НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД И ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТАХ*

А. В. Костерин, Э. В. Скворцов
Казанский государственный университет, Россия
М. М. Торопова
НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева при Казанском государственном университете, Казань, Россия
e-mail: marina.toropova@ksu.ru

The method for calculating the pressure field in the rock and well productivity is suggested taking into account the strain of a non-uniform bed and the strained stress state of the enclosing rocks.

Прогнозирование эффективной разработки нефтяных месторождений осуществляется на основе моделирования процессов фильтрации в насыщенных пластах. Повышение адекватности моделей при описании этих процессов требует, в частности, совместного учета деформаций пластов и напряженно-деформированного состояния (НДС) вмещающих их горных пород. В обширной литературе по изучению фильтрации в деформируемых средах этой проблеме посвящено сравнительно небольшое число исследований [1–14]. В указанных работах анализ фильтрации в пласте под действием скважины и НДС горных пород проводился в осесимметричной постановке. В частности, в [12] построен интегральный оператор, связывающий деформации пласта в толще горных пород и давление в нем. Это дало возможность существенно упростить анализ фильтрационного течения в пласте и свести его к решению задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с коэффициентами, зависящими от упомянутого оператора [12, 13].

Известные результаты позволяют решать лишь модельные задачи и неприменимы для исследования широкого класса задач, представляющих практический интерес. К ним относятся, например, задачи фильтрации под действием системы скважин и фильтрации в пласте с переменным по его простиранию модулем упругости. В связи с этим ниже на основе развития подхода, данного в [12, 13], предложен метод расчета поля давления и продуктивности скважины при учете деформаций пласта и НДС горных пород, когда распределение давления в пласте двумерно, а модуль упругости его скелета слабо меняется

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96–01–00155.

с изменением координат точки пласта. Следует отметить, что подобная неоднородность нефтяного пласта относительно модуля его упругости тем не менее может привести к существенной перестройке поля насыщенности при двухфазной фильтрации.

С использованием двумерного преобразования Фурье построен новый интегральный оператор для нахождения деформаций пласта по известному распределению давления в нем. Включение этого блока в технологию вычислений обеспечивает ее эффективность.

Метод проиллюстрирован решением двух конкретных задач; в качестве теста использовано известное решение соответствующей задачи в осесимметричной постановке.

1. Постановка задачи о деформациях

Рассмотрим горизонтальный пористый насыщенный жидкостью пласт мощностью h, залегающий в толще горных пород на глубине H и пробуренный скважиной. Введем декартову систему координат (x, y, z), где ось z совпадает с осью скважины. Плоскость $z = H$ перпендикулярна направлению силы тяжести и совпадает со свободной поверхностью. Плоскость $z = 0$ совместим со срединной плоскостью пласта (рис. 1).

Будем считать пласт тонким $(h \ll H)$ и учитывать его деформации лишь в вертикальном направлении. При таком подходе система порода — пласт моделируется однородным упругим полупространством, ограниченным плоскостью $z = H$, с разрезом, верхняя и нижняя границы которого есть соответственно плоскости $z \to +0$ и $z \to -0$ [2]; указанное полупространство характеризуется коэффициентом Пуассона ν и модулем Юнга E.

Далее при исследовании НДС горных пород будем оперировать приращениями интересующих нас величин относительно состояния пласта с постоянным давлением в нем.

Вектор перемещения $\mathbf{u}$ удовлетворяет уравнению Ляме

$$L\mathbf{u} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0. \tag{1}$$

Граничные условия имеют вид [2]

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad (z = H), \tag{2}$$

$$[\sigma_z] = [\tau_{xz}] = [\tau_{yz}] = 0, \quad [u_x] = [u_y] = 0 \qquad (z = 0), \tag{3}$$

$$\sigma_z = c[u_z] - p \qquad (z = 0). \tag{4}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок переменной на разрезе, $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — компоненты тензора напряжений, u_z, u_x, u_y — компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}$, $c = E_1/h$, E_1 —

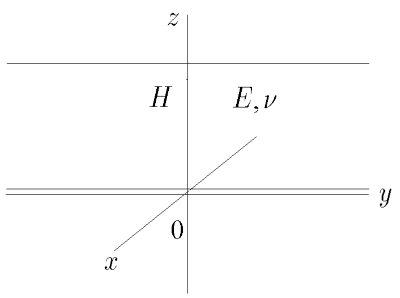

Рис. 1.

