

# ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ САМОУРАВНОВЕШЕННЫХ НЕВЯЗОК

Г. В. ИВАНОВ, В. Д. КУРГУЗОВ

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН  
Новосибирск, Россия*

Presented here, is the iteration method of solving the static problems of solid mechanics. Every iteration begins with some approximation that does not satisfy the considered system of equations. Residues arising in the equations can be interpreted as the concentrated forces and moments applied to the nodes of the finite element mesh. The aim of the iterative process is to eliminate these concentrated forces and moments or to reduce them, in accordance with some criterion, to minimum values. Every iteration of the method leads to the decrease in the value of the positively determined quadratic functional that provides the convergence of the iterations. High rate of convergence is achieved by selecting such variations of displacements at which the residues turn to be self-equilibrated (the sum of the residues is equal to zero) within the limits of some area. Using the one-dimensional problem by way of example, the efficiency of different choices of the self-equilibrium area is considered. Presented here for the two-dimensional problem, are the equations of formation of residues self-equilibrated with respect to the thickness of layer packs.

При численном моделировании в механике сплошной среды возникают системы линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Для решения таких систем существует много различных численных методов, непрерывно ведется работа по их усовершенствованию, проводится их переоценка, разрабатываются новые. В результате оказывается, что значительная часть имеющихся методов имеет право на существование, обладает своей областью применимости. Поэтому при численном решении конкретной задачи существует проблема выбора одного метода из множества допустимых методов решения данной задачи. При решении статических задач механики деформируемого твердого тела, как правило, применяются итерационные методы, среди которых большое место занимают методы релаксации. Каждая итерация начинается с некоторого приближения, которое не удовлетворяет решаемой системе уравнений. Возникающие в уравнениях невязки в статических задачах можно интерпретировать как сосредоточенные силы и моменты, приложенные в узлах конечноэлементной сетки. Целью итерационного процесса является устранение этих сосредоточенных сил и моментов или сведение их в соответствии с некоторым критерием к минимальным значениям. В статических задачах механики твердого деформируемого тела каждая итерация релаксационного метода приводит, как правило, к уменьшению значения положительно определенного квадратичного функционала, что обеспечивает сходимость итераций.

Простейшим релаксационным методом является метод Саусвелла [1], в котором невязки изменяются последовательно в каждом узле. Эта процедура эквивалентна методу локальных вариаций [2]. Обобщением метода Саусвелла являются методы блочной или групповой релаксации [3], в которых значения искомым величин изменяются одновременно в целой группе уравнений, что приводит к одновременному изменению невязок в соответствующих узлах. В работе [4] отмечается, что итерационные процедуры, приводящие на каждом шаге к системе самоуравновешенных невязок (сосредоточенных усилий) по некоторой области, обладают более быстрой сходимостью. Основная трудность заключается в выборе областей самоуравновешенных невязок и процедуре их изменения. Физическую интерпретацию невязок и представление о форме искомого решения можно использовать при выборе областей самоуравновешенности невязок.

## 1. Формулировка задачи для прямоугольной области

Для удобства проведем рассуждения на примере плоской статической задачи теории упругости для прямоугольной области, разбитой на прямоугольные элементы сеткой  $x_n^1 = nh_1$  ( $n \in [0, N]$ ),  $x_m^2 = msh_2$  ( $m \in [0, M]$ ).

В работе [5] на основе независимой аппроксимации смещений получены уравнения, связывающие усилия  $p_{ij}$  на гранях элемента (рис. 1) со смещениями граней  $u_{ij}$  (рис. 2) — уравнения жесткости элемента:

$$(p_{ij}^0 - \tilde{u}_{ij}^0)_{n+1/2, m+1/2} = 0, \quad (p_{ij}^1 - \tilde{u}_{ij}^1 - c_{ij})_{n+1/2, m+1/2} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\tilde{u}_{11}^0 = \frac{h_2}{h_1} au_{11}^1 + bu_{22}^1, \quad \tilde{u}_{12}^0 = \mu \left( \frac{h_1}{h_2} u_{12}^1 + u_{21}^1 \right), \quad \tilde{u}_{11}^1 = 4\lambda_{11}(u_{11}^0 - u_{12}^0), \quad \tilde{u}_{12}^1 = 4\lambda_{12}(u_{12}^0 - u_{11}^0),$$

$$\tilde{u}_{22}^0 = \frac{h_1}{h_2} au_{22}^1 + bu_{11}^1, \quad \tilde{u}_{21}^0 = \mu \left( \frac{h_2}{h_1} u_{21}^1 + u_{12}^1 \right), \quad \tilde{u}_{22}^1 = 4\lambda_{22}(u_{22}^0 - u_{21}^0), \quad \tilde{u}_{21}^1 = 4\lambda_{21}(u_{21}^0 - u_{22}^0),$$

$$p_{i1, n+1/2, m+1/2}^1 = p_{i1, n+1, m+1/2} - p_{i1, n, m+1/2}, \quad p_{i1, n+1/2, m+1/2}^0 = \frac{1}{2}(p_{i1, n+1, m+1/2} + p_{i1, n, m+1/2}),$$

$$p_{i2, n+1/2, m+1/2}^1 = p_{i2, n+1/2, m+1} - p_{i2, n+1/2, m}, \quad p_{i2, n+1/2, m+1/2}^0 = \frac{1}{2}(p_{i2, n+1/2, m+1} + p_{i2, n+1/2, m}),$$

$$i = 1, 2,$$

$$\lambda_{11} = \frac{3\frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}, \quad \lambda_{22} = \frac{3a\frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}, \quad \lambda_{12} = \frac{3\mu\frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}, \quad \lambda_{21} = \frac{3\mu\frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2},$$

$$c_{11}^1 = -\frac{h_1 h_2}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} f_1^0, \quad c_{22}^1 = -\frac{h_1 h_2}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2} f_2^0, \quad c_{12}^1 = -\frac{h_1 h_2}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2} f_1^0, \quad c_{21}^1 = -\frac{h_1 h_2}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} f_2^0,$$

