ОБОБЩЕНИЕ ИТЕРАЦИОННО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА*

А. М. Гришин, А. С. Якимов
Томский государственный университет
Томский университет систем управления и радиоэлектроники, Россия

Making use of iterational interpolation method absolutely stable difference schemes have been obtained for the solution of non-linear boundary problems of heat conduction. The approximation error has been found. The algorithm of the method is presented and the test calculation example is given for a three-dimensional parabolic equation in a cube under boundary conditions of the first and second kind.

В работах [1, 2] был предложен итерационно-интерполяционный метод (ИИМ) и устанавливается его связь с теорией сплайнов [3]. В [4] рассмотрена модификация метода для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Полученные в монографии [2] разностные схемы на основе локально-одномерной схемы расщепления [5] и ИИМ для численного решения многомерных уравнений математической физики имеют лишь суммарную погрешность аппроксимации [5], так как каждая из промежуточных разностных схем может и не аппроксимировать исходную дифференциальную задачу, однако в совокупности и в специальных нормах такая аппроксимация в конечном итоге имеет место.

В [4] на основе ИИМ и поочередного интегрирования по пространственным переменным получены однородные устойчивые явно-неявные разностные схемы с погрешностью аппроксимации в обычном смысле на равномерных сетках по пространству второго порядка точности. В последнем случае разностная схема для решения трехмерного уравнения теплопроводности условно устойчивая с ограничением на шаг по времени $\tau \leq h_3^2/(6\chi)$ (h_3 — шаг по неявному направлению x_3, $\chi = \lambda/(\rho c_p)$, χ — коэффициент температуропроводности).

Часто при решении стационарных задач методом установления и особенно трехмерных уравнений математической физики необходимо, чтобы разностная схема была безусловно устойчивой, а также безытерационной, если коэффициенты переноса — постоянные величины. Цель данной работы показать, что последним требованиям отвечают разностные

*Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997 – 2000 г.", а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №96–01–00964 и 96–01–00011.

схемы, полученные на основе алгоритма ИИМ [2, 4]. Отметим, что при этом неявно использовался подход Дугласа — Рэкфорда для трехмерного уравнения теплопроводности, приведенный в монографиях [6, 7].

1. Алгоритм метода

С целью простоты дальнейших выкладок логическую схему метода приведем для уравнения теплопроводности с постоянными теплофизическими коэффициентами внутри параллелепипеда $R = \{x = (x_1, x_2, x_3),\ 0 < x_m < d_m,\ m = 1, 2, 3\}$ при $0 < t \le t_k$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{m=1}^{3} c_m \frac{\partial^2 T}{\partial x_m^2} + f(x, t)\,. \tag{1.1}$$

Для построения разностного аналога уравнения (1.1) введем сетку с координатами узлов $x_{1,i} = ih_1$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$, $x_{2,j} = jh_2$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, M)$, $x_{3,k} = kh_3$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, L)$, $t_n = n\tau$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

При написании операторов разностных схем вводятся $n+1/3$, $n+2/3$ — промежуточные (формальные) слои и n, $n+1$ — начальный и конечный (фактические) слои по времени t, при этом шаг на каждом слое предполагается целым и равным τ.

Используя результаты работы [4], введем следующие обозначения (точка сверху означает частную производную по времени):

$$a(t, x) = \dot{T} - c_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - c_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\,, \tag{1.2}$$

$$b(t, x) = \dot{T} - c_3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}\,, \tag{1.3}$$

$$h_{1,i-1} = x_{1,i} - x_{1,i-1}\,,\ h_{2,j-1} = x_{2,j} - x_{2,j-1}\,,\ \hbar_{1,i} = 0,5(h_{1,i-1} + h_{1,i})\,,$$

$$h_{1,i} = x_{1,i+1} - x_{1,i}\,,\ h_{3,k-1} = x_{3,k} - x_{3,k-1}\,.$$

Разностные операторы внутри области определения R взяты из [4] и имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 a_i &= [(h_1 a)_{i-1} + 4(\hbar_1 a)_i + h_{1,i} a_{i+1}]/6\hbar_{1,i}\,, \\ \Lambda_1 T_i &= c_1[(T_{i+1} - T_i)/h_{1,i} + (T_{i-1} - T_i)/h_{1,i-1}]/\hbar_{1,i}\,, \end{aligned}$$

$$i = 1, \ldots, N-1\,,\ 0 < x_m < d_m\,,\ m = 2, 3,$$

$$\begin{aligned} A_2 b_{i,j} &= [(h_2 b_i)_{j-1} + 4(\hbar_2 b_i)_j + h_{2,j} b_{i,j+1}]/6\hbar_{2,j}\,, \\ \Lambda_2 T_{i,j} &= c_2[(T_{i,j+1} - T_{i,j})/h_{2,j} + (T_{i,j-1} - T_{i,j})/h_{2,j-1}]/\hbar_{2,j}\,, \end{aligned}$$

$$i = 1, \ldots, N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ 0 < x_3 < d_3\,,$$

$$\begin{aligned} A_3 T_{i,j,k} &= [h_{3,k-1} T_{i,j,k-1} + 4\hbar_{3,k} T_{i,j,k} + h_{3,k} T_{i,j,k+1}]/6\hbar_{3,k}\,, \\ \Lambda_3 T_{i,j,k} &= c_3[(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k})/h_{3,k} + (T_{i,j,k-1} - T_{i,j,k})/h_{3,k-1}]/\hbar_{3,k}\,, \\ & i = 1, \ldots, N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Разностные операторы внутри области определения R для нового, предлагаемого ниже, подхода имеют вид

$$\begin{aligned}
A_1T &= [h_{1,i-1}T_{i-1,j,k} + 4\hbar_{1,i}T_{i,j,k} + h_{1,i}T_{i+1,j,k}]/6\hbar_{1,i}\,,\\
\Lambda_1T &= c_1[(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k})/h_{1,i} + (T_{i-1,j,k} - T_{i,j,k})/h_{1,i-1}]/\hbar_{1,i}\,,\\
A_2T &= [h_{2,j-1}T_{i,j-1,k} + 4\hbar_{2,j}T_{i,j,k} + h_{2,j}T_{i,j+1,k}]/6\hbar_{2,j}\,,\\
\Lambda_2T &= c_2[(T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k})/h_{2,j} + (T_{i,j-1,k} - T_{i,j,k})/h_{2,j-1}]/\hbar_{2,j}\,,\\
A_3T &= A_3T_{i,j,k}\,,\ \Lambda_3T = \Lambda_3T_{i,j,k}\,,\\
& i = 1,\ldots,N-1\,,\ j = 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Следуя алгоритму из [4] и используя обозначения (1.2), (1.4) для уравнения (1.1) последовательно получим:

по направлению координаты x_1

$$a = c_1\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + f$$

разностные схемы поочередного интегрирования по пространственным переменным на основе ИИМ имеют вид

$$\begin{gathered}
A_1a_i = \Lambda_1T_i^{n+1/3} + A_1f_i^n\,,\\
i = 1,\ldots,N-1\,,\ 0 < x_m < d_m\,,\ m = 2,3\,;
\end{gathered} \tag{1.6}$$

по направлению оси OX_2

$$b_i = c_2\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + a_i\,,\ i = 1,\ldots,N-1$$

разностные уравнения записываются как

$$\begin{gathered}
A_2b_{i,j} = \Lambda_2T_{i,j}^{n+2/3} + A_2a_{i,j}\,,\\
i = 1,\ldots,N-1\,,\ j = 1,\ldots,M-1\,,\ 0 < x_3 < d_3\,.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Окончательно по направлению координаты x_3

$$\dot{T}_{i,j} = c_3\frac{\partial^2 T_{i,j}}{\partial x_3^2} + b_{i,j}\,,\ i = 1,\ldots,N-1,\ j = 1,\ldots,M-1$$