модуль Юнга скелета пласта, $p = p(x, y)$ — давление в пласте, которое подразумевается известным. Напряжения связаны с деформациями законом Гука.

Назовем краевую задачу (1) – (4) “внешней” по отношению к задаче фильтрации в пласте. Ее решение позволяет связать деформации пласта с изменением давления в нем.

2. Разложение по малому параметру

Предположим, что модуль Юнга пласта E_1 может быть представлен в виде

$$E_1 = E_0(1 + \delta e(x, y)), \quad \delta\, e(x, y) << 1, \quad E_0 = \text{const}, \tag{5}$$

где $e(x, y)$ — функция, описывающая неоднородность пласта, δ — малый параметр.

Разложим перемещение u_z и напряжение σ_z по малому параметру δ:

$$u_z = u^0 + \delta u^1, \quad \sigma_z = \sigma^0 + \delta\sigma^1. \tag{6}$$

Величины u^0, σ^0 будем называть основными, а величины u^1, σ^1 — их возмущениями.

Применяя оператор L к перемещению u_z, получим

$$Lu_z = L(u^0 + \delta u^1) = Lu^0 + \delta Lu^1 = 0,$$

и следовательно

$$Lu^0 = 0, \tag{7}$$

$$Lu^1 = 0. \tag{8}$$

Из (4), (6) следует

$$\sigma^0 + \delta\sigma^1 = \frac{E_0(1 + \delta e(x, y))}{h}[u^0 + \delta u^1] - p.$$

Поэтому

$$\sigma^0 = \frac{E_0}{h}[u^0] - p, \tag{9}$$

$$\sigma^1 = \frac{E_0}{h}[u^1] + \frac{E_0}{h}[u^0]e(x, y). \tag{10}$$

Соотношения (9), (10) показывают, что структуры внешней задачи для возмущений и основных величин совпадают, причем в задаче (8), (10) роль p играет комплекс $-[u^0]e(x, y)E_0/h$.

3. Решение внешней задачи

Внешнюю задачу для полупространства с разрезом удобно разбить на две задачи: для слоя $0 < z \leq H$ и для полупространства $-\infty < z < 0$.

Постановка первой из них такова: найти решение уравнения (1) в области $0 < z \leq H$ с граничными условиями (2) и условием $\sigma_z = \sigma^*(x, y)$ при $z \to +0$, где функция $\sigma^*(x, y)$ считается известной.

Вторая заключается в следующем: найти решение уравнения (1) в области $-\infty < z < 0$ с граничными условиями $\sigma_z = \sigma^*(x, y)$ при $z \to -0$; $\mathbf{u} \to 0$ при $z \to -\infty$.

Обе задачи решаются с применением двумерного преобразования Фурье по координатам [16]. Полученные решения связываются одно с другим с помощью еще не использованных граничных условий (3) и условия (4).

Так как касательные напряжения на разрезе пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями в поперечном направлении, то с учетом (3) и в соответствии с результатами, изложенными в [16], имеем

$$(u_z)_f^{(i)} = F_i(\alpha)\sigma_f^*, \quad i = 1, 2,$$

где нижний индекс f означает трансформанту Фурье соответствующей величины, $\alpha = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, α_1, α_2 — параметры преобразования Фурье, $F_i(\alpha)$ — известные функции [16], $i = 1$ отвечает задаче для слоя, $i = 2$ — задаче для полупространства.

Тогда трансформанта скачка вертикального перемещения на разрезе запишется в виде

$$[u_z]_f = F(\alpha)\sigma_f^*, \tag{11}$$

где $F(\alpha) = F_1(\alpha) - F_2(\alpha)$.

