ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВНУТРЕННИХ ВОЛН*

И. И. Матвеева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

The solvability of a class of boundary problems in the space quarter is studied for the system of internal waves in Boussinesque approximation. Necessary and sufficient solvability conditions in the weight Sobolev space have been obtained.

В настоящей работе изучается один класс краевых задач для системы интегро-дифференциальных уравнений, описывающей внутренние волны в приближении Буссинеска

$$\begin{gathered} D_t u_1 + D_{x_1} p = 0, \\ D_t u_2 + D_{x_2} p = 0, \\ D_t u_3 + \omega^2 \int_0^t u_3\, ds + D_{x_3} p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Система (1) является системой не типа Коши — Ковалевской. В настоящее время имеется большое число работ по исследованию уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. В 1998 г. вышла монография Г. В. Демиденко и С. В. Успенского "Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной", в которой излагаются некоторые аспекты теории краевых задач для таких уравнений и систем. В этой книге содержится обширная библиография, по которой можно познакомиться с исследованиями таких уравнений и систем в различных направлениях.

Рассмотрим следующую краевую задачу в четверти пространства $R_4^{++} = \{(t,x) :\ t>0, x' = (x_1, x_2) \in R_2, x_3 > 0\}$ для системы (1)

$$\begin{gathered} D_t u_1 + D_{x_1} p = 0, \\ D_t u_2 + D_{x_2} p = 0, \\ D_t u_3 + \omega^2 \int_0^t u_3\, ds + D_{x_3} p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \quad t > 0, \quad x \in R_3^+, \end{gathered}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №99–01–00533 и Министерства общего и профессионального образования Российской Федерации.

$$u_j|_{t=0} = u_j^0(x), \quad j = 1,2,3, \quad x \in R_3^+,$$
$$b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + b_4\int\limits_0^t p(s,x)\,ds|_{x_3=0} = 0, \quad t > 0, \quad x' \in R_2, \tag{2}$$

где $\omega > 0$ и b_i — вещественные постоянные. Будем предполагать, что краевая задача (2) удовлетворяет условию Лопатинского:

$$l(\tau,\xi') = b_4 + b_3\frac{\tau}{\sqrt{\tau+\omega^2}}|\xi'| - i(b_1\xi_1 + b_2\xi_2) \neq 0 \tag{3}$$

при $\mathrm{Re}\,\tau \geq \gamma_0 > 0$, $\xi' \in R_2\backslash\{0\}$. В работе [1] был доказан критерий выполнимости (3): условие Лопатинского (3) выполнено тогда и только тогда, когда $|b_3| + |b_4| \neq 0$, $b_3\,b_4 \geq 0$, при этом

$$|l(\tau,\xi')| \geq |b_4 + b_3\mathrm{Re}\,\frac{\tau}{\sqrt{\tau+\omega^2}}|\xi'||.$$

В рассматриваемый класс задач входят первая и вторая краевые задачи. Действительно, при $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $b_4 = 1$, дифференцируя граничное условие по t, получаем условие первой краевой задачи $p|_{x_3=0} = 0$. При $b_1 = b_2 = b_4 = 0$, $b_3 = 1$ имеем условие второй краевой задачи $u_3|_{x_3=0} = 0$.

Введем следующие весовые функциональные пространства $W_{q,\gamma}^{r_1,r_2}(R_4^{++})$ и $L_{1,\sigma}(R_3^+)$, где r_1, r_2 — целые, $1 < q < \infty$, $\gamma > 0$.

Определение. Будем говорить, что: функция $v(t,x)$ принадлежит пространству $W_{q,\gamma}^{r_1,r_2}(R_4^{++})$, если $e^{-\gamma t}v(t,x) \in W_q^{r_1,r_2}(R_4^{++})$, при этом

$$\|v(t,x),\, W_{q,\gamma}^{r_1,r_2}(R_4^{++})\| = \|D_t^{r_1}(e^{-\gamma t}v(t,x)),\, L_q(R_4^{++})\| + \sum_{|\alpha|\leq r_2}\|D_x^{\alpha}(e^{-\gamma t}v(t,x)),\, L_q(R_4^{++})\|;$$