$a, b, \mu$  — коэффициенты закона Гука,  $f_1^0, f_2^0$  — средние по площади элемента значения объемных сил,

$$u_{i1, n+1/2, m+1/2}^1 = u_{i1, n+1, m+1/2} - u_{i1, n, m+1/2}, \quad u_{i1, n+1/2, m+1/2}^0 = \frac{1}{2}(u_{i1, n+1, m+1/2} + u_{i1, n, m+1/2}),$$

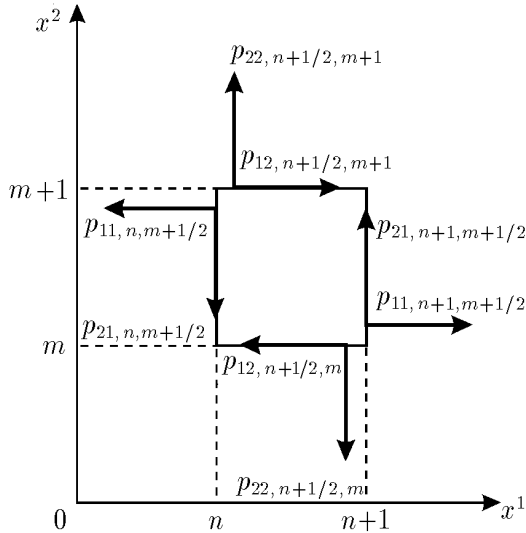


Рис. 1.

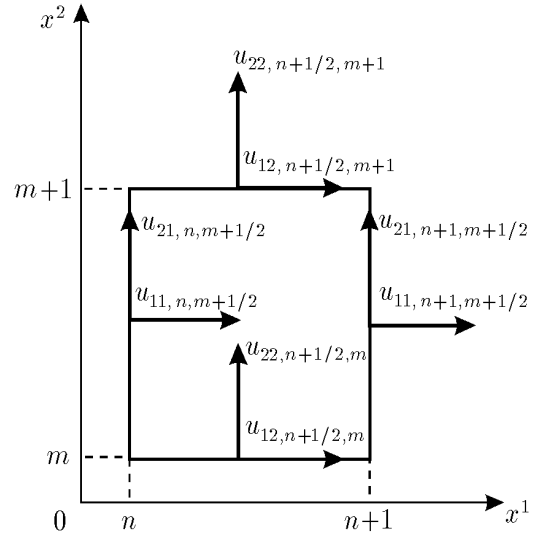


Рис. 2.

$$u_{i2, n+1/2, m+1/2}^1 = u_{i2, n+1/2, m+1} - u_{i2, n+1/2, m}, \quad u_{i2, n+1/2, m+1/2}^0 = \frac{1}{2}(u_{i2, n+1/2, m+1} + u_{i2, n+1/2, m}),$$

$$i = 1, 2.$$

Величины  $p_{i1, n, m+1/2}$ ,  $p_{i2, n+1/2, m}$ ,  $u_{i1, n, m+1/2}$ ,  $u_{i2, n+1/2, m}$  означают действующие на гранях усилия (см. рис. 1) и смещения (см. рис. 2). Стрелками на рисунках показаны направления действия положительных значений усилий и смещений.

Задача для прямоугольной области из  $N \times M$  элементов состоит в решении системы алгебраических уравнений (1.1) при  $n \in [0, N-1]$ ,  $m \in [0, M-1]$ , дополненной граничными условиями типа

$$\begin{aligned} & [(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})]_{n+1/2, 0} = 0, \\ & [(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})]_{n+1/2, M} = 0, \quad n \in [0, N-1], \\ & [(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})]_{0, m+1/2} = 0, \\ & [(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})]_{N, m+1/2} = 0, \quad m \in [0, M-1], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где числа  $z_{i2, n+1/2, 0}$ ,  $z_{i2, n+1/2, M}$  ( $n \in [0, N-1]$ ),  $z_{i1, 0, m+1/2}$ ,  $z_{i1, N, m+1/2}$  ( $m \in [0, M-1]$ ) равны нулю, если на соответствующих гранях элементов заданы смещения, и единице, если заданы усилия; величины  $\hat{u}_{ij}$ ,  $\hat{p}_{ij}$  равны заданным значениям смещений и усилий, либо равны нулю, если соответствующие значения не заданы.

## 2. Вариационная формулировка задачи о вычислении итераций

Согласно п. 7 [5], задачу о решении системы уравнений (1.1), (1.2) можно рассматривать, как задачу о минимуме функционала

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} (\tilde{u}_{ij}^0 u_{ij}^1 + \tilde{u}_{ij}^1 u_{ij}^0 + 2c_{ij} u_{ij}^0)_{n+1/2, m+1/2} - \sum_{\sigma} z_{ij} \hat{p}_{ij} n_j u_{ij} \quad (2.1)$$

в классе смещений  $u_{i1,n,m+1/2}$  ( $n \in [0, N]$ ,  $m \in [0, M-1]$ ),  $u_{i2,n+1/2,m}$  ( $n \in [0, N-1]$ ,  $m \in [0, M]$ ), удовлетворяющих заданным для смещений граничным условиям. В (2.1)  $i, j = 1, 2$ ,  $n_j$  — компоненты единичной внешней нормали к границе области,  $\sum_{\sigma}$  — сумма тех граней, составляющих границу области, на которых заданы усилия  $p_{ij}$ , по повторяющимся индексам производится суммирование. Функционал  $\Psi$  имеет смысл функционала Лагранжа [6].