разностные схемы ИИМ принимают вид

$$\begin{gathered}
A_3\dot{T}_{i,j,k} = \Lambda_3T_{i,j,k}^{n+1} + A_3b_{i,j,k}\,,\\
i = 1,\ldots,N-1\,,\ j = 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Отметим, что разностные уравнения вида, например (1.6), получаются непосредственно из логической схемы ИИМ [2]. Для получения явной зависимости разностного соотношения (1.6) от неизвестного T подставим в него значение a из (1.2); тогда получим

$$A_1\left(\dot{T}_i - c_2\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_2^2} - c_3\frac{\partial^2 T_i}{\partial x_3^2}\right) = \Lambda_1T_i^{n+1/3} + A_1f_i^n\,,$$

$$i = 1, \dots, N-1\,,\ 0 < x_m < d_m\,,\ m = 2, 3\,. \tag{1.9}$$

Из выражений (1.5), (1.9) видно, что матрица $_1$ дискретного оператора $A_1 T$ действует в направлении оси $_1$. Производные $\partial^2 T_i/\partial x_2^2$, $\partial^2 T_i/\partial x_3^2$ в (1.9) берутся от неизвестного T_i по координатам x_2, x_3, которые изменяются непрерывно. Поэтому эти производные можно вынести за знак матрицы $_1$ и аппроксимировать независимым образом через операторы $\Lambda_2 T_{i,j}$, $\Lambda_3 T_{i,j,k}$ из формул (1.4). В результате, воспользовавшись обозначениями (1.5), имеем вместо (1.9) по координатному направлению x_1 дифференциально-разностную схему ($A_1 T = A_1 T_{i,j,k}$, $\Lambda_1 T = \Lambda_1 T_{i,j,k}$, так как x_2, x_3 в интервале $0 < x_m < d_m$, $m = 2, 3$ изменяются непрерывным образом в (1.4)):

$$A_1 \dot{T} = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^n + \Lambda_3 T^n + {}_1 f^n\,,$$

$$i = 1, \dots, N-1\,,\ j = 1, \dots, M-1\,,\ k = 1, \dots, L-1\,. \tag{1.10}$$

Далее найдем $_i$ из уравнений (1.6), умножая обе его части на A_1^{-1} слева. Это можно сделать, так как матрица, соответствующая оператору, трехдиагональна: $1/6 \quad 4/6 \quad 1/6$ при $h_m =$ const, $m = 1, 2, 3$ и с диагональным преобладанием. Тогда, замечая, что $A_1^{-1}{}_1 = E$, получим

$$a_i = A_1^{-1} \Lambda_1 T_i^{n+1/3} + f_i^n\,. \tag{1.11}$$

Подставим в левую часть операторного уравнения (1.7) значение b из (1.3), а в правую — значение $_i$ из (1.11). В результате (1.7) перепишется в виде

$${}_2\left(\dot{T}_{i,j} - c_3 \frac{\partial^2 T_{i,j}}{\partial x_3^2}\right) = \Lambda_2 T_{i,j}^{n+2/3} + A_2 (A_1^{-1} \Lambda_1 T_{i,j}^{n+1/3} + f_{i,j}^n)\,,$$

$$i = 1, \dots, N-1\,,\ j = 1, \dots, M-1\,,\ 0 < x_3 < d_3\,. \tag{1.12}$$

Используя обозначения (1.5) и соотношение ${}_2 A_1^{-1} = E$, аналогично предыдущему (1.9), (1.10) получим из (1.12) ($A_2 T = A_2 T_{i,j,k}$, $\Lambda_1 T = \Lambda_1 T_{i,j,k}$, $\Lambda_2 T = \Lambda_2 T_{i,j,k}$, так как x_3 из промежутка $0 < x_3 < d_3$ изменяется непрерывно в (1.4)):

$$A_2 \dot{T} = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^{n+2/3} + \Lambda_3 T^n + A_2 f^n\,,$$

$$i = 1, \dots, N-1\,,\ j = 1, \dots, M-1\,,\ k = 1, \dots, L-1\,. \tag{1.13}$$

Наконец, подставим в правую часть уравнения (1.8) значение $b_{i,j}$, полученное из разностного соотношения (1.7) и предварительно умноженное слева на A_2^{-1}. Тогда разностная схема (1.8) перепишется в виде

$$A_3 \dot{T}_{i,j,k} = \Lambda_3 T_{i,j,k}^{n+1} + A_3 (A_2^{-1} \Lambda_2 T_{i,j,k}^{n+2/3} + A_1^{-1} \Lambda_1 T_{i,j,k}^{n+1/3} + f_{i,j,k}^n)\,. \tag{1.14}$$

Окончательно, замечая, что $A_3 A_2^{-1} = E$, $A_3 A_1^{-1} = E$, из операторного уравнения (1.14) получим при использовании выражений $A_3 T = A_3 T_{i,j,k}$, $\Lambda_3 T = \Lambda_3 T_{i,j,k}$ из (1.5):

$$A_3 \dot{T} = \Lambda_1 T^{n+1/3} + \Lambda_2 T^{n+2/3} + \Lambda_3 T^{n+1} + {}_3 f^n\,,$$

$$i = 1, \dots, N-1\,,\ j = 1, \dots, M-1\,,\ k = 1, \dots, L-1\,. \tag{1.15}$$

Таким образом, для решения трехмерного параболического уравнения (1.1) внутри области определения R найдены разностные уравнения (1.10), (1.13), (1.15), аппроксимация и устойчивость которых будет рассмотрена ниже в разделах 3 и 4.

2. Постановка задачи и метод построения разностного решения

Пусть требуется решить трехмерное параболическое уравнение[1]

$$g\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{m=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(v_m\frac{\partial T}{\partial x_m}\right) + w\sum_{\substack{m=1\\k\neq m}}^{3}\frac{\partial^2 T}{\partial x_m\partial x_k} + \sum_{m=1}^{3}u_m\frac{\partial T}{\partial x_m} + f \tag{2.1}$$

в параллелепипеде $R=\{x=(x_1,x_2,x_3),\ 0<x_m<d_m,\ m=1,2,3\}$ при $0<t\le t_k$, $w=\mathrm{const}$ с начальным условием

$$T|_{t=0} = p_0(x) \tag{2.2}$$

и с граничными значениями вида

$$\begin{aligned} T|_{x_1=d_1} &= p_1(t,d_1,x_2,x_3)\,,\\ T|_{x_2=d_2} &= p_2(t,d_2,x_1,x_3)\,,\\ T|_{x_3=d_3} &= p_3(t,d_3,x_1,x_2,)\,, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} v_1\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_1=0} &= -q_1(t,x_2,x_3)\,,\\ v_2\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)\Big|_{x_2=0} &= -q_2(t,x_1,x_3)\,,\\ v_3\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0} &= -q_3(t,x_1,x_2)\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнения типа (2.1) применяются в механике реагирующих сред [8] и в математической теории лесных пожаров [9]. В общем случае при наличии смешанных производных имеем 27-точечный шаблон в пространстве, а при отсутствии — 7-точечный крест в параллелепипеде R.

В целях краткости дальнейшего изложения, используя результаты, полученные в разделе 1, введем следующие обозначения.

Разностные операторы внутри области определения R записываются в виде

$$\begin{aligned}
A_1T &= \tau^{-1}[h_{1,i-1}(gT)_{i-1,j,k} + 4\hbar_{1,i}(gT)_{i,j,k} + h_{1,i}(gT)_{i+1,j,k}]/6\hbar_{1,i}\,,\\
A_2T &= \tau^{-1}[h_{2,j-1}(gT)_{i,j-1,k} + 4\hbar_{2,j}(gT)_{i,j,k} + h_{2,j}(gT)_{i,j+1,k}]/6\hbar_{2,j}\,,\\
A_3T &= \tau^{-1}[h_{3,k-1}(gT)_{i,j,k-1} + 4\hbar_{3,k}(gT)_{i,j,k} + h_{3,k}(gT)_{i,j,k+1}]/6\hbar_{3,k}\,,\\
\Lambda_1T &= [(v_{1,i+1,j,k}+v_{1,i,j,k})(T_{i+1,j,k}-T_{i,j,k})/h_{1,i} + (v_{1,i-1,j,k}+v_{1,i,j,k})\times\\
&\times\ (T_{i-1,j,k}-T_{i,j,k})/h_{1,i-1}]/2\hbar_{1,i}\,,\\
\Lambda_2T &= [(v_{2,i,j+1,k}+v_{2,i,j,k})(T_{i,j+1,k}-T_{i,j,k})/h_{2,j} + (v_{2,i,j-1,k}+v_{2,i,j,k})\times\\
&\times\ (T_{i,j-1,k}-T_{i,j,k})/h_{2,j-1}]/2\hbar_{2,j}\,,\\
\Lambda_3T &= [(v_{3,i,j,k+1}+v_{3,i,j,k})(T_{i,j,k+1}-T_{i,j,k})/h_{3,k} + (v_{3,i,j,k-1}+v_{3,i,j,k})\times\\
&\times\ (T_{i,j,k-1}-T_{i,j,k})/h_{3,k-1}]/2\hbar_{3,k}\,,\\
\Lambda_{1,2}T &= 2w[(T_{i+1,j+1,k}-T_{i+1,j,k}-T_{i-1,j+1,k}+T_{i-1,j,k})/h_{2,j}\,+\\
&+\ (T_{i+1,j,k}-T_{i+1,j-1,k}-T_{i-1,j,k}+T_{i-1,j-1,k})/h_{2,j-1}]/4\hbar_{1,i}\,,
\end{aligned}$$

[1]Предполагается, что краевая задача 2.1 – 2.4 корректна, т. е. ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи.