При $F(\alpha_1, \alpha_2) \equiv F(\alpha)$ двумерное интегральное преобразование Фурье совпадает с интегральным преобразованием Ханкеля, и для нахождения функции F, как и в осесимметричной задаче, можно использовать представление Папковича—Нейбера [16].

Далее будем считать, что пласт глубокозалегающий и отношение R/H (R — характерный размер пласта в плане) много меньше единицы. Полагая $H \to \infty$ и используя решение осесимметричной задачи [12], найдем, что $cF(\alpha) = -a/\alpha$, где $a = 4R(1-\nu^2)E_0/(Eh)$.

Для решения внешней задачи остается выполнить условия (9) и (10).

Полагая $\sigma^* = \sigma^0$, найдем в изображениях

$$\sigma_f^0 = \frac{p_f(\alpha_1, \alpha_2)}{cF(\alpha) - 1},$$

или

$$c[u^0]_f = p_f(\alpha_1, \alpha_2)\frac{cF(\alpha)}{cF(\alpha) - 1} = p_f(\alpha_1, \alpha_2)G(\alpha), \tag{12}$$

где

$$G(\alpha) = \frac{cF(\alpha)}{cF(\alpha) - 1} = \frac{a}{\alpha + a}.$$

Обратное двумерное преобразование Фурье, примененное к осесимметричной функции $G(\alpha)$, совпадает с обратным преобразованием Ханкеля. Обозначим через $g(x, y)$ оригинал для G. Тогда [15]

$$g(x, y) = \frac{a}{r} - a^2\frac{\pi}{2}\left[\mathbf{H}_0(ra) - Y_0(ra)\right],$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{H}_0$ — функция Струве, Y_0 — функция Неймана.

Возвращаясь в (12) к оригиналам, получим выражение для скачка вертикального перемещения на разрезе:

$$[u^0(x, y)] = \frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \eta)g(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi c}\iint_{\overline{\Omega}} p(\xi, \eta)g(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta = \frac{1}{c}p(x, y) * g(x, y), \tag{13}$$

где $\overline{\Omega}$ — область, ограниченная контуром питания, а символом $*$ обозначена свертка двух функций. Функция $g(x, y)$ является ядром интегрального оператора, связывающего деформации пласта с давлением в нем.

Для возмущений аналогично находим

$$[u^1]_f = F(\alpha)\sigma_f^1. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (10), в изображениях будем иметь

$$\sigma_f^1 = \frac{[p_f(\alpha_1, \alpha_2)G(\alpha)] * e_f(\alpha_1, \alpha_2)}{cF(\alpha) - 1},$$

или

$$c[u^1]_f = -[p_f(\alpha_1, \alpha_2)G(\alpha)] * e_f(\alpha_1, \alpha_2)G(\alpha).$$

Возвращаясь к оригиналам, получим

$$[u^1(x, y)] = -\left([p(x, y) * g(x, y)]e(x, y)\right) * g(x, y)/c. \tag{15}$$

Скачок общего перемещения $[u_z]$ можно найти с помощью формулы (6) и представлений (13), (15).

Заметим, что соотношение (13) имеет самостоятельное значение, поскольку дает решение внешней задачи для однородного пласта при неосесимметричном распределении давления в нем, что обобщает результаты работы [12].

4. Решение внутренней задачи

При моделировании фильтрации жидкости под действием скважины, следуя [12, 13], будем полагать, что проницаемость K есть функция его поперечной деформации $\varepsilon = [u_z]/h$. Предлагаемый подход позволяет решать задачу при произвольном числе скважин. Ниже для простоты рассматривается случай одиночной скважины.

Пусть Ω — двусвязная область в плоскости пласта, ограниченная контуром скважины Ω_i и контуром питания Ω_e.