Пусть  $u_{i1,n,m+1/2}$ ,  $u_{i2,n+1/2,m}$  — какие-либо смещения, удовлетворяющие заданным для смещений граничным условиям. Если эти смещения не являются точным решением системы (1.1), (1.2), то их можно "улучшить", добавляя величины  $\dot{u}_{i1,n,m+1/2}$ ,  $\dot{u}_{i2,n+1/2,m}$ , удовлетворяющие условию

$$\sum_{\sigma} (1 - z_{ij}) \dot{u}_{ij} n_j = 0 \quad (2.2)$$

и вариационному уравнению

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} [(\tilde{u}_{ij}^0 + \tilde{u}_{ij}^1) \delta \dot{u}_{ij}^1 + (\tilde{u}_{ij}^1 + \tilde{u}_{ij}^1 + c_{ij}) \delta \dot{u}_{ij}^0] - \sum_{\sigma} z_{ij} \hat{p}_{ij} n_j \delta \dot{u}_{ij} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\tilde{u}_{ij}^0$ ,  $\tilde{u}_{ij}^1$  означают выражения, получающиеся при замене в  $\tilde{u}_{ij}^0$ ,  $\tilde{u}_{ij}^1$  величин  $u_{ij}^0$ ,  $u_{ij}^1$  величинами  $\dot{u}_{ij}^0$ ,  $\dot{u}_{ij}^1$ . Улучшение состоит в том, что значение  $\Psi$ , соответствующее смещениям  $(u_{i1} + \dot{u}_{i1})_{n,m+1/2}$ ,  $(u_{i2} + \dot{u}_{i2})_{n+1/2,m}$ , будет меньше значения  $\Psi$ , соответствующего смещениям  $u_{i1,n,m+1/2}$ ,  $u_{i2,n+1/2,m}$ , если хотя бы одна из величин  $\dot{u}_{i1,n,m+1/2}$ ,  $\dot{u}_{i2,n+1/2,m}$  отлична от нуля. Это создает возможность итерационного решения задачи (1.1), (1.2) на основе использования ненулевых решений системы (2.2), (2.3).

Система (2.2), (2.3) не имеет ненулевых решений лишь в случае, когда  $u_{i1,n,m+1/2}$ ,  $u_{i2,n+1/2,m}$  — точное решение задачи (1.1), (1.2). Среди возможных ненулевых решений системы (2.2), (2.3) интерес для итерационного решения задачи (1.1), (1.2) представляют лишь те, вычисления которых проще прямого решения системы (1.1), (1.2).

### 3. Представление невязок в виде внешних сил, сосредоточенных на гранях элементов

Пусть

$$\begin{aligned} u_{i1,n,m+1/2} & (n \in [0, N], m \in [0, M-1], i = 1, 2), \\ u_{i2,n+1/2,m} & (n \in [0, N-1], m \in [0, M], i = 1, 2) - \end{aligned} \quad (3.1)$$

какие-либо смещения, удовлетворяющие граничным условиям для смещений. Если смещения (3.1) не являются точным решением задачи, то соответствующие им по уравнениям жесткости элементов усилия будут разрывными.

Обозначим

$$\begin{aligned} F_{i1,n,m+1/2} & = [(\tilde{u}_{i1}^0 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i1}^1 + c_{i1}))]_{n-1/2,m+1/2} - \\ & - [(\tilde{u}_{i1}^0 - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i1}^1 + c_{i1}))]_{n+1/2,m+1/2}, \quad n \in [1, N-1], \quad m \in [0, M-1], \\ F_{i2,n+1/2,m} & = [(\tilde{u}_{i2}^0 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2}))]_{n+1/2,m-1/2} - \end{aligned}$$

$$-[(\tilde{u}_{i2}^0 - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2}))_{n+1/2, m+1/2}], \quad n \in [0, N-1], \quad m \in [1, M-1]; \quad (3.2)$$

величины  $F_{i1,0,m+1/2}$ ,  $F_{i1,N,m+1/2}$ ,  $F_{i2,n+1/2,0}$ ,  $F_{i2,n+1/2,M}$  записываются аналогично.

Величины  $F_{i1,n,m+1/2}$ ,  $F_{i2,n+1/2,m}$  — разрывы усилий на внутренних гранях элементов или разности между заданными на границе области усилиями, соответствующими смещениям (3.1). Смещения (3.1) можно рассматривать как точное решение задачи, в которой кроме внешних сил заданы сосредоточенные на гранях элементов силы  $F_{i1,n,m+1/2}$ ,  $F_{i2,n+1/2,m}$ . Это следует из возможности вариационной формулировки задачи в виде минимума функционала (2.1) и очевидного равенства

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} [(\tilde{u}_{ij}^0 \delta u_{ij}^1 + (\tilde{u}_{ij}^1 + c_{ij}) \delta u_{ij}^0)_{n+1/2, m+1/2} - \sum_{\sigma} z_{ij} \hat{p}_{ij} n_j \delta u_{ij} - \\ & - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M-1} (F_{i1} \delta u_{i1})_{n, m+1/2} - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^M (F_{i2} \delta u_{i2})_{n+1/2, m}] = 0, \end{aligned}$$

где  $\delta u_{i1,n,m+1/2}$ ,  $\delta u_{i2,n+1/2,m}$  — произвольные величины, удовлетворяющие нулевым граничным условиям для смещений:

$$\sum_{\sigma} (1 - z_{ij}) n_j \delta u_{ij} = 0.$$

Используя (3.2), вариационное уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} [(\dot{\tilde{u}}_{ij}^0 \delta \dot{u}_{ij}^1 + \dot{\tilde{u}}_{ij}^1 \delta \dot{u}_{ij}^0)_{n+1/2, m+1/2} + \\ & + \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M-1} (F_{i1} \delta \dot{u}_{i1})_{n, m+1/2} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^M (F_{i2} \delta \dot{u}_{i2})_{n+1/2, m}] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В качестве цели итерационного процесса можно рассматривать изменение смещений (3.1), ведущее к уменьшению сил  $F_{i1,n,m+1/2}$ ,  $F_{i2,n+1/2,m}$ , до размеров, при которых влияние этих сил на напряжения и деформации элементов пренебрежимо мало. Силы  $F_{i1,n,m+1/2}$ ,  $F_{i2,n+1/2,m}$  принято называть невязками.