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{1,3}T &= 2w[(T_{i+1,j,k+1} - T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k+1} + T_{i-1,j,k})/h_{3,k} + \\
&+ (T_{i+1,j,k} - T_{i+1,j,k-1} - T_{i-1,j,k} + T_{i-1,j,k-1})/h_{3,k-1}]/4\hbar_{1,i}\,, \\
\Lambda_{2,3}T &= 2w[(T_{i,j+1,k+1} - T_{i,j+1,k} - T_{i,j-1,k+1} + T_{i,j-1,k})/h_{3,k} + \\
&+ (T_{i,j+1,k} - T_{i,j+1,k-1} - T_{i,j-1,k} + T_{i,j-1,k-1})/h_{3,k-1}]/4\hbar_{2,j}\,, \\
\Lambda_{1-3}T &= (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T\,, \\
\Delta_1 T &= [(u_{1,i+1,j,k} + 2u_{1,i,j,k})(T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}) + (u_{1,i-1,j,k} + 2u_{1,i,j,k}) \times \\
&\times (T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k})]/6\hbar_{1,i}, \\
\Delta_2 T &= [(u_{2,i,j+1,k} + 2u_{2,i,j,k})(T_{i,j+1,k} - T_{i,j,k}) + (u_{2,i,j-1,k} + 2u_{2,i,j,k}) \times \\
&\times (T_{i,j,k} - T_{i,j-1,k})]/6\hbar_{2,j}\,, \\
\Delta_3 T &= [(u_{3,i,j,k+1} + 2u_{3,i,j,k})(T_{i,j,k+1} - T_{i,j,k}) + (u_{3,i,j,k-1} + 2u_{3,i,j,k}) \times \\
&\times (T_{i,j,k} - T_{i,j,k-1})]/6\hbar_{3,k}\,,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$
i = 1, \ldots, N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1\,.
$$

Разностные операторы на плоскости $x_1 = 0$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
A_1 T_{x_1=0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,j,k} + (gT)_{1,j,k}]/3\,, \\
A_2 T_{x_1=0} &= \tau^{-1}[h_{2,j-1}(gT)_{0,j-1,k} + 4\hbar_{2,j}(gT)_{0,j,k} + h_{2,j}(gT)_{0,j+1,k}]/6\hbar_{2,j}\,, \\
A_3 T_{x_1=0} &= \tau^{-1}[h_{3,k-1}(gT)_{0,j,k-1} + 4\hbar_{3,k}(gT)_{0,j,k} + h_{3,k}(gT)_{0,j,k+1}]/6\hbar_{3,k}\,, \\
\Lambda_1 T_{x_1=0} &= (v_{1,0,j,k} + v_{1,1,j,k})(T_{1,j,k} - T_{0,j,k})/h_{1,0}^2\,, \\
\Lambda_2 T_{x_1=0} &= [(v_{2,0,j+1,k} + v_{2,0,j,k})(T_{0,j+1,k} - T_{0,j,k})/h_{2,j} + (v_{2,0,j-1,k} + \\
&+ v_{2,0,j,k})(T_{0,j-1,k} - T_{0,j,k})/h_{2,j-1}]/2\hbar_{2,j}\,, \\
\Lambda_3 T_{x_1=0} &= [(v_{3,0,j,k+1} + v_{3,0,j,k})(T_{0,j,k+1} - T_{0,j,k})/h_{3,k} + (v_{3,0,j,k-1} + \\
&+ v_{3,0,j,k})(T_{0,j,k-1} - T_{0,j,k})/h_{3,k-1}]/2\hbar_{3,k}\,, \\
\Lambda_{1,2} T_{x_1=0} &= 2w[(T_{1,j+1,k} - T_{1,j,k} - T_{0,j+1,k} + T_{0,j,k})/h_{2,j} + \\
&+ (T_{1,j,k} - T_{1,j-1,k} - T_{0,j,k} + T_{0,j-1,k})/h_{2,j-1}]/2h_{1,0}\,, \\
+\Lambda_{1,3} T_{x_1=0} &= 2w[(T_{1,j,k+1} - T_{1,j,k} - T_{0,j,k+1} + T_{0,j,k})/h_{3,k} + \\
&+ (T_{1,j,k} - T_{1,j,k-1} - T_{0,j,k} + T_{0,j,k-1})/h_{3,k-1}]/2h_{1,0}\,, \\
\Lambda_{2,3} T_{x_1=0} &= 2w[(T_{0,j+1,k+1} - T_{0,j+1,k} - T_{0,j-1,k+1} + T_{0,j-1,k})/ \\
&/h_{3,k} + (T_{0,j+1,k} - T_{0,j+1,k-1} - T_{0,j-1,k} + T_{0,j-1,k-1})/h_{3,k-1}]/4\hbar_{2,j}\,, \\
\Delta_1 T_{x_1=0} &= (u_{1,1,j,k} + 2u_{1,0,j,k})(T_{1,j,k} - T_{0,j,k})/3h_{1,0}\,, \\
\Delta_2 T_{x_1=0} &= [(u_{2,0,j+1,k} + 2u_{2,0,j,k})(T_{0,j+1,k} - T_{0,j,k}) + (u_{2,0,j-1,k} + \\
&+ 2u_{2,0,j,k})(T_{0,j,k} - T_{0,j-1,k})]/6\hbar_{2,j}\,, \\
\Delta_3 T_{x_1=0} &= [(u_{3,0,j,k+1} + 2u_{3,0,j,k})(T_{0,j,k+1} - T_{0,j,k}) + (u_{3,0,j,k-1} + \\
&+ 2u_{3,0,j,k})(T_{0,j,k} - T_{0,j,k-1})]/6\hbar_{3,k}\,,
\end{aligned}
$$

$$
j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1\,. \tag{2.6}
$$

На оси OX_3 $(0 < x_3 < d_3)$ пересечения плоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ при использовании обозначений $T_{x_3\neq 0}=T(x_1=0,\,x_2=0)$ операторы записываются в виде

$$
\begin{aligned}
A_1T_{x_3\neq 0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,0,k}+(gT)_{1,0,k}]/3\,,\\
A_2T_{x_3\neq 0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,0,k}+(gT)_{0,1,k}]/3\,,\\
A_3T_{x_3\neq 0} &= \tau^{-1}[h_{3,k}(gT)_{0,0,k-1}+4\hbar_{3,k}(gT)_{0,0,k}+h_{3,k}(gT)_{0,0,k+1}]/6\hbar_{3,k}\,,\\
\Lambda_1T_{x_3\neq 0} &= (v_{1,1,0,k}+v_{1,0,0,k})(T_{1,0,k}-T_{0,0,k})/h_{1,0}^2\,,\\
\Lambda_2T_{x_3\neq 0} &= (v_{2,0,1,k}+v_{2,0,0,k})(T_{0,1,k}-T_{0,0,k})/h_{1,0}^2\,,\\
\Lambda_3T_{x_3\neq 0} &= [(v_{3,0,0,k+1}+v_{3,0,0,k})(T_{0,0,k+1}-T_{0,0,k})/h_{3,k}+(v_{3,0,0,k-1}+\\
&+ v_{3,0,0,k})(T_{0,0,k-1}-T_{0,0,k})/h_{3,k-1}]/2\hbar_{3,k}\,,\\
\Lambda_{1,2}T_{x_3\neq 0} &= 2w[(T_{1,2,k}-T_{1,1,k}-T_{0,2,k}+T_{0,1,k})/h_{2,1}+\\
&+ (T_{1,1,k}-T_{1,0,k}-T_{0,1,k}+T_{0,0,k})/h_{2,0}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{1,3}T_{x_3\neq 0} &= 2w[(T_{1,0,k+1}-T_{1,0,k}-T_{0,0,k+1}+T_{0,0,k})/h_{3,k}+\\
&+ (T_{1,0,k}-T_{1,0,k-1}-T_{0,0,k}+T_{0,0,k-1})/h_{3,k-1}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{2,3}T_{x_3\neq 0} &= 2w[(T_{0,1,k+1}-T_{0,1,k}-T_{0,0,k+1}+T_{0,0,k})/h_{3,k}+\\
&+ (T_{0,1,k}-T_{0,1,k-1}-T_{0,0,k}+T_{0,0,k-1})/h_{3,k-1}]/2h_{2,0}\,,\\
\Delta_1T_{x_3\neq 0} &= (u_{1,1,0,k}+2u_{1,0,0,k})(T_{1,0,k}-T_{0,0,k})/3h_{1,0}\,,\\
\Delta_2T_{x_3\neq 0} &= (u_{2,0,1,k}+2u_{2,0,0,k})(T_{0,1,k}-T_{0,0,k})/3h_{2,0}\,,\\
\Delta_3T_{x_3\neq 0} &= [(u_{3,0,0,k+1}+2u_{3,0,0,k})(T_{0,0,k+1}-T_{0,0,k})+(u_{3,0,0,k-1}+\\
&+ 2u_{3,0,0,k})(T_{0,0,k}-T_{0,0,k-1})]/6\hbar_{3,k}\,,\ k=1,\dots,L-1\,.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