Фильтрация однородной сжимаемой жидкости в пласте описывается системой, состоящей из нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\varepsilon)\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[K(\varepsilon)\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial y}\right] = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} \quad (x, y) \in \Omega \tag{16}$$

и интегрального соотношения

$$\varepsilon = \varepsilon(p), \tag{17}$$

где интегральный оператор $\varepsilon(p)$, связывающий деформации с давлением в пласте, построен в предыдущем пункте, κ — коэффициент пьезопроводности, t — время.

Начальные и граничные условия примем в виде

$$p(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$p(x, y, t) = p_0, \quad (x, y) \in \Omega_i,$$
$$p(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_e. \tag{18}$$

Краевая задача (16) – (18), (6), (13), (15) решалась методом конечных элементов в сочетании с методом итераций. Область Ω покрывалась прямолинейными треугольными конечными элементами с шестью узлами: тремя в вершинах треугольника и тремя в серединах его сторон [17]. Давление внутри каждого элемента представлялось квадратичной функцией координат.

В результате стандартной процедуры метода конечных элементов уравнение (16) приводилось к матричному виду

$$\mathbf{K}\mathrm{p} + \mathbf{C}\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dt}} = 0,$$

где $\mathbf{K}, \mathbf{C}$ — глобальные матрицы задачи, $\mathbf{K}$ определяется дифференциальным оператором в левой части (16), $\mathbf{C}$ — правой частью (16).

Интегрирование по времени проводилось по неявной схеме с центральной разностью Кранка — Николсона

$$\left(\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\mathbf{K}\right)\mathrm{p}^{n+1} + \left(-\frac{\mathbf{C}}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}\mathbf{K}\right)\mathrm{p}^{n} = 0,$$

где Δt_n — временной интервал.

Предполагалось, что проницаемость пласта $K(x, y)$ экспоненциально зависит от его поперечных деформаций

$$K(x, y) = K_0 \exp[-\beta\varepsilon(x, y)],$$

где β — безразмерный коэффициент пропорциональности, характеризующий чувствительность проницаемости пласта к деформациям.

На нулевой итерации проницаемость $K(x, y)$ выбиралась равной проницаемости K_0 невозмущенного пласта и далее уточнялась на последующих итерациях.

5. Результаты численных расчетов

Для иллюстрации возможностей предлагаемого метода выполнялись расчеты в случае стационарной фильтрации для области $\overline{\Omega}$ в виде круга радиуса R. Начало координат располагалось на расстоянии ζ от его центра и совпадало с центром круга радиуса r_c, соответствующего контуру скважины. Вычисления проводились при значениях $r_c = 0,1$ м, $R = 100$ м, толщине пласта $h = 10$ м, коэффициенте Пуассона $\nu = 0,2$.

При реализации метода конечных элементов контуры скважины и питания заменялись правильными многоугольниками. Для сокращения времени счета использовалась неравномерная в радиальном направлении сетка, более густая возле контура скважины. Общее количество узлов в разбиении подбиралось путем сравнения полученных результатов с известными решениями задачи для концентричной скважины [12, 13].

На рис. 2 изображены зависимости продуктивности скважины $= q/q_0$ (q — расход, q_0 — расход при $K \equiv K_0$) от параметра $\alpha = \beta p_0/E$, причем значения $\alpha > 0$ соответствуют варианту добывающей скважины (рис. 2, *а*), $\alpha < 0$ — нагнетательной (рис. 2, *б*). Кривые построены для случая $E_1 = E_0$, $E_1/E = 1$. Сплошная линия отвечает результатам для концентрично расположенной скважины, приведенным в работе [12]. Звездочками помечены значения, полученные с помощью метода, изложенного выше. Пунктирная линия построена для случая расположения скважины с эксцентриситетом $\zeta = 0,75$, штрихпунктирная — для $\zeta = 0,9$. Из рисунка видно, что продуктивность скважины повышается с ростом ее эксцентриситета и снижается с ростом перепада давления в пласте.