#### 4. Изменения смещений, приводящие к самоуравновешенным невязкам

Обозначим через  $\hat{F}_{i1,n,m+1/2}$ ,  $\hat{F}_{i2,n+1/2,m}$  невязки, соответствующие смещениям  $(u_{i1} + \dot{u}_{i1})_{n,m+1/2}$ ,  $(u_{i2} + \dot{u}_{i2})_{n+1/2,m}$ , где  $\dot{u}_{i1,n,m+1/2}$ ,  $\dot{u}_{i2,n+1/2,m}$  — какое-либо решение уравнения (3.3). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \hat{F}_{i1,n,m+1/2} &= F_{i1,n,m+1/2} + (\dot{\tilde{u}}_{i1}^0 + \frac{1}{2} \dot{\tilde{u}}_{i1}^1)_{n-1/2, m+1/2} - \\ & - (\dot{\tilde{u}}_{i1}^0 - \frac{1}{2} \dot{\tilde{u}}_{i1}^1)_{n+1/2, m+1/2}, \quad n \in [1, N-1], \quad m \in [0, M-1], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{i2, n+1/2, m} &= F_{i2, n+1/2, m} + (\dot{\widehat{u}}_{i2}^0 + \frac{1}{2}\dot{\widehat{u}}_{i2}^1)_{n-1/2, m+1/2} - \\ &- (\dot{\widehat{u}}_{i2}^0 - \frac{1}{2}\dot{\widehat{u}}_{i2}^1)_{n+1/2, m+1/2}, \quad n \in [0, N-1], \quad m \in [1, M-1]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Величины  $\widehat{F}_{i1, 0, m+1/2}$ ,  $\widehat{F}_{i1, N, m+1/2}$ ,  $\widehat{F}_{i2, n+1/2, 0}$ ,  $\widehat{F}_{i2, n+1/2, M}$ , записываются аналогично.

Используя решения уравнения (3.3) с одинаковыми значениями  $\dot{u}_{i1, n, m+1/2}$ ,  $\dot{u}_{i2, n+1/2, m}$ , можно получить смещения  $(u_{i1} + \dot{u}_{i1})_{n, m+1/2}$ ,  $(u_{i2} + \dot{u}_{i2})_{n+1/2, m}$ , при которых невязки  $\widehat{F}_{i1, n, m+1/2}$ ,  $\widehat{F}_{i2, n+1/2, m}$  будут самоуравновешены (сумма невязок будет равна нулю).

Рассмотрим, например, решения уравнения (3.3), в которых величины  $\dot{u}_{11, n, m+1/2}$  ( $n \in [1, N-1]$ ,  $m \in [0, M-1]$ ) одинаковы на гранях с одинаковым номером  $n$ , т.е. зависят лишь от номера  $n$  и не зависят от номера  $m$ :

$$\dot{u}_{11, n, m+1/2} = u_n, \quad n \in [1, N-1], \quad m \in [0, M-1].$$

Полагая в (3.3)

$$\delta \dot{u}_{11, n, m+1/2} = \delta u_n, \quad n \in [1, N-1], \quad m \in [0, M-1]$$

и приравнявая нулю коэффициенты при  $\delta u_n$ , находим, что рассматриваемые решения будут обладать свойством

$$\sum_{m=0}^{M-1} [F_{11, n, m+1/2} + (\dot{u}_{11}^0 + \frac{1}{2}\dot{u}_{11}^1)_{n-1/2, m+1/2} + (-\dot{u}_{11}^0 + \frac{1}{2}\dot{u}_{11}^1)_{n+1/2, m+1/2}] = 0,$$

$$n \in [1, N-1]$$

и, следовательно, согласно (4.1) невязки  $\widehat{F}_{11, n, m+1/2}$ , ( $n \in [1, N-1]$ ,  $m \in [0, M-1]$ ) на гранях с одинаковым номером  $n$  будут самоуравновешены. Аналогично можно получать самые разнообразные варианты изменения смещений, приводящие к самоуравновешенным невязкам.

## 5. Итерационное решение одномерных задач методом самоуравновешенных невязок

В случае, когда смещения зависят только от одной переменной, двумерная задача вырождается в одномерную.

Для одномерной задачи уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}(\sigma_{n+1} + \sigma_n) = u_{n+1} - u_n, \quad \sigma_{n+1} - \sigma_n = 0, \quad n \in [0, N-1], \quad (5.1)$$

где  $\sigma_n$ ,  $u_n$  ( $n \in [0, N]$ ) — безразмерные напряжения и смещения. Полагаем, что граничные условия заданы в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad (1-z)(u_N - \widehat{u}_N) + z(\sigma_N - \widehat{\sigma}_N) = 0, \\ \widehat{u}_N &= 1, \quad \widehat{\sigma}_N = \frac{1}{N}, \quad z = 0 \text{ или } 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Решению задачи (5.1), (5.2) соответствует минимум функционала

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (u_{n+1} - u_n)^2 - z \widehat{\sigma}_N u_N,$$

где  $u_0 = 0$  и, если  $z = 0$ , то  $u_N = \widehat{u}_N$ .

В одномерном случае невязки (3.2), (4.1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} F_n &= -(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), & F_N &= z(u_N - u_{N-1} - \widehat{\sigma}_N), \\ \widehat{F}_n &= F_n - (\dot{u}_{n+1} - 2\dot{u}_n + \dot{u}_{n-1}), & \widehat{F}_N &= z(\dot{u}_N - \dot{u}_{N-1}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

а вариационное уравнение — в виде

$$\sum_{n=1}^{N-1} (\dot{u}_{n+1} - 2\dot{u}_n + \dot{u}_{n-1} - F_n) \delta \dot{u}_n - (\dot{u}_N - \dot{u}_{N-1} + F_N) \delta \dot{u}_N = 0, \quad (5.4)$$

где  $\dot{u}_0 = 0$  и, если  $z = 0$ , то  $\dot{u}_N = \delta \dot{u}_N$ . Точное решение задачи (5.1), (5.2) имеет вид

$$u_n = \frac{n}{N}, \quad n \in [0, N]. \quad (5.5)$$

Итерационное решение задачи (5.1), (5.2) в случае  $z = 0$ ,  $N = 20$  рассматривалось Самарским [7]. Было найдено, что при начальном приближении

$$u_0 = u_1 = \dots = u_{N-1} = 0, \quad u_N = 1 \quad (5.6)$$

для получения достаточно точного решения итерационным методом с чебышевским набором параметров требуется несколько десятков итераций (64 итерации при  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

В случае  $z = 0$ ,  $N = 2^k$  и начального приближения (5.6) методом самоуравновешенных невязок можно получить точное решение (5.5) задачи (5.1), (5.2) за  $k$  итераций. На рис. 3 приведены результаты вычисления этих итераций в случае  $N = 16$ . На оси абсцисс указаны номера граней элементов, цифрами 0, 1, 2, 3, 4 отмечены смещения, соответствующие начальному приближению и смещениям после 1-й, 2-й, 3-й и 4-й итераций.