На оси OX_1 $(0<x_1<d_1)$ пересечения плоскостей $x_3=0$ и $x_2=0$ подобно операторным обозначениям (2.7) получим

$$
\begin{aligned}
A_1T_{x_1\neq 0} &= \tau^{-1}[h_{1,i-1}(gT)_{i-1,0,0}+4\hbar_{1,i}(gT)_{i,0,0}+h_{1,i}(gT)_{i+1,0,0}]/6\hbar_{1,i}\,,\\
A_2T_{x_1\neq 0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{i,0,0}+(gT)_{i,1,0}]/3\,,\\
A_3T_{x_1\neq 0} &= \tau-1[2(gT)_{i,0,0}+(gT)_{i,0,1}]/3\,,\\
\Lambda_1T_{x_1\neq 0} &= [(v_{1,i+1,0,0}+v_{1,i,0,0})(T_{i+1,0,0}-T_{i,0,0})/h_{1,i}+(v_{1,i-1,0,0}+\\
&+ v_{1,i,0,0})(T_{i-1,0,0}-T_{i,0,0})/h_{1,i-1}]/2\hbar_{1,i}\,,\\
\Lambda_2T_{x_1\neq 0} &= (v_{2,i,1,0}+v_{2,i,0,0})(T_{i,1,0}-T_{i,0,0})/h_{2,0}^2\,,\\
\Lambda_3T_{x_1\neq 0} &= (v_{3,i,0,1}+v_{3,i,0,0})(T_{i,0,1}-T_{i,0,0})/h_{3,0}^2\,,\\
\Lambda_{1,2}T_{x_1\neq 0} &= 2w[(T_{i+1,2,0}-T_{i+1,1,0}-T_{i-1,2,0}+T_{i-1,1,0})/h_{2,1}+\\
&+ (T_{i+1,1,0}-T_{i+1,0,0}-T_{i-1,1,0}+T_{i-1,0,0})/h_{2,0}]/4\hbar_{1,i}\,,\\
\Lambda_{1,3}T_{x_1\neq 0} &= 2w[(T_{i+1,0,2}-T_{i+1,0,1}-T_{i-1,0,2}+T_{i-1,0,1})/h_{3,1}+\\
&+ (T_{i+1,0,1}-T_{i+1,0,0}-T_{i-1,0,1}+T_{i-1,0,0})/h_{3,0}]/4\hbar_{1,i}\,,\\
\Lambda_{2,3}T_{x_1\neq 0} &= 2w[(T_{i,1,2}-T_{i,1,1}-T_{i,0,2}+T_{i,0,1})/h_{3,1}+\\
&+ (T_{i,1,1}-T_{i,1,0}-T_{i,0,1}+T_{i,0,0})/h_{3,0}]/2h_{2,0}\,,\\
\Delta_1T_{x_1\neq 0} &= [(u_{1,i+1,0,0}+2u_{1,i,0,0})(T_{i+1,0,0}-T_{i,0,0})+(u_{1,i-1,0,0}+\\
&+ 2u_{1,i,0,0})(T_{i,0,0}-T_{i-1,0,0})]/6\hbar_{1,i}\,,\\
\Delta_2T_{x_1\neq 0} &= (u_{2,i,1,0}+2u_{2,i,0,0})(T_{i,1,0}-T_{i,0,0})/3h_{2,0}\,,\\
\Delta_3T_{x_1\neq 0} &= (u_{3,i,0,1}+2u_{3,i,0,0})(T_{i,0,1}-T_{i,0,0})/3h_{3,0}\,,\ i=1,\dots,N-1\,.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

В вершине параллелепипеда R, совпадающей с началом координат: $x_m = 0$, $m = 1,2,3$, имеем

$$
\begin{aligned}
A_1 T_{x_m=0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,0,0} + (gT)_{1,0,0}]/3\,,\\
A_2 T_{x_m=0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,0,0} + (gT)_{0,1,0}]/3\,,\\
A_3 T_{x_m=0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,0,0} + (gT)_{0,0,1}]/3\,,\\
\Lambda_1 T_{x_m=0} &= (v_{1,1,0,0} + v_{1,0,0,0})(T_{1,0,0} - T_{0,0,0})/h_{1,0}^2\,,\\
\Lambda_2 T_{x_m=0} &= (v_{2,0,1,0} + v_{2,0,0,0})(T_{0,1,0} - T_{0,0,0})/h_{2,0}^2\,,\\
\Lambda_3 T_{x_m=0} &= (v_{3,0,0,1} + v_{3,0,0,0})(T_{0,0,1} - T_{0,0,0})/h_{3,0}^2\,,\\
\Lambda_{1,2} T_{x_m=0} &= 2w[(T_{1,2,0} - T_{1,1,0} - T_{0,2,0} + T_{0,1,0})/h_{2,1} +\\
&+ (T_{1,1,0} - T_{1,0,0} - T_{0,1,0} + T_{0,0,0})/h_{2,0}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{1,3} T_{x_m=0} &= 2w[(T_{1,0,2} - T_{1,0,1} - T_{0,0,2} + T_{0,0,1})/h_{3,1} +\\
&+ (T_{1,0,1} - T_{1,0,0} - T_{0,0,1} + T_{0,0,0})/h_{3,0}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{2,3} T_{x_m=0} &= 2w[(T_{0,1,2} - T_{0,1,1} - T_{0,0,2} + T_{0,0,1})/h_{3,1} +\\
&+ (T_{0,1,1} - T_{0,1,0} - T_{0,0,1} + T_{0,0,0})/h_{3,0}]/2h_{2,0}\,,\\
\Delta_1 T_{x_m=0} &= (u_{1,1,0,0} + 2u_{1,0,0,0})(T_{1,0,0} - T_{0,0,0})/3h_{1,0}\,,\\
\Delta_2 T_{x_m=0} &= (u_{2,0,1,0} + 2u_{2,0,0,0})(T_{0,1,0} - T_{0,0,0})/3h_{2,0}\,,\\
\Delta_3 T_{x_m=0} &= (u_{3,0,0,1} + 2u_{3,0,0,0})(T_{0,0,1} - T_{0,0,0})/3h_{3,0}\,.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Наконец, на оси OX_2 $(0 < x_2 < d_2)$ пересечения плоскостей $x_3 = 0$ и $x_1 = 0$ аналогично (2.7), (2.8) получим

$$
\begin{aligned}
A_1 T_{x_2\neq 0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,j,0} + (gT)_{1,j,0}]/3\,,\\
A_2 T_{x_2\neq 0} &= \tau^{-1}[h_{2,j-1}(gT)_{0,j-1,0} + 4\hbar_{2,j}(gT)_{0,j,0} + h_{2,j}(gT)_{0,j+1,0}]/6\hbar_{2,j}\,,\\
A_3 T_{x_2\neq 0} &= \tau^{-1}[2(gT)_{0,j,0} + (gT)_{0,j,1}]/3\,,\\
\Lambda_1 T_{x_2\neq 0} &= (v_{1,1,j,0} + v_{1,0,j,0})(T_{1,j,0} - T_{0,j,0})/h_{1,0}^2\,,\\
\Lambda_2 T_{x_2\neq 0} &= [(v_{2,0,j+1,0} + v_{2,0,j,0})(T_{0,j+1,0} - T_{0,j,0})/h_{2,j} + (v_{2,0,j-1,0} +\\
&+ v_{2,0,j,0})(T_{0,j-1,0} - T_{0,j,0})/h_{2,j-1}]/2\hbar_{2,j}\,,\\
\Lambda_3 T_{x_2\neq 0} &= (v_{3,0,j,1} + v_{3,0,j,0})(T_{0,j,1} - T_{0,j,0})/h_{3,0}^2\,,\\
\Lambda_{1,2} T_{x_2\neq 0} &= 2w[(T_{1,j+1,0} - T_{1,j,0} - T_{0,j+1,0} + T_{0,j,0})/h_{2,j} +\\
&+ (T_{1,j,0} - T_{1,j-1,0} - T_{0,j,0} + T_{0,j-1,0})/h_{2,j-1}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{1,3} T_{x_2\neq 0} &= 2w[(T_{1,j,2} - T_{1,j,1} - T_{0,j,2} + T_{0,j,1})/h_{3,1} +\\
&+ (T_{1,j,1} - T_{1,j,0} - T_{0,j,1} + T_{0,j,0})/h_{3,0}]/2h_{1,0}\,,\\
\Lambda_{2,3} T_{x_2\neq 0} &= 2w[(T_{0,j+1,2} - T_{0,j+1,1} - T_{0,j-1,2} + T_{0,j-1,1})/h_{3,1} +\\
&+ T_{0,j+1,1} - T_{0,j+1,0} - T_{0,j-1,1} + T_{0,j-1,0})/h_{3,0}]/4\hbar_{2,j}\,,\\
\Delta_1 T_{x_2\neq 0} &= (u_{1,1,j,0} + 2u_{1,0,j,0})(T_{1,j,0} - T_{0,j,0})/3h_{1,0}\,,\\
\Delta_2 T_{x_2\neq 0} &= [(u_{2,0,j+1,0} + 2u_{2,0,j,0})(T_{0,j+1,0} - T_{0,j,0}) + (u_{2,0,j-1,0} +\\
&+ 2u_{2,0,j,0})(T_{0,j,0} - T_{0,j-1,0})]/6\hbar_{2,j}\,,\\
\Delta_3 T_{x_2\neq 0} &= (u_{3,0,j,1} + 2u_{3,0,j,0})(T_{0,j,1} - T_{0,j,0})/3h_{3,0}\,,\ \ j = 1,\ldots M-1\,.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Не представляет трудности выписать по аналогии с (2.6) разностные операторы для плоскостей $x_3 = 0$ и $x_2 = 0$.

