Nu|_{\partial\Omega}=0, \tag{6.1$'$}$$

где $\tilde{B}(u)=\gamma[\|u\|^2]B(u)$. Здесь γ должна быть непрерывно дифференцируемой функцией, которая равна 1 при $\|u\|^2\le t_1$ и нулю при $\|u\|^2>t_2$ $(0<t_1<t_2)$. Числа t_1 и t_2 зависят от f. Будем решать задачу при $f\in C(Q_{0,1})$.

Теперь вместо (6.5) – (6.6) имеем

$$lAv-\tilde{B}(Av)=f,\quad Nu|_{\partial\Omega}=0.$$

Введем, как обычно, функционал $J(v)$:

$$J(v)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_Q\|lAv\tilde{B}(Av)-f\|^2\chi dxdt+\int\limits_0^1\left(\int\limits_{\partial\Omega}\|NAv\|^2dS(x)\right)\right)dt$$

($dS(x)$ — элемент поверхности $\partial\Omega$, χ — характеристическая функция Ω). Как и в пп. 4, 5, этот функционал можно переписать в виде

$$J(v) = \int_0^1 \left\|\chi\left(lAv - \tilde{B}(Av) - f\right)\right\|_Q^2 dt + \int_0^1 \langle \tilde{N}v, v\rangle dt =$$

$$= \int_{Q_{0,1}} \|\chi\,(lAvB(Av) - f)\,\|_{Q_{0,1}}^2 dt + \langle \tilde{N}v, v\rangle_{Q_{0,1}}.$$

Здесь $\|\cdot\|_{Q_{0,1}}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{Q_{0,1}}$ норма и скалярное произведение в $L_2(Q_{0,1})$,

$$Q_{0,1} = \{(t,x): \quad t \in [0,1), x \in Q\}.$$

Теперь можем перечислить остальные предположения, которые нужны в дальнейшем.

(П6.2). Если $J(v_1)$, $J(v_2) \le c_0 < \infty$ и $u_1 = \chi Av_1$, $u_2 = \chi Av_2$, то

$$\|u_1 - u_2\|^2 \le c_1 \left[\langle \tilde{N}(v_1 - v_2), v_1 - v_2\rangle + \int_{\Omega_{0,1}} \|M(\chi Av_1) - M(\chi Av_2)\|^2 dxdt\right],$$

$$M(u) = lAu - \tilde{B}(Au).$$

(П6.3). Если $J(v) \le c_0 < \infty$, то задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - L_0 u - \dot{\tilde{B}}(Av)u = R, \quad t \in (0,1), x \in \Omega,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad Nu|_{\partial\Omega} = 0$$

однозначно разрешима, причем решение $u(t,x)$ из $\Omega_{0,1}$ продолжается на $Q_{0,1}$, так, что

$$\left\|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} - \triangle\tilde{u}\right\|_{Q_{0,1}} \le c\|R\|_{Q_{0,1}}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = 0;$$

по пространственным переменным функция $\tilde{u}$ ($\tilde{u}$ — продолжение u) удовлетворяет периодическим краевым условиям.

(П6.4). Если $J(v) \le c_0 < \infty$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0], (\varepsilon_0 > 0), \|\omega\| = 1$,
то $\|\tilde{B}(Av + \varepsilon\omega) - \tilde{B}(Av) - \varepsilon\dot{\tilde{B}}(Av)\omega\| \le c_1\varepsilon^2$,
где $c_1 < \infty$ непрерывно зависит от c_0 и монотонно не возрастает при возрастании c_0.

Построим последовательность v_n по рекуррентным формулам

$$v_{n+1} = v_n - \delta\omega_n,$$

$$\omega_n = \left[(IA)^* + (\tilde{B}(Av_n)A)^*\right]\chi\left[IAv_n + \tilde{B}(Av_n) - f\right] + \tilde{N}v_n.$$

Так же, как аналогичная теорема из п. 5 доказывается

Теорема 6.1. *Пусть f непрерывна $\Omega_{0,1}$ и выполнены предположения (П6.1) – (П6.4). Существует число $\delta_0 > 0$, такое, что при $\delta \in (0,\delta_0)$ последовательность, построенная по формулам (6.6), удовлетворяет условиям:*

1) $J(v_n)$ монотонно убывает и стремится к нулю, причем $J(v_n) \le c(n+1)^{-1/2}$ ($n = 0, 1, \ldots$);

2) $\chi A v_n$ стремится в $L_2(\Omega_{0,1})$ к решению u задачи (6.1), причем $\|\chi A v_n - u\|_{\Omega_{0,1}} \le c(n+1)^{-1/2}$.

Замечание 6.1. Так как точное значение δ из теоремы найти трудно, целесообразно поступить следующим образом: нужно взять δ не постоянным, а зависящим от n. Пусть δ_n на n-м шаге уже принята. Подсчитаем v_{n+1} и $J(v_{n+1})$ с δ_{n+1}, равной δ_n, а затем подсчитаем $\tilde{v}_{n+1}$ и $I(\tilde{v}_{n+1})$, положив $\delta_{n+1} = 0.5\delta_n$. Если $I(\tilde{v}_{n+1}) \le I(v_{n+1})$, то окончательно примем $\delta_{n+1} = \delta_n$, если $I(v_{n+1}) < I(\tilde{v}_{n+1})$, то за δ_{n+1} возьмем $0.5\delta_n$.

Основные результаты этой работы содержатся в [10].

7. Заключение

В работе для численного решения нелинейных краевых задач предложен итерационный метод, который базируется на построении минимизирующей последовательности, сходящейся к решению исходной задачи. Даны оценки скорости сходимости решения приближенного метода. Одновременно метод можно трактовать как новый вариант метода фиктивных областей. Полученный алгоритм реализуется на ЭВМ.

Список литературы

[1] Самарский А. А., Николаев Е. С. *Методы решения сеточных уравнений.* Наука, М., 1978.

[2] Дьяконов Е. Г. *Минимизация вычислительной работы.* Наука, М., 1989.

[3] Самарский А. А., Фрязиков И. В. О разностных методах аппроксимации задач математической физики. *Усп. матем. наук*, **5**, №5, 1976, 167–197.

[4] Самарский А. А. *Теория разностных схем.* Наука, М., 1983.

[5] Волков Е. Л. *Численные методы.* Наука, М., 1982.

[6] Вабищевич П. Н. Методы фиктивных областей в задачах математической физики. МГУ, М., 1993.

[7] Бугров А. Н., Смагулов Ш. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье—Стокса. В: *“Матем. модели течений жидкости”.* Новосибирск, 1978, 79–90.

[8] Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для уравнения Навье—Стокса. *Препринт ВЦ СО АН СССР*, №26, Новосибирск, 1980.

[9] Коробицына Ж. Л. Применение метода фиктивных областей к некоторым задачам фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. *Препринт ВЦ СО АН СССР*, №5, 1976.

[10] Мухамбетжанов А. Т., Отелбаев М. О., Смагулов Ш. С. Об одном новом приближенном методе решение нелинейных краевых задач. *Препринт ИА РК*, №21, 1997.

Поступила в редакцию 3 марта 1998 г.