Вычисления велись по следующей схеме. На первой итерации искалось решение уравнения (5.4), при котором невязки  $\widehat{F}_n$  ( $n \in [1, N-1]$ ) были бы самоуравновешены во всей области, т. е. удовлетворяли условию

$$\sum_{n=1}^{N-1} \widehat{F}_n = 0. \quad (5.7)$$

Условию (5.7) можно удовлетворить, если искать решение уравнения (5.4) в виде

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_N = 0, \quad \dot{u}_1 = \dot{u}_2 = \dots = \dot{u}_{N-1} = v. \quad (5.8)$$

Из (5.4) следует, что в случае (5.8)  $v = \frac{1}{2}$ .

На второй итерации область делилась пополам и решение уравнения (5.4) строилось так, чтобы невязки были самоуравновешены в пределах каждой из половин области.

На третьей и четвертой итерациях решения строились так, чтобы невязки были самоуравновешены в пределах каждой из  $1/4$  и  $1/8$  частей области соответственно.

Такая процедура итерационного решения будучи очень эффективной при начальном приближении (5.6) может быть мало эффективной при других начальных приближениях.

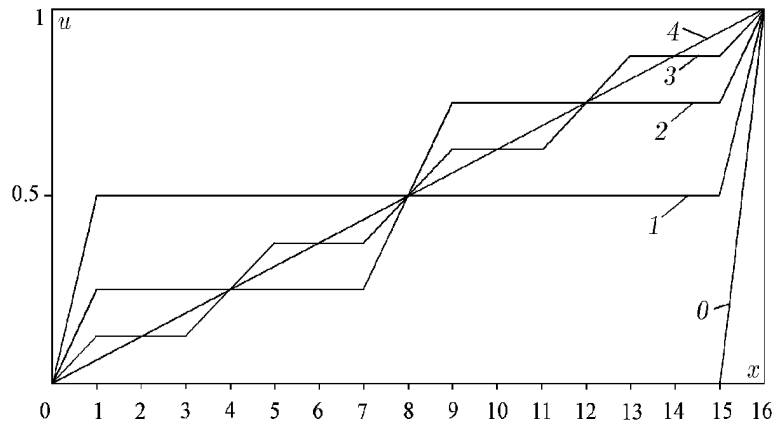


Рис. 3.

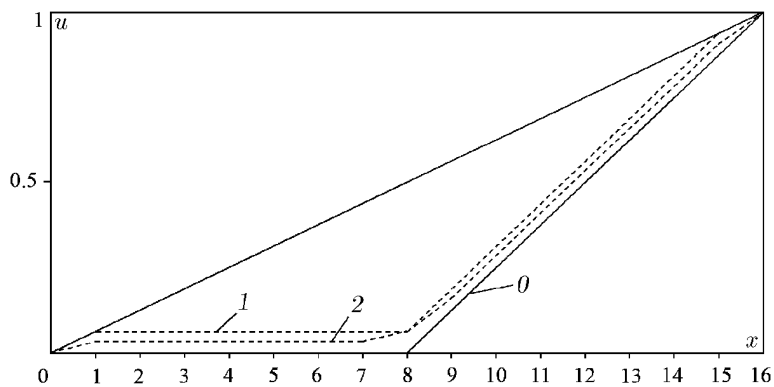


Рис. 4.

Это видно из рис. 4, на котором приведены результаты вычисления по этой процедуре первых двух итераций в случае  $z = 0$ ,  $N = 16$  при начальном приближении

$$u_0 = u_1 = \dots = u_8 = 0, \quad u_n = \frac{n-8}{8}, \quad n \in [9, 16]. \quad (5.9)$$

В случае  $z = 0$ ,  $N = 2^k$  можно при любом начальном приближении получить точное решение (5.5) задачи (5.1), (5.2) за  $k$  итераций, если вычисления вести по процедуре двустороннего расширения области самоуравновешенных невязок. По этой процедуре грань элементов, соответствующая середине области, выбирается в качестве центра области самоуравновешенных невязок. Пусть  $i$  — номер этой грани. На первом шаге считаются равными нулю все  $\dot{u}_n$ , кроме  $\dot{u}_i$ ; на втором — все  $\dot{u}_n$ , кроме  $\dot{u}_{i-1}$ ,  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{u}_{i+1}$ , которые считаются одинаковыми; на третьем шаге одинаковыми считаются  $\dot{u}_{i-2}$ ,  $\dot{u}_{i-1}$ ,  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{u}_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+2}$ , а все остальные  $\dot{u}_n$  полагаются равными нулю. Аналогично расширяется область одинаковых величин  $\dot{u}_n$  на последующих шагах. Эти величины очевидным образом определяются из уравнения (5.4). При этом сумма невязок  $\widehat{F}_n$  в области одинаковых величин  $\dot{u}_n$  будет равна нулю и невязки внутри области будут оставаться постоянными при расширении области.

Применение этой процедуры в случае начального приближения (5.6) приводит к тем же результатам, которые представлены на рис. 3. На первой итерации процедура двухстороннего расширения области самоуравновешенных невязок применяется для всей области, на второй итерации — для каждой из половин области, на третьей — для каждой из четвертей области и т. д.