В случае переменных коэффициентов $v_m = v_m(x,t)$, $u_m = u_m(x,t)$, и $h_m \neq \text{const}$, $m = 1,2,3$, используя обозначения (2.5), получим следующую систему разностных уравнений внутри параллелепипеда R:

$$\begin{aligned} A_1(T^{n+1/3} - T^n) &= (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n + \\ &+ (\Lambda_3 + \Delta_3)T^n + (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T^n + \tau A_1 f^n\,, \qquad (2.11) \\ A_2(T^{n+2/3} - T^n) &= (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^{n+2/3} + \\ &+ (\Lambda_3 + \Delta_3)T^n + \Lambda_{1-3}T^n + \tau A_2 f^n\,, \qquad (2.12) \\ A_3(T^{n+1} - T^n) &= (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^{n+2/3} + \\ &+ (\Lambda_3 + \Delta_3)T^{n+1} + \Lambda_{1-3}T^n + \tau A_3 f^n\,, \\ i = 1,\ldots,N-1\,,\ j &= 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,. \qquad (2.13) \end{aligned}$$

Практически при исследовании устойчивости разностных схем (2.11) – (2.13) и для написания программы расчета удобно пользоваться вместо двух последних уравнений (2.12), (2.13) более простыми разностными уравнениями [6, 7]. Вычтем из второго уравнения первое, а из третьего второе, тогда вместо двух последних уравнений системы (2.11) – (2.13) получим

$$\begin{aligned} A_2T^{n+2/3} - A_1T^{n+1/3} &= (\Lambda_2 + \Delta_2)(T^{n+2/3} - T^n) + (A_2 - A_1)(T + \tau f)^n\,, \qquad (2.14) \\ A_3T^{n+1} - A_2T^{n+2/3} &= (\Lambda_3 + \Delta_3)(T^{n+1} - T^n) + (A_3 - A_2)(T + \tau f)^n\,, \\ i = 1,\ldots,N-1\,,\ j &= 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,. \qquad (2.15) \end{aligned}$$

На плоскости $x_1 = 0$ разностные уравнения при использовании обозначений (2.6) имеют вид (все разностные уравнения на границах получаются из логической схемы ИИМ [2, 4] и алгоритма из раздела 1)

$$A_1(T^{n+1/3}_{x_1=0} - T^n_{x_1=0}) = (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3}_{x_1=0} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n_{x_1=0} +$$

$$+(\Lambda_3 + \Delta_3)T^n_{x_1=0} + (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T^n_{x_1=0} + \tau A_1 f^n_{x_1=0} + 2q_{1,0,j,k}/h_{1,0}\,,$$

$$A_2T^{n+2/3}_{x_1=0} - A_1T^{n+1/3}_{x_1=0} = (\Lambda_2 + \Delta_2)(T^{n+2/3}_{x_1=0} - T^n_{x_1=0}) + (A_2 - A_1) \times (T^n_{x_1=0} + \tau f^n_{x_1=0})\,,$$

$$A_3T^{n+1}_{x_1=0} - A_2T^{n+2/3}_{x_1=0} = (\Lambda_3 + \Delta_3)(T^{n+1}_{x_1=0} - T^n_{x_1=0}) + (A_3 - A_2) \times (T^n_{x_1=0} + \tau f^n_{x_1=0})\,,$$

$$j = 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,. \qquad (2.16)$$

На оси OX_1 $(0 < x_1 < d_1)$ при помощи операторов (2.8) получим

$$A_1(T^{n+1/3}_{x_1\neq0} - T^n_{x_1\neq0}) = (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3}_{x_1\neq0} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n_{x_1\neq0} +$$

$$+(\Lambda_3 + \Delta_3)T^n_{x_1\neq0} + (\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T^n_{x_1\neq0} + \tau A_1 f^n_{x_1\neq0} + 2(q_{2,i,0,0}/h_{2,0} + q_{3,i,0,0}/h_{3,0})\,,$$

$$A_2T^{n+2/3}_{x_1\neq0} - A_1T^{n+1/3}_{x_1\neq0} = (\Lambda_2 + \Delta_2)(T^{n+2/3}_{x_1\neq0} - T^n_{x_1\neq0}) + (A_2 - A_1) \times (T^n_{x_1\neq0} + \tau f^n_{x_1\neq0})\,,$$

$$A_3T^{n+1}_{x_1\neq0} - A_2T^{n+2/3}_{x_1\neq0} = (\Lambda_3 + \Delta_3)(T^{n+1}_{x_1\neq0} - T^n_{x_1\neq0}) + (A_3 - A_2) \times (T^n_{x_1\neq0} + \tau f^n_{x_1\neq0})\,,$$

$$i = 1,\ldots,N-1\,. \qquad (2.17)$$

В начале координат $x_m = 0$, $m = 1, 2, 3$ при использовании операторов (2.9) имеем

$$A_1(T^{n+1/3}_{x_m=0} - T^n_{x_m=0}) = (\Lambda_1 + \Delta_1)T^{n+1/3}_{x_m=0} + (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n_{x_m=0} + (\Lambda_3 + \Delta_3)T^n_{x_m=0}+$$

$$+(\Lambda_{1,2} + \Lambda_{2,3} + \Lambda_{1,3})T^n_{x_m=0} + \tau A_1 f^n_{x_m} + 2\sum_{m=1}^{3} q_{m,0,0,0}/h_{m,0}\,,$$

$$A_2T^{n+2/3}_{x_m=0} - A_1T^{n+1/3}_{x_m=0} = (\Lambda_2 + \Delta_2)(T^{n+2/3}_{x_m=0} - T^n_{x_m=0}) + (A_2 - A_1)(T^n_{x_m=0} + \tau f^n_{x_m})\,,$$

$$A_3T^{n+1}_{x_m=0} - A_2T^{n+2/3}_{x_m=0} = (\Lambda_3 + \Delta_3)(T^{n+1}_{x_m=0} - T^n_{x_m=0}) + (A_3 - A_2)(T^n_{x_m=0} + \tau f^n_{x_m})\,. \qquad (2.18)$$

Не представляет труда записать разностные уравнения для осей OX_2, OX_3 и для плоскостей $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, используя операторные обозначения (2.6) – (2.10) и разностные схемы (2.16), (2.17).

На граничных плоскостях $x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$ имеем

$$\begin{array}{rcl} T^{n+1}_{N,j,k} &=& p^{n+1}_{1,j,k}\big|_{x_1=d_1}\,,\ j = 0,\ldots,M\,,\ k = 0,\ldots,L\,,\\ T^{n+1}_{i,M,k} &=& p^{n+1}_{2,i,k}\big|_{x_2=d_2}\,,\ i = 0,\ldots,N\,,\ k = 0,\ldots,L\,,\\ T^{n+1}_{i,j,L} &=& p^{n+1}_{3,i,j}\big|_{x_3=d_3}\,,\ i = 0,\ldots,N\,,\ j = 0,\ldots,M\,. \end{array} \qquad (2.19)$$