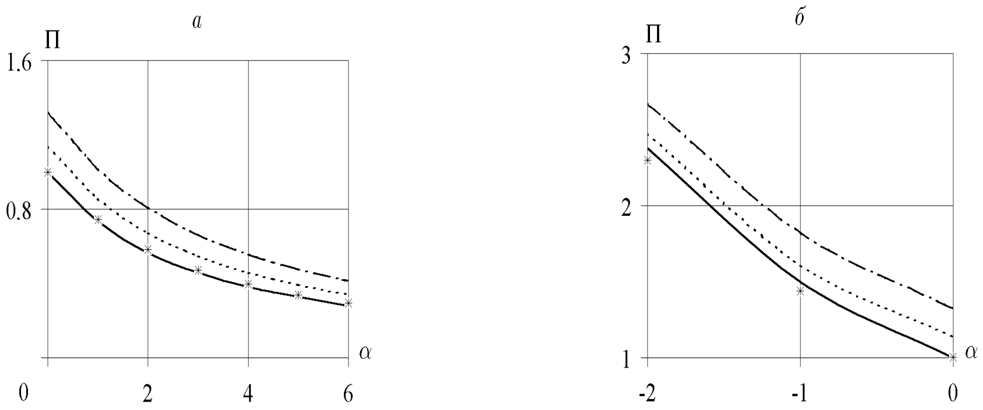

Рис. 2.

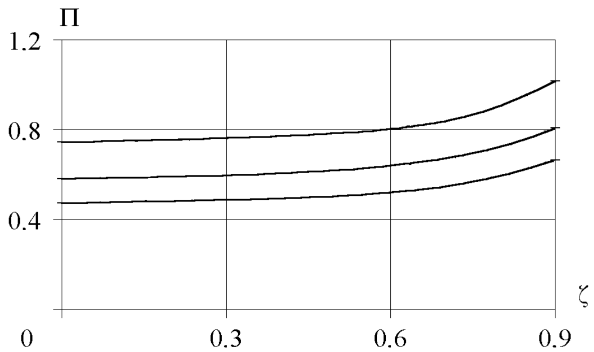

Рис. 3.

Для выбранного разбиения области фильтрации на конечные элементы расхождение с данными работы [12], несколько увеличиваясь в случае закачки, не превосходит 5.5 %.

Рис. 3 иллюстрирует зависимость продуктивности скважины от ее эксцентриситета для различных значений α. Верхняя линия соответствует случаю $\alpha = 1$, средняя — $\alpha = 2$, нижняя — $\alpha = 3$.

Определялась также чувствительность продуктивности скважины $Q = (\; - \; {}_0)/\delta$ к возмущению модуля Юнга пласта. Здесь ${}_0$ — продуктивность скважины в случае совпадения модулей упругости пласта и горных пород. Неоднородность модуля Юнга по простиранию задавалась в виде

$$e(\overline{x}, \overline{y}) = 10 \exp\left(-\left[\left(\frac{\overline{x} - \overline{d}}{0,125}\right)^2 + \left(\frac{\overline{y}}{10}\right)^2\right]\right),$$

где $\overline{x} = x/R$, $\overline{y} = y/R$, $\overline{d} = d/R$, а величина d характеризует сдвиг неоднородности модуля Юнга пласта относительно начала координат.

Расчеты проведены для скважины с эксцентриситетом $\zeta = 0.9$ при $E_0/E = 1$ и $\delta = 0.001 \cdot 2\pi$ для трех значений $\alpha = 1, 2, 3$. На рис. 4 приведены кривые зависимости чувствительности проницаемости от параметра $\overline{d}$. Нижняя кривая соответствует случаю $\alpha = 1$, средняя — $\alpha = 2$, верхняя — $\alpha = 3$. Видно, что чем ближе эпицентр неоднородности модуля Юнга пласта к скважине и чем больше значение α, тем выше чувствительность продуктивности скважины.