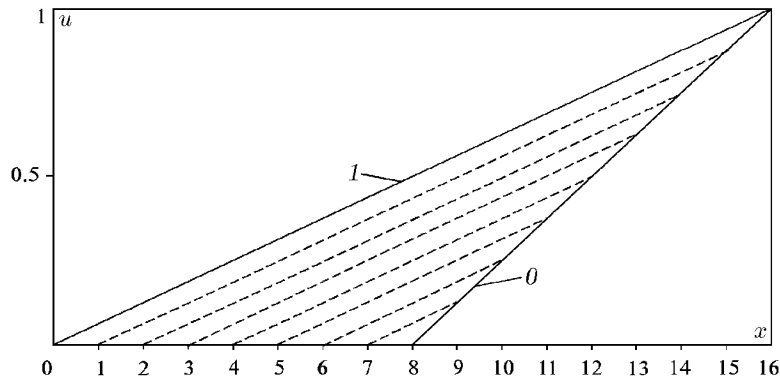


Рис. 5.

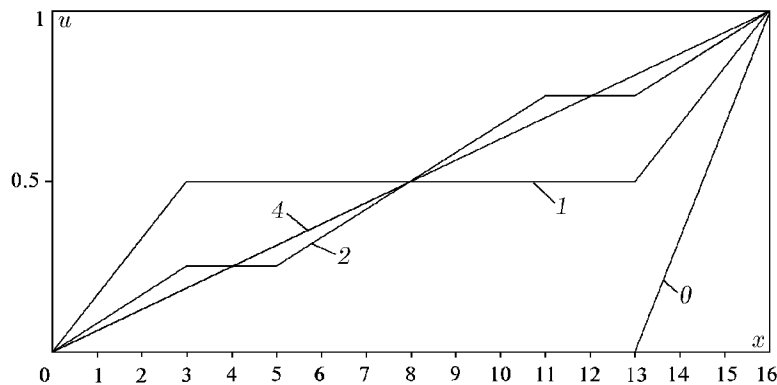


Рис. 6.

На рис. 5 приведены результаты вычислений по данной процедуре в случае  $N = 16$  и начального приближения (5.9). Видно, что при начальном приближении (5.9) уже после первой итерации получается точное решение.

На рис. 6, 7 приведены результаты вычислений по процедуре двухстороннего расширения области самоуравновешенных невязок при указанных там начальных приближениях. Эти результаты и результаты других вычислений показывают, что в случае  $z = 0$ ,  $N = 2^k$  при любом начальном приближении процедура двухстороннего расширения области самоуравновешенных невязок приводит к точному решению не более, чем за  $k$  итераций.

В случае  $z = 1$  процедура двухстороннего расширения области самоуравновешенных невязок менее эффективна, чем в случае  $z = 0$ . Это видно из рис. 8, на котором приведены результаты вычисления по этой процедуре первых четырех итераций при  $z = 1$ ,  $N = 16$  и начальном приближении

$$u_0 = u_1 = \dots = u_N = 0. \quad (5.10)$$

При  $z = 1$  можно получить точное решение (5.5) задачи (5.1), (5.2) при любом начальном приближении за одну итерацию, если вычисления вести по процедуре одностороннего расширения области самоуравновешенных невязок, начинающегося с  $x = x_N$ .

По этой процедуре на первом шаге считаются равными нулю все  $\dot{u}_n$ , кроме  $\dot{u}_N$ ; на втором — все  $\dot{u}_n$ , кроме  $\dot{u}_{N-1}$ ,  $\dot{u}_N$ , которые считаются одинаковыми; на третьем — все  $\dot{u}_n$ ,

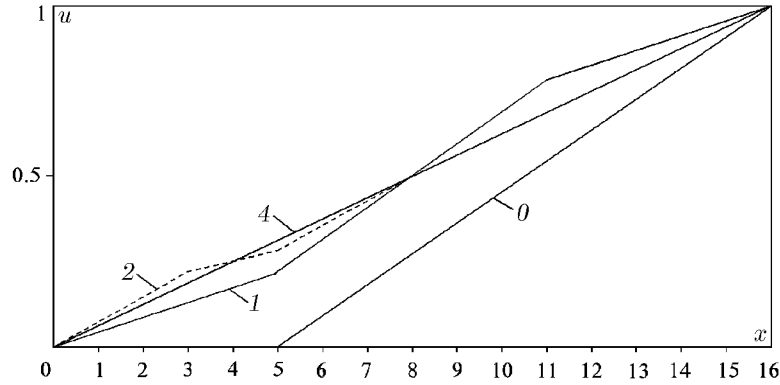


Рис. 7.

кроме  $\dot{u}_{N-2}$ ,  $\dot{u}_{N-1}$ ,  $\dot{u}_N$ . На последующих шагах расширение области проводится аналогично. Величины  $\dot{u}_n$  определяются из уравнения (5.4).

На рис. 9 приведены результаты вычислений по этой процедуре в случае  $N = 16$  и начальном приближении (5.10). Точное решение получается за одну итерацию.

Из изложенного выше следует, что задача (5.1), (5.2) в случае  $z = 0$  эффективно решается по процедуре двухстороннего расширения области самоуравновешенных невязок, а в случае  $z = 1$  — по процедуре одностороннего расширения области самоуравновешенных невязок, начинающегося с  $x = x_N$ .

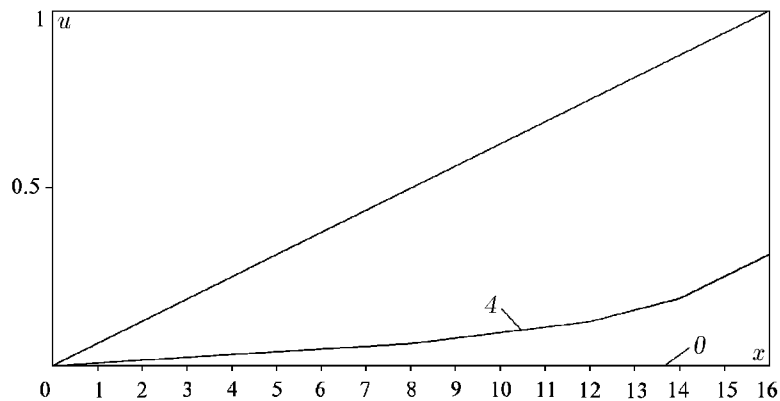


Рис. 8.