В заключение приведем типичную схему ИИМ (2.20) – (2.23) на плоскости $x_1 = d_1$ ($0 < x_m < d_m$, $m = 2, 3$) при заданном тепловом потоке q_w и $u_m = w = 0$, так как она используется при решении тестовой задачи (6.1), (6.2):

$$\begin{array}{l} T^{n+m/3}_{N,0,k} = p^{n+1}_{3,0,k}\big|_{x_1=d_1}\,,\ m = 1,2,3\,,\ k = 0,\ldots,L\,,\\ T^{n+m/3}_{N,j,0} = p^{n+1}_{3,j,0}\big|_{x_1=d_1}\,,\ m = 1,2,3\,,\ j = 0,\ldots,M, \end{array} \qquad (2.20)$$

$$T^{n+1/3}_{N,j,k}[3(v_{1,N,j,k} + v_{1,N-1,j,k})/h^2_{1,N-1} + 2g_{N,j,k}/\tau] =$$

$$= T^{n+1/3}_{N-1,j,k} \times [3(v_{1,N,j,k} + v_{1,N-1,j,k})/h^2_{1,N-1} - g_{N-1,j,k}/\tau] + 6q_{w,j,k}/h_{1,N-1}+$$

$$+\{3[(v_{2,N,j+1,k} + v_{2,N,j,k})(T_{N,j+1,k} - T_{N,j,k})/h_{2,j} + (v_{2,N,j-1,k} + v_{2,N,j,k})\times$$

$$\times(T_{N,j-1,k} - T_{N,j,k})/h_{2,j-1}]/2\hbar_{2,j} + 3[(v_{3,N,j,k+1} + v_{3,N,j,k})\times$$

$$\times(T_{N,j,k+1} - T_{N,j,k})/h_{3,k} + (v_{3,N,j,k-1} + v_{3,N,j,k})(T_{N,j,k-1} - T_{N,j,k})/h_{3,k-1}]/2\hbar_{3,k}+$$

$$+2[(gT)_{N,j,k}/\tau + f_{N,j,k}] + (gT)_{N-1,j,k}/\tau + f_{N-1,j,k}\}^n\,,$$

$$j = 1,\ldots,M-1\,,\ k = 1,\ldots,L-1\,; \qquad (2.21)$$

$$T^{n+2/3}_{N,j-1,k}[3(v_{2,N,j-1,k} + v_{2,N,j,k})/h_{2,j-1} - h_{2,j-1}g_{N,j-1,k}/\tau] - T^{n+2/3}_{N,j,k}\times$$

$$\times[3(v_{2,N,j-1,k} + v_{2,N,j,k})/h_{2,j-1} + 3(v_{2,N,j+1,k} + v_{2,N,j,k})/h_{2,j} + 4\hbar_{2,j}g_{N,j,k}/\tau]+$$

$$+T^{n+2/3}_{N,j+1,k}[3(v_{2,N,j+1,k} + v_{2,N,j,k})/h_{2,j} - h_{2,j}g_{N,j+1,k}/\tau] =$$

$$= -\{[h_{2,j-1} \times (g_{N,j-1,k}T_{N,j-1,k}/\tau + f_{N,j-1,k}) + 4\hbar_{2,j}(g_{N,j,k}T_{N,j,k}/\tau + f_{N,j,k})+$$

$$+h_{2,j}(g_{N,j+1,k}T_{N,j+1,k}/\tau + f_{N,j+1,k})]^n + 2\hbar_{2,j}[2g_{N,j,k}(T^{n+1/3}_{N,j,k} - T^n_{N,j,k})/\tau - 2f_{N,j,k}+$$

$$+g_{N-1,j,k}(T^{n+1/3}_{N-1,j,k} - T^n_{N-1,j,k})/\tau - f_{N-1,j,k}] - 3[(v_{2,N,j+1,k} + v_{2,N,j,k})(T_{N,j+1,k} - T_{N,j,k})/h_{2,j}+$$

$$+(v_{2,N,j-1,k}+v_{2,N,j,k})(T_{N,j-1,k}-T_{N,j,k})/h_{2,j-1}]^n\},$$
$$j=1,\ldots,M-1,\ k=1,\ldots,L-1; \tag{2.22}$$

$$T^{n+1}_{N,j,k-1}[3(v_{3,N,j,k-1}+v_{3,N,j,k})/h_{3,k-1}-h_{3,k-1}g_{N,j,k-1}/\tau]-$$
$$-T^{n+1}_{N,j,k}\times[3(v_{3,N,j,k-1}+v_{3,N,j,k})/h_{3,k-1}+3(v_{3,N,j,k-1}+v_{3,N,j,k})/h_{3,k}+4\hbar_{3,k}\times g_{N,j,k}/\tau]+$$
$$+T^{n+1}_{N,j,k+1}[3(v_{3,N,j,k+1}+v_{3,N,j,k})/h_{3,k}-h_{3,k}g_{N,j,k+1}/\tau]=$$
$$=-\{h_{3,k-1}[(gT)_{N,j,k-1}/\tau+f_{N,j,k-1}]+4\hbar_{3,k}[(gT)_{N,j,k}/\tau+f_{N,j,k}]+$$
$$+h_{3,k}\times[(gT)_{N,j,k+1}/\tau+f_{N,j,k+1}]\}^n-\hbar_{3,k}\{h_{2,j-1}[g_{N,j-1,k}(T^{n+2/3}_{N,j-1,k}-T^n_{N,j-1,k})/\tau-f_{N,j-1,k}]+$$
$$+4\hbar_{2,j}[g_{N,j,k}(T^{n+2/3}_{N,j,k}-T^n_{N,j,k})/\tau-f_{N,j,k}]+h_{2,j}[g_{N,j+1,k}\times(T^{n+2/3}_{N,j+1,k}-T^n_{N,j+1,k})/\tau-f_{N,j+1,k}]\}/\hbar_{2,j}+$$
$$+[3(v_{3,N,j,k+1}+v_{3,N,j,k})\times(T_{N,j,k+1}-T_{N,j,k})/h_{3,k}+3(v_{3,N,j,k-1}+v_{3,N,j,k})(T_{N,j,k-1}-T_{N,j,k})/h_{3,k-1}]^n,$$
$$j=1,\ldots,M-1,\ k=1,\ldots,L-1. \tag{2.23}$$

На остальных пяти гранях параллелепипеда R значения искомых величин T считаются известными: например, они заданы граничными условиями первого рода в виде функций от t и x_m, $m=1,2,3$.

3. Об экономичности метода

Представляет интерес число арифметических действий для нахождения разностного решения и аппроксимация. Внутри параллелепипеда R получается $S_1=(N-1)(M-1)(L-1)$ разностных уравнений (2.11) – (2.13) или (2.11), (2.14), (2.15) для определения S_1 неизвестных T.

На граничных плоскостях X_m, $m=1,2,3$ выписываются порядка $S_2=(N–1)(M–1)+(N-1)(L-1)+(M-1)(L-1)+N+M-1+L-1$ разностных схем для определения S_2 неизвестных. На граничных поверхностях $x_m=d_m$, $m=1,2,3$ имеем также $S_3=NM+NL+ML$ конечных алгебраических выражений (2.19) для определения S_3 известных функций (2.3).

Легко видеть, что расчет по однородным разностным схемам (2.11) – (2.13) экономичен (с учетом условий абсолютной устойчивости (4.9), (4.11)), так как для получения решения в узлах области определения понадобится $O(S_1)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлов R.

Если существуют ограниченные вплоть до четвертого порядка производные по пространству и второго порядка по времени, то для уравнения (2.1) локальная погрешность аппроксимации разностной схемы (2.11) – (2.13) выражается формулой $O[\sum_{\alpha=1}^3(h_{\alpha,\nu}-h_{\alpha,\nu-1})+\tau]$ ($\nu=i$ при $\alpha=1$, $\nu=j$ при $\alpha=2$, $\nu=k$ при $\alpha=3$). Для $h_m=c_m$ ($c_m=\text{const}$, $m=1,2,3$) локальная погрешность аппроксимации тех же схем — $(\tau+h_1^2+h_2^2+h_3^2)$; для $w=u_m=0$ и $v_m=c_m$ на решении задачи — $O[\tau+\sum_{m=1}^3(h_{m,q}^2-h_{m,q}h_{m,q-1}+h_{m,q-1}^2)]$ при $h_{1,i}-h_{1,i-1}=h_{2,j}-h_{2,j-1}=h_{3,k}-h_{3,k-1}$.

На граничной плоскости $x_1=0$ ($0<x_m<d_m$, $m=2,3$) локальная погрешность аппроксимации разностных уравнений (2.16) при $h_m=c_m$ — $O(\tau+h_1+h_2+h_3)$ (имеется в виду первое уравнение системы (2.16), так как остальные два уравнения необходимы для устойчивости схемы [6]). При $u_m=w=0$ и $v_m=c_m$ погрешность аппроксимации этой схемы на решении задачи $O[\tau+h_{1,0}(h_{1,0}+h_{2,j}-h_{2,j-1}+h_{3,k}-h_{3,k-1})]$.

На оси OX_1 $(0 < x_1 < d_1)$ локальная погрешность аппроксимации разностных схем (2.17) при $h_m = c_m - O(\tau + h_1 + h_2 + h_3)$, а при $u_m = w = 0$ и $v_m = c_m$ погрешность аппроксимации этой схемы на решении задачи — $O[\tau + \hbar_{1,i}(h_{1,i} - h_{1,i-1} + h_{2,0} + h_{3,0})]$.

В начале координат $x_m = 0$, $m = 1, 2, 3$ локальная погрешность аппроксимации разностных уравнений (2.18) — $O(\tau + h_{1,0} + h_{2,0} + h_{3,0})$.

Не представляет труда найти, что локальная погрешность аппроксимации разностных схем (2.21) – (2.23) при $v_m = c_m$ на решении задачи имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Начальное условие (2.2) удовлетворяется точно. Граничные уравнения (2.19) на соответствующей граничной плоскости из (2.3) аппроксимируются точно, так как они заданы от времени явно на целом слое.