функция $v(x)$ принадлежит пространству $L_{1,\sigma}(R_3^+)$, если $(1+|x|)^{-\sigma}v(x) \in L_1(R_3^+)$, при этом

$$\|v(x),\, L_{1,\sigma}(R_3^+)\| = \|(1+|x|)^{-\sigma}v(x),\, L_1(R_3^+)\|.$$

Вопрос о разрешимости задачи (2) в соболевских пространствах $W_{q,\gamma}^{r_1,r_2}$ изучался в [2]. В частности, был установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $u_j^0(x) \in W_q^1(R_3^+)$, $j = 1,2$, $u_3^0(x) \in W_q^1(R_3^+) \cap L_1(R_3^+)$ *и выполнены условия согласования*

$$\mathrm{div}\,u^0(x) = 0, \quad b_1u_1^0 + b_2u_2^0 + b_3u_3^0|_{x_3=0} = 0. \tag{4}$$

Если $q > 3/2$, *то краевая задача (2) имеет единственное решение*

$$u_j(t,x) \in W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++}), \quad j = 1,2,3, \quad p(t,x) \in W_{q,\gamma}^{0,2}(R_4^{++}), \quad \gamma > \gamma_0, \tag{5}$$

и выполнена оценка

$$\sum_{j=1}^{3}\|u_j(t,x),\, W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++})\| + \|p(t,x),\, W_{q,\gamma}^{0,2}(R_4^{++})\| \leq$$
$$\leq c\Big(\sum_{j=1}^{3}\|u_j^0(x),\, W_q^1(R_3^+)\| + \|u_3^0(x),\, L_1(R_3^+)\|\Big),$$

где константа $c > 0$ *не зависит от* $u^0(x)$.

Отметим, что $u_j(t,x) \in W^{1,1}_{q,\gamma}(R_4^{++})$, $\nabla p(t,x) \in W^{0,1}_{q,\gamma}(R_4^{++})$ при $q > 1$ и $u_j^0(x) \in W_q^1(R_3^+)$, $j = 1,2,3$. Ограничение на показатель суммируемости q появляется при получении оценки для функции $p(t,x)$. Возникает естественный вопрос: насколько существенно это ограничение? В настоящей работе дается ответ на этот вопрос. Для того, чтобы задача (2) была корректно разрешима в пространстве $W^{r_1,r_2}_{q,\gamma}$ при $q \le 3/2$, необходимо потребовать, чтобы функция $u_3^0(x)$ удовлетворяла дополнительному условию.

Теорема 2. *Пусть* $u_j^0(x) \in W_q^1(R_3^+)$, $j = 1,2$, $u_3^0(x) \in W_q^1(R_3^+) \cap L_{1,-1}(R_3^+)$, *и выполнены условия (4). Краевая задача (2) имеет единственное решение (5) при всех* $1 < q \le 3/2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{R_3^+} u_3^0(x)dx = 0. \tag{6}$$

Отметим, что необходимость дополнительных требований на данные типа условий ортогональности впервые была обнаружена С. А. Гальперном [3] при построении L_2-теории задачи Коши для одного класса систем не типа Коши — Ковалевской. Аналогичная особенность для смешанных краевых задач в четверти пространства была замечена Г. В. Демиденко [4]. В первом разделе построим последовательность приближенных решений краевой задачи (2). При построении этой последовательности и получении L_q-оценок для ее элементов будем следовать схеме, предложенной Г. В. Демиденко в [4] и подробно описанной в [5]. Во втором параграфе мы проведем доказательство теоремы 2.

1. Приближенные решения

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу с параметрами $\tau \in C$, $\operatorname{Re}\tau \ge \gamma_0$, $\xi' \in R_2\backslash\{0\}$

$$\begin{gathered}
\tau v_1 + i\xi_1 v_4 = f_1(\xi', x_3), \quad x_3 > 0,\\
\tau v_2 + i\xi_2 v_4 = f_2(\xi', x_3),\\
\tau v_3 + \omega^2\tau^{-1} v_3 + D_{x_3} v_4 = f_3(\xi', x_3),\\
i\xi_1 v_1 + i\xi_2 v_2 + D_{x_3} v_3 = 0,\\
b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 \tau^{-1} v_4|_{x_3=0} = 0,\\
\sup_{x_3>0}(|v_1| + |v_2| + |v_3| + |v_4|) < \infty.
\end{gathered} \tag{7}$$

Предположим, что выполнены условия согласования

$$i\xi_1 f_1(\xi', x_3) + i\xi_2 f_2(\xi', x_3) + D_{x_3} f_3(\xi', x_3) = 0, \quad b_1 f_1(\xi', 0) + b_2 f_2(\xi', 0) + b_3 f_3(\xi', 0) = 0. \tag{8}$$