## 6. Уравнения формирования невязок, самоуравновешенных по толщине пакета слоев

Переходя к двумерному случаю, рассмотрим пакет  $m_2 - m_1 + 1$  слоев (рис. 10) с граничными условиями

$$\begin{aligned} & [(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})]_{n+1/2, m_1} = 0, \\ & [(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})]_{n+1/2, m_2} = 0, \quad n \in [0, N - 1], \\ & [(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})]_{0, m+1/2} = 0, \end{aligned}$$

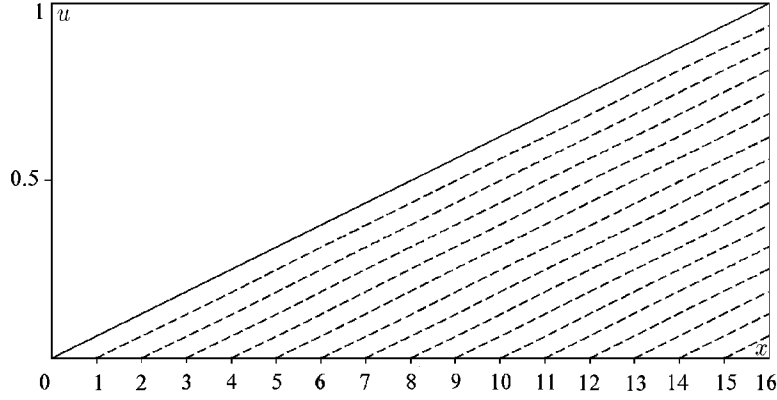


Рис. 9.

$$[(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})]_{N, m+1/2} = 0, \quad m \in [m_1, m_2 - 1],$$

где числа  $z_{i2, n+1/2, m_1}$ ,  $z_{i2, n+1/2, m_2}$  ( $n \in [0, N-1]$ ),  $z_{i1, 0, m+1/2}$ ,  $z_{i1, N, m+1/2}$  ( $m \in [m_1, m_2]$ ) равны нулю, если на соответствующих гранях элементов заданы смещения, и равны единице, если заданы усилия; величины  $\hat{u}_{ij}$ ,  $\hat{p}_{ij}$  равны заданным значениям смещений и усилий либо равны нулю, если соответствующие значения не заданы.

Для рассматриваемого пакета слоев вариационное уравнение (3.3) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=m_1}^{m_2-1} [(\dot{\tilde{u}}_{ij}^0 \delta \dot{u}_{ij}^1 + \dot{\tilde{u}}_{ij}^1 \delta \dot{u}_{ij}^0)_{n+1/2, m+1/2} + \\ & + \sum_{n=0}^N \sum_{m=m_1}^{m_2-1} (F_{i1} \delta \dot{u}_{i1})_{n, m+1/2} + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=m_1}^{m_2} (F_{i2} \delta \dot{u}_{i2})_{n+1/2, m} = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $F_{i1, n, m+1/2}$  ( $n \in [0, N]$ ,  $m \in [m_1, m_2 - 1]$ ) определяются по формулам (3.2);

$$\begin{aligned} F_{i2, n+1/2, m_1} &= \{z_{i2}[\hat{p}_{i2} - \tilde{u}_{i2}^0 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2})]\}_{n+1/2, m_1}, \\ F_{i2, n+1/2, m_2} &= \{z_{i2}[(\tilde{u}_{i2}^0 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2}) - \hat{p}_{i2})]\}_{n+1/2, m_2}, \quad n \in [0, N-1], \\ F_{i2, n+1/2, m} &= [(\tilde{u}_{i2}^0 + \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2}))]_{n+1/2, m-1/2} - \\ & - [(\tilde{u}_{i2}^0 - \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i2}^1 + c_{i2}))]_{n+1/2, m+1/2}, \quad n \in [0, N-1], \quad m \in [m_1 + 1, m_2 - 1]. \end{aligned}$$

Величины

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i1, 0, m+1/2}, \quad \dot{u}_{i1, N, m+1/2}, \quad \delta \dot{u}_{i1, 0, m+1/2}, \quad \delta \dot{u}_{i1, N, m+1/2}, \quad m \in [m_1, m_2 - 1], \\ \dot{u}_{i2, n+1/2, m_1}, \quad \dot{u}_{i2, n+1/2, m_2}, \quad \delta \dot{u}_{i2, n+1/2, m_1}, \quad \delta \dot{u}_{i2, n+1/2, m_2}, \quad n \in [0, N-1] \end{aligned}$$

должны удовлетворять условиям

$$[(1 - z_{i1})\dot{u}_{i1}]_{0, m+1/2} = [(1 - z_{i1})\delta \dot{u}_{i1}]_{0, m+1/2} = 0,$$

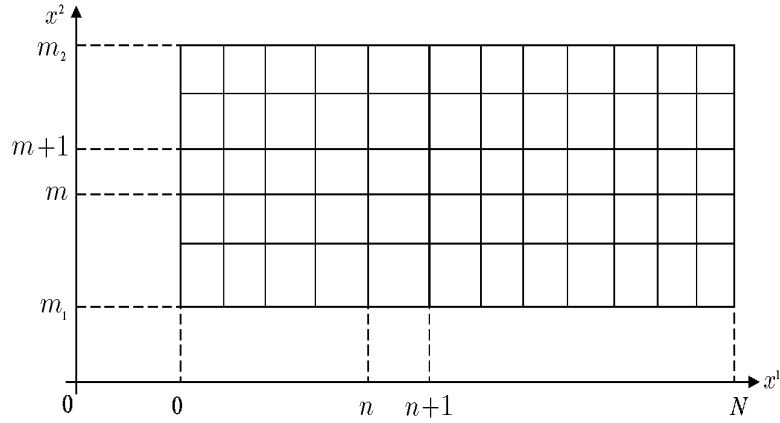


Рис. 10.