4. Устойчивость по начальным данным

Для исследования устойчивости разностных схем (2.11) – (2.13) выпишем типичную схему ИИМ [1, 2] для внутренних узлов параллелепипеда R, используя соотношения (2.5), (2.11), (2.14), (2.15) и результаты пункта 1:

$$
\begin{gathered}
T^{n+1/3}_{i-1,j,k}[h_{1,i-1}g_{i-1,j,k}/\tau - 3(v_{1,i-1,j,k} + v_{1,i,j,k})/h_{1,i-1} + 2u_{1,i,j,k} + u_{1,i-1,j,k}] + \\
+T^{n+1/3}_{i,j,k}[4\hbar_{1,i}g_{i,j,k}/\tau + 3(v_{1,i-1,j,k} + v_{1,i,j,k})/h_{1,i-1} + 3(v_{1,i+1,j,k} + v_{1,i,j,k})/h_{1,i} + u_{1,i+1,j,k} - u_{1,i-1,j,k}] + \\
+T^{n+1/3}_{i+1,j,k}[h_{1,i} \times g_{i+1,j,k}/\tau - 3(v_{1,i+1,j,k} + v_{1,i,j,k})/h_{1,i} - 2u_{1,i,j,k} - u_{1,i+1,j,k}] = \\
= h_{1,i-1}(gT/\tau + f)^n_{i-1,j,k} + 4\hbar_{1,i}(gT/\tau + f)^n_{i,j,k} + h_{1,i}(gT/\tau + f)^n_{i+1,j,k} + \\
+6\hbar_{1,i}(\Lambda_2 + \Lambda_3 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Lambda_{1-3})T^n\,, \\
i = 1, \ldots, N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1;
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

$$
\begin{gathered}
T^{n+2/3}_{i,j-1,k}[h_{2,j-1}g_{i,j-1,k}/\tau - 3(v_{2,i,j-1,k} + v_{2,i,j,k})/h_{2,j-1} + 2u_{2,i,j,k} + u_{2,i,j-1,k}] + \\
+T^{n+2/3}_{i,j,k}[4\hbar_{2,j}g_{i,j,k}/\tau + 3(v_{2,i,j-1,k} + v_{2,i,j,k})/h_{2,j-1} + 3(v_{2,i,j+1,k} + v_{2,i,j,k})/h_{2,j} + u_{2,i,j+1,k} - u_{2,i,j-1,k}] + \\
+T^{n+2/3}_{i,j+1,k}[h_{2,j} \times g_{i,j+1,k}/\tau - 3(v_{2,i,j+1,k} + v_{2,i,j,k})/h_{2,j} - 2u_{2,i,j,k} - u_{2,i,j+1,k}] = \\
= 6\hbar_{2,j}\{[h_{1,i-1}(gT^{n+1/3})_{i-1,j,k}/\tau + 4\hbar_{1,i}(gT^{n+1/3})_{i,j,k}/\tau + h_{1,i} \times \\
\times (gT^{n+1/3})_{i+1,j,k}/\tau]/6\hbar_{1,i} - (\Lambda_2 + \Delta_2)T^n + (A_2 - A_1)(T + \tau f)^n\}, \\
i = 1, \ldots, N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1\,;
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

$$
\begin{gathered}
T^{n+1}_{i,j,k-1}[3(v_{3,i,j,k-1} + v_{3,i,j,k})/h_{3,k-1} - h_{3,k-1}g_{i,j,k-1}/\tau] + \\
T^{n+1}_{i,j,k} \times [3(v_{3,i,j,k-1} + v_{3,i,j,k})/h_{3,k-1} + 3(v_{3,i,j,k+1} + v_{3,i,j,k})/h_{3,k} + 4\hbar_{3,k} \times g_{i,j,k}/\tau] + \\
+T^{n+1}_{i,j,k+1}[3(v_{3,i,j,k+1} + v_{3,i,j,k})/h_{3,k} - h_{3,k}g_{i,j,k+1}/\tau] = \\
= 6\hbar_{3,k}\{[h_{2,j-1}(gT^{n+2/3})_{i,j-1,k}/\tau + 4\hbar_{2,j}(gT^{n+2/3})_{i,j,k}/\tau + h_{2,j} \times (gT^{n+2/3})_{i,j+1,k}/\tau]/6\hbar_{2,j} - \\
-(\Lambda_3 + \Delta_3)T^n + (A_3 - A_2)(T + \tau f)^n\}, \\
i = 1, \ldots N-1\,,\ j = 1, \ldots, M-1\,,\ k = 1, \ldots, L-1\,.
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

Методом Фурье в приближении замороженных коэффициентов [6, 10] можно найти условие устойчивости явно-неявных разностных уравнений (2.11) – (2.13) или (4.1) – (4.3) по начальным данным при $v_m = u_m = h_m = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, 3$, $g = 1$ и $f = 0$. Представляет интерес оценки величины η — множителя роста разностных схем ИИМ (4.1) – (4.3). Сделаем стандартную подстановку [10]:

$$T^{n+1} = \eta T^n\,,\ T^n_{i,j,k} = \exp[I(g_1 x_{1,i} + g_2 x_{2,j} + g_3 x_{3,k})]\,, \tag{4.4}$$

где $I = \sqrt{-1}$, $g_m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $m = 1, 2, 3$ — гармоники при переходе со слоя на слой. Подставим (4.4) в (4.1) — (4.3) и для сокращения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$\begin{gathered} a_m = 4\tau v_m h_m^{-2} \sin^2 g_m h_m/2\,,\ b_m = \tau u_m h_m^{-1} \sin g_m h_m, \\ r_m = (1 + 2\cos^2 g_m h_m/2)/3\,,\ m = 1, 2, 3\,, \\ c_1 = \tau (h_1 h_2)^{-1} \sin g_1 h_1 \sin g_2 h_2\,,\ c_2 = \tau (h_3 h_2)^{-1} \sin g_3 h_3 \sin g_2 h_2\,, \\ c_3 = \tau (h_1 h_3)^{-1} \sin g_1 h_1 \sin g_3 h_3\,,\ c = 2w(c_1 + c_2 + c_3)\,. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Тогда по каждому из направлений получим

$$T^{n+1/3}(r_1 + a_1 - Ib_1) = T^n(r_1 - a_2 - a_3 + Ib_2 + Ib_3 - c)\,, \tag{4.6}$$

$$T^{n+2/3}(r_2 + a_2 - Ib_2) = r_1 T^{n+1/3} + T^n(r_2 - r_1 + a_2 - Ib_2)\,, \tag{4.7}$$

$$T^{n+1}(r_3 + a_3 - Ib_3) = r_2 T^{n+2/3} + T^n(r_3 - r_2 + a_3 - Ib_3)\,. \tag{4.8}$$

Выразим $T^{n+1/3}$ из (4.6) и подставим в (4.7), затем найдем $T^{n+2/3}$ из полученного соотношения и подставим в (4.8). В результате окончательно имеем уравнение для определения η

$$\eta = (A - IB)/(C - ID)\,,\ |\eta| = [(A^2 + B^2)/(C^2 + D^2)]^{0{,}5}\,, \tag{4.9}$$

где

$$A = F + s - c,\ C = F + a,\ D = E + b,\ B = E + q,\ I^2 = -1,$$

$$\begin{aligned} F &= r_3 r_2 r_1 + r_1(a_2 a_3 - b_2 b_3) + r_2(a_1 a_3 - b_1 b_3) + r_3(a_2 a_1 - \\ &- b_2 b_1) + a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3 - a_3 b_2 b_1\,, \\ s &= a_1 r_2(r_3 - r_1) + r_1 a_2(r_3 - r_2)\,, \\ a &= r_3 r_2 a_1 + r_3 a_2 r_1 + a_3 r_2 r_1\,, \\ E &= r_1(b_2 a_3 + a_2 b_3) + r_2(b_1 a_3 + a_1 b_3) + r_3(b_2 a_1 + a_2 b_1) + \\ &+ a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3\,, \\ q &= b_1 r_2(r_3 - r_1) + r_1 b_2(r_3 - r_2)\,, \\ b &= r_3 r_2 b_1 + r_3 b_2 r_1 + b_3 r_2 r_1\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Для двухслойных разностных схем необходимое условие устойчивости по начальным данным записывается [6, 10] в виде $|\eta| \le 1$. В силу того, что $|\sin g_\alpha h_\alpha| \le 1$, $|\cos g_\alpha h_\alpha| \le 1$, найдем оценки сверху для η. В частности, знаменатель будет минимален в (4.9) при $g_m h_m/2 = k\pi$ ($m = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots$). Тогда из выражений (4.5), (4.9), (4.10) имеем $r_m = 1$, $\sin g_m h_m = \sin g_m h_m/2 = 0, m = 1, 2, 3$, $s = q = c = b = a = 0$, $E = 0$, $F = 1$, $A = C = F$ и

$$|\eta| = F/F \equiv 1\,. \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.11) видно, что разностная схема (2.11) – (2.13) или (4.1) – (4.3) безусловно устойчивая $\tau > 0$. Аналогично доказывается безусловная устойчивость остальных разностных схем (2.16), (2.18), (2.21) – (2.23). При отсутствии конвективных и смешанных производных ($u_m = w = 0$, $m = 1, 2, 3$) множитель роста (4.9) совпадает с множителем роста разностной схемы ξ, полученным в [6] для трехмерного параболического уравнения при $v_m = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, 3$, $r_m = 1$, $g = 1$, $f = 0$

$$\xi = (1 + a_1a_2 + a_3a_2 + a_1a_3 + a_1a_2a_3)/[(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)]\,.$$

Как отмечено в монографии [10], способ “замораживания” коэффициентов схемы обоснован для некоторых классов параболических уравнений с гладкими коэффициентами (в ряде случаев достаточно непрерывности коэффициентов). Отметим, что критерий устойчивости, полученный этим способом, хорошо согласуется с результатами численных расчетов, приведенных ниже при решении неодномерного параболического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами переноса.