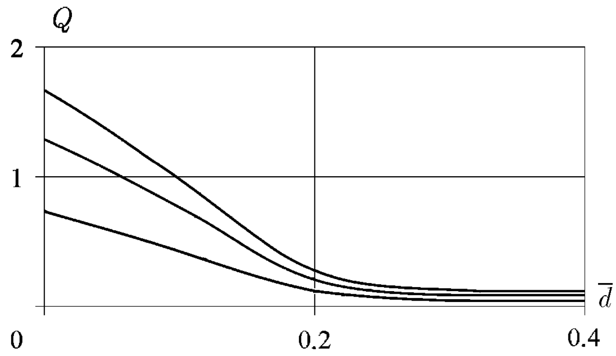

Рис. 4.

Список литературы

[1] Николаевский В. Н. К изучению нелокальных эффектов при упругом режиме фильтрации в глубинных пластах. *ПМТФ*, №4, 1968, 35–38.

[2] Ентов В. М., Малахова Т. А. Об изменении напряженно-деформированного состояния горных пород при изменении давления в насыщенном жидкостью пласте. *Изв. АН СССР. МТТ*, №6, 1974, 53–65.

[3] Ентов В. М., Малахова Т. А., Марморштейн Л. М. Влияние изменения давления в пласте на гидродинамические характеристики соседних с ним пластов. *Изв. ВУЗов. Нефть и газ*, №4, 1977, 63–65.

[4] Николаевский В. Н., Рамазанов Т. К. Напряженно-деформированное состояние горного массива при нелокально-упругом режиме фильтрации в пласте. *Изв. АН СССР. МТТ*, №3, 1977, 138–141.

[5] Зазовский А. Ф. О напряженном состоянии насыщенного жидкостью пласта в окрестности эксплуатационной скважины. *Изв. АН СССР. МТТ*, №3, 1980, 111–119.

[6] Николаевский В. Н., Рамазанов Т. К. Напряженно-деформированное состояние пласта с учетом фильтрации жидкости. *Изв. СО АН СССР. ФТПРПИ*, №5, 1982, 37–49.

[7] Николаевский В. Н. *Механика насыщенных и трещиноватых сред.* Недра, М., 1984.

[8] Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Напряженно-деформированное состояние пласта и восстановление давления в скважине. *Механика деформируемого тела. Прочность и вязкоупругопластичность.* Наука, М., 1986, 94–105.

[9] Lewis R. W., Schrefler D. A., Simoni L. Couping versus uncoupling in soil consolidation. *Int. journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, **15**, 1991, 533–548.

[10] Дияшев Р. Н., Костерин А. В., Скворцов Э. В. Влияние деформаций пласта на дебит скважины. *Разработка месторождений нефти и газа: современное состояние,*

проблемы, перспективы: Тр. Всес. школы-семинара 11–16 марта 1991. Т. 1. Звенигород, 1991, 266–270.

[11] Kosterin A. V., Scvortsov E. V., Konyukhov V. M., Dijashev J. R. Rocks and layers deformation impact on productive characteristics of well. *Int. Conf. Problems of Complex Development and Production of Hard-Accessible Oils and Natural Bitumens: Proc. Oct. 4–8. Vol. 2, Kazan*, 1994, 593–602.

[12] Дияшев Р. Н., Конюхов В. М., Костерин А. В., Скворцов Э. В. О продуктивных характеристиках скважины в деформируемом пласте, взаимодействующем с горными породами. *Изв. РАН. МЖГ*, №1, 1995, 86–93.

[13] Дияшев Р. Н., Конюхов В. М., Скворцов Э. В. Нестационарная фильтрация под действием скважины в деформируемом пласте, взаимодействующем с горными породами. *Там же*, №1, 1996, 85–90.

[14] Костерин А. В., Лебедев П. Н., Скворцов Э. В. Фильтрация в призабойной зоне нефтяного пласта с аномально высоким пластовым давлением. *Инж.-физ. журн.*, **71**, №4, 1998, 237–240.

[15] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды. Специальные функции.* Наука, М., 1983.

[16] Новацкий В. *Теория упругости.* Мир, М., 1975.

[17] Митчел Э., Уэйт Р. *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными.* Мир, М., 1981.

Поступила в редакцию 30 июня 1998 г.
в переработанном виде 1 декабря 1998 г.