$$\begin{aligned}
[(1 - z_{i1})\dot{u}_{i1}]_{N, m+1/2} &= [(1 - z_{i1})\delta\dot{u}_{i1}]_{N, m+1/2} = 0, \quad m \in [m_1, m_2 - 1]; \\
[(1 - z_{i2})\dot{u}_{i2}]_{n+1/2, m_1} &= [(1 - z_{i2})\delta\dot{u}_{i2}]_{n+1/2, m_1} = 0, \\
[(1 - z_{i2})\dot{u}_{i2}]_{n+1/2, m_2} &= [(1 - z_{i2})\delta\dot{u}_{i2}]_{n+1/2, m_2} = 0, \quad n \in [0, N - 1].
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Формирование невязок, самоуравновешенных по толщине рассматриваемого пакета слоев, сводится к построению решения уравнения (6.1) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{u}_{11, 0, m+1/2} &= z_{11, 0, m+1/2}u_0, \quad \dot{u}_{11, n, m+1/2} = u_n, \quad n \in [1, N - 1], \\
\dot{u}_{11, N, m+1/2} &= z_{11, N, m+1/2}u_N, \quad m \in [m_1, m_2 - 1]; \\
\dot{u}_{21, 0, m+1/2} &= z_{21, 0, m+1/2}v_0, \quad \dot{u}_{21, n, m+1/2} = v_n, \quad n \in [1, N - 1], \\
\dot{u}_{21, N, m+1/2} &= z_{21, N, m+1/2}v_N, \quad m \in [m_1, m_2 - 1]; \\
\dot{u}_{12, n+1/2, m_1} &= z_{12, n+1/2, m_1}u_{n+1/2}, \quad \dot{u}_{12, n+1/2, m} = u_{n+1/2}, \quad m \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \\
\dot{u}_{12, n+1/2, m_2} &= z_{12, n+1/2, m_2}u_{n+1/2}, \quad n \in [0, N - 1]; \\
\dot{u}_{22, n+1/2, m_1} &= z_{22, n+1/2, m_1}v_{n+1/2}, \quad \dot{u}_{22, n+1/2, m} = v_{n+1/2}, \quad m \in [m_1 + 1, m_2 - 1], \\
\dot{u}_{22, n+1/2, m_2} &= z_{22, n+1/2, m_2}v_{n+1/2}, \quad n \in [0, N - 1],
\end{aligned} \tag{6.3}$$

где  $u_0, v_0, u_N, v_N, u_n, v_n, u_{n+1/2}, v_{n+1/2}, n \in [0, N - 1]$  — искомые величины.

В случае (6.3) решение вариационного уравнения (6.1) при условиях (6.2) сводится к решению системы уравнений, которая после упрощения и исключения величин  $u_{n+1/2}, v_{n+1/2}$  сводится к уравнениям следующего вида:

$$A_{n+1/2}\vec{u}_{n-1} - B_{n+1/2}\vec{u}_n + C_{n+1/2}\vec{u}_{n+1} = \vec{f}_{n+1/2}, \tag{6.4}$$

где  $\vec{u}_n = \{u_n, v_n\}, n \in [1, N - 1]$ ,

$$\vec{u}_0 = D_{1/2}\vec{u}_1 + \vec{f}_{1/2}, \quad \vec{u}_N = D_{N-1/2}\vec{u}_{N-1} + \vec{f}_{N-1/2}. \tag{6.5}$$

Решение системы уравнений (6.4), (6.5) может быть вычислено прогонкой.

## 7. Заключение

В работах [8]–[10] метод самоуравненных невязок применялся для решения некоторых задач механики деформируемого твердого тела. В [8] вариант метода самоуравненных невязок, при котором сумма невязок равна нулю в последовательно расширяющейся области, применялся для решения уравнения Пуассона с краевым условием Неймана. Высокая эффективность метода самоуравненных невязок продемонстрирована при вычислении плоских [9] и пространственных [10] равновесных форм тонких упругих стержней.

В данной статье на примере одномерных задач показана эффективность метода самоуравненных невязок в сравнении с классическими методами [7], исследовано влияние на эффективность различных вариантов выбора зон самоуравненности. Важность исследования одномерных задач обусловлена тем, что в методах расщепления решение двумерной или трехмерной задачи сводится к решению ряда одномерных задач. Для двумерной задачи предложены уравнения формирования невязок, самоуравненных по толщине пакета слоев. Эти уравнения эффективно решаются прогонкой.

В алгоритме используется вариационно-разностная формулировка задачи. Последовательность приближений строится на основе минимизации квадратичного функционала, аппроксимирующего потенциальную энергию. Рассматриваемые варианты минимизации можно интерпретировать как построение последовательностей приближенных решений разностных уравнений. В этих последовательностях сумма невязок равна нулю в последовательно расширяющейся области.

## Список литературы

- [1] SOUTHWELL R. V. *Relaxation methods in theoretical physics*. Oxford University Press, 1946.
- [2] ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., БАНИЧУК Н. В. *Вариационные задачи механики и управления*. Наука, М., 1973.
- [3] САМАРСКИЙ А. А., НИКОЛАЕВ Е. С. *Методы решения сеточных уравнений*. Наука, М., 1978.
- [4] LUSTMAN L. R., ROSE M. E. A three dimensional calculation of elastic equilibrium for composite materials. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, **26**, 1988.
- [5] ИВАНОВ Г. В., КУРГУЗОВ В. Д. Решение плоских задач упругости на основе конечных элементов с независимой аппроксимацией смещений. *Вычисл. технологии*, **2**, №4, 1997, 49–59.
- [6] ИВАНОВ Г. В. Расщепление задач упругости на основе минимизации функционала Лагранжа. *Числен. методы решения задач теории упругости и пластичности*: Материалы IX Всесоюз. конф. ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1986.
- [7] САМАРСКИЙ А. А. *Теория разностных схем*. Наука, М., 1983.
- [8] ВОЛЧКОВ Ю. М., ДЕРГИЛЕВА Л. А., ИВАНОВ Г. В. Итерационное решение задач для уравнения Пуассона методом самоуравненных невязок. В *“Динамика сплошной среды”*, вып. 2, 1991.

- [9] Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление плоских равновесных форм тонких стержней методом самоуравновешенных невязок. *ПМТФ*, №2, 1994.
- [10] Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление пространственных равновесных форм тонких упругих стержней методом самоуравновешенных невязок. *Там же*, №4, 1994.

*Поступила в редакцию 22 января 1998 г.,  
в переработанном виде 2 сентября 1998 г.*