5. Устойчивость прогонки

Так как матрица коэффициентов уравнений (4.1) – (4.3) трехдиагональна, то для нахождения неизвестных воспользуемся методом скалярной прогонки [5]. Рассмотрим условия устойчивости прогонки для типичной схемы ИИМ (4.1) – (4.3), для которой имеет место диагональное преобладание. Воспользуемся сокращенной записью уравнения(4.1) при $g = v_m = u_m = h_m = \mathrm{const}$ и $f = 0$

$$AT_{i-1,j,k} + BT_{i,j,k} + CT_{i+1,j,k} = F\,, \tag{5.1}$$

где $A = -6v_1/h_1^2 + g/\tau + 3u_1/h_1$, $B = 4g/\tau + 12v_1/h_1^2$, $C = -6v_1/h_1^2 + g/\tau - 3u_1/h_1$, $F = A_1T^n + 6(\Lambda_2 + \Lambda_3 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Lambda_{1-3})T^n$; тогда оценки [5]: $A > 0$, $C > 0$, $B \geq A + C$ — для устойчивости прогонки в уравнении (5.1) дают условия

а) $$C = -6v_1/h_1^2 + g/\tau - 3u_1/h_1 > 0 \;\text{ и }\; \tau < g/(6v_1/h_1^2 + 3u_1/h_1)\,, \tag{5.2}$$

поэтому тем более $\tau < g/(6v_1/h_1^2 - 3u_1/h_1)$ при $A > 0$;

б) если решение уравнения (2.1) обладает свойством монотонности, то важно сохранение этого свойства в разностных схемах [5]. Поэтому при $A < 0$, $C < 0$ и $B \geq 0$ имеем

$$\tau > g/(6v_1/h_1^2 - 3u_1/h_1)\,. \tag{5.3}$$

Если величина конвективного переноса значительно превышает кондуктивный перенос, то для выполнения условия (5.3) целесообразно применить принцип монотонизации [5, 11] разностной схемы (5.1).

Условие (5.2) может быть практически выполнено, когда граничные условия второго рода из (2.4) ненулевые. Например, задан тепловой поток q_w большой интенсивности: $q_w > 10^6$ Вт/м^2. Последнее может приводить к частому дроблению шага по времени τ при решении задачи с заданной точностью.

Кроме того, это условие для уравнения теплопроводности не является обременительным, так как $g = \rho c_p \sim (1 - 3,8)10^6$ Дж/(м$^3\cdot$ K), $v_1 = 386$ Вт/(м$\cdot$ K) для тела, например, из меди, а шаг по пространству в трехмерном случае не удается взять менее $0,01$ м при

$d_m = 1$ м, $m = 1, 2, 3$ и двойной точности (сетка $100\times100\times100$) даже в современных ПЭВМ (Pentium 16 Мбайт) из-за наличия в общем случае 10 трехмерных массивов (v_m, u_m, g, f, T^{n+1}, T^n, $m = 1, 2, 3$) в системе разностных уравнений (2.11) – (2.13). Аналогичные оценки (5.2), (5.3) имеют место для разностных уравнений (4.2), (4.3).

6. Сходимость и пример применения метода

Сходимость разностных схем ИИМ (2.11) – (2.13) установим практически на последовательности сгущающихся сеток по τ и h_m, $m = 1, 2, 3$ при решении частного случая трехмерного уравнения (6.1) со смешанными условиями (6.2)

$$g\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3} v_\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha^2} + \{1 + \sum_{\alpha=1}^{3}[x_\alpha^z - z(z-1)v_\alpha x_\alpha^{z-2}]\}\exp(t)\,, \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}
T|_{t=0} &= r\,,\ r = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^z\,,\ T|_{x_1=0} = (1 + x_2^z + x_3^z)\exp(t)\,,\\
T|_{x_2=0} &= (1 + x_1^z + x_3^z)\exp(t)\,,\\
T|_{x_3=0} &= (1 + x_1^z + x_2^z)\exp(t)\,,\ \left.\frac{\partial T}{\partial x_1}\right|_{x_1=1} = z\exp(t)\,,\\
T|_{x_2=1} &= (2 + x_1^z + x_3^z)\exp(t)\,,\ T|_{x_3=1} = (2 + x_1^z + x_2^z)\exp(t)\,.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Для решения тестового примера воспользуемся разностными уравнениями (4.1) – (4.3), (2.20) – (2.23). Точное решение задачи (6.1), (6.2) $T = r\exp(t)$ в кубе Q: $[0 \le x_m \le 1, m = 1, 2, 3]$ известно при $0 \le t \le t_k$. Были взяты следующие значения входных данных: $h_m = h$, $v_m = 1$, $m = 1, 2, 3$, $Z = 6$, $g = 10$, $\tau = 0,002$. Программа составлена на языке Фортран-77, расчет проводился на ПЭВМ Pentium (Транслятор Power Station 1) с двойной точностью. В таблице дается максимальная относительная погрешность $\epsilon = |T - \bar{T}|100\%/T$ (T – точное, $\bar{T}$ – приближенное численное решение) в момент времени $t_k = 1$. Видно, что численное решение задачи сходится к точному при измельчении шагов разностной сетки (t_0 — расчетное время в минутах на ПЭВМ).

Т а б л и ц а

τ	$0,002$	$0,002$	$0,002$	$0,002$	$0,01$	$0,02$
h	$0,2$	$0,1$	$0,05$	$0,025$	$0,05$	$0,05$
$\epsilon, \%$	$5,23$	$1,75$	$0,458$	$0,128$	$0,658$	$2,67$
t_0	$0,9$	$1,9$	$4,75$	$30,0$	$0,75$	$0,37$

7. Заключение

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Для численного решения трехмерного нелинейного параболического уравнения общего вида на основе ИИМ получены разностные схемы с погрешностью аппроксимации в обычном смысле на равномерных сетках внутри параллелепипеда $O(\tau + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2)$.

2. При постоянных (или гладких) коэффициентах переноса разностные уравнения — безусловно устойчивые.

3. Приведена разностная схема для реализации граничного условия второго рода на плоскости, и на тестовом примере показана сходимость разностного алгоритма.

Отметим, что положительные свойства разностных схем, получаемых с помощью ИИМ (сплайн-аппроксимация искомых решений и др., возможность получения схем повышенной точности) для одномерных краевых задач, сохраняются и при решении многомерных задач. В частности, если в качестве начального приближения в логической схеме из [2] вместо линейной функции взять параболу, то для уравнения (1.1) по алгоритму ИИМ [2, 4] можно получить внутри области определения дифференциально-разностную схему с погрешностью аппроксимации $O(h_1^4 + h_2^4 + h_3^4)$.

Список литературы

[1] Гришин А. М. Об одном видоизменении метода М. Е. Швеца. *Инж.-физ. журн.*, **19**, №1, 1970, 84–93.

[2] Гришин А. М., Берцун В. Н., Зинченко В. И. *Итерационно-интерполяционный метод и его приложения.* Изд-во Томского ун-та, 1981.

[3] Алберг Д., Нильсон Э., Уолш Д. *Теория сплайнов и ее приложения.* Мир, М., 1974.

[4] Якимов А. С. Об одном методе расщепления. *Численные методы механики сплошной среды*, **16**, №2, 1985, 144–161.

[5] Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* Наука, М., 1971.

[6] Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Наука, Новосибирск, 1967.

[7] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* Мир, М., 1972.

[8] Гришин А. М., Фомин В. М. *Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред.* Наука, Новосибирск, 1984.

[9] Гришин А. М. *Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними.* Наука, Новосибирск, 1992.

[10] Калиткин Н. Н. *Численные методы.* Наука, М., 1978.

[11] Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы.* Наука, М., 1989.

Поступила в редакцию 18 декабря 1997 г.,
в переработанном виде 14 декабря 1998 г.