Задача (7) и условия (8) получаются формальным применением преобразований Фурье по x' и Лапласа по t к краевой задаче (2) и условиям (4). Нетрудно показать, что при выполнении условия Лопатинского (3) краевая задача (7) имеет единственное решение, которое с учетом условий (8) может быть записано в виде

$$\begin{gathered}
v_1(\tau, \xi', x_3) = -i\xi_1\tau^{-1} v_4(\tau, \xi', x_3) + \tau^{-1} f_1(\xi', x_3),\\
v_2(\tau, \xi', x_3) = -i\xi_2\tau^{-1} v_4(\tau, \xi', x_3) + \tau^{-1} f_2(\xi', x_3),
\end{gathered} \tag{9}$$

$$v_3(\tau,\xi',x_3)=-\frac{\tau}{\tau^2+\omega^2}D_{x_3}v_4(\tau,\xi',x_3)+\frac{\tau}{\tau^2+\omega^2}f_3(\xi',x_3),$$

$$v_4(\tau,\xi',x_3)=\frac{\omega^2}{2\tau^2}\int\limits_{x_3}^{\infty}e^{\lambda(x_3-s)}f_3(\xi',s)\,ds-\frac{\omega^2}{2\tau^2}\int\limits_{0}^{x_3}e^{-\lambda(x_3-s)}f_3(\xi',s)\,ds-$$

$$-\frac{\omega^2}{2\tau^2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda(x_3+s)}f_3(\xi',s)\,ds+\frac{b_3\omega^2|\xi'|}{l(\tau,\xi')\tau\sqrt{\tau^2+\omega^2}}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda(x_3+s)}f_3(\xi',s)\,ds, \qquad (10)$$

где $\lambda=\dfrac{\sqrt{\tau^2+\omega^2}}{\tau}|\xi'|$. Поскольку функции $v_j(\tau,\xi',x_3)$, $j=1,\dots,4$, являются аналитическими и ограниченными по τ, $\operatorname{Re}\tau\geq\gamma_0$, в силу теоремы 5.2 из [5, гл. 1] функции

$$w_j(t,\xi',x_3)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{(i\eta+\gamma)t}v_j(i\eta+\gamma,\xi',x_n)\,d\eta,\quad j=1,\dots,4,$$

не зависят от $\gamma\geq\gamma_0$.

Перейдем к построению приближенного решения краевой задачи (2). Формальное решение этой задачи можно было бы получить, применив обратный оператор Фурье по ξ' к функциям $w_j(t,\xi',x_3)$, $j=1,\dots,4$. Однако функция $w_4(t,\xi',x_3)$ имеет неинтегрируемые особенности при $\xi'=0$. Поэтому возникает необходимость в регуляризации обратного преобразования Фурье. Для этого воспользуемся интегральным представлением С. В. Успенского [6] функций $f(x)\in L_q(R_n)$:

$$f(x)=\lim_{h\to 0}(2\pi)^{-n}\int\limits_{h}^{h^{-1}}v^{-1}\int\limits_{R_n}\int\limits_{R_n}e^{i(x-y)\xi}G(\xi v)f(y)\,d\xi\,dy\,dv, \qquad (11)$$

где $G(\xi)=2N|\xi|^{2N}\exp(-|\xi|^{2N})$, N — произвольное натуральное число.

Обозначим через $\hat{u}_3^0(\xi',x_3)$ преобразование Фурье функции $u_3^0(x)$ по x'. Пусть $f_3(\xi',x_3)=(2\pi)^{-1/2}\hat{u}_3^0(\xi',x_3)$. Определим функции

$$p_h(t,x)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{h}^{h^{-1}}v^{-1}\int\limits_{R_2}e^{i\xi'x'}G(\xi'v)w_4(t,\xi',x_3)\,d\xi'\,dv=$$

$$=(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{h}^{h^{-1}}v^{-1}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1}e^{(i\eta+\gamma)t+i\xi'x'}G(\xi'v)\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2}\int\limits_{x_3}^{\infty}e^{\lambda(x_3-s)}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv-$$

$$-(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{h}^{h^{-1}}v^{-1}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1}e^{(i\eta+\gamma)t+i\xi'x'}G(\xi'v)\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2}\int\limits_{0}^{x_3}e^{-\lambda(x_3-s)}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv-$$

$$-(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{h}^{h^{-1}}v^{-1}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1}e^{(i\eta+\gamma)t+i\xi'x'}G(\xi'v)\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda(x_3+s)}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv+$$

$$+(2\pi)^{-3/2}\int\limits_{h}^{h^{-1}} v^{-1}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1} e^{(i\eta+\gamma)t+i\xi'x'}G(\xi'v)\frac{b_3\omega^2|\xi'|}{\sqrt{2\pi}l(\tau,\xi')\tau\sqrt{\tau^2+\omega^2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(x_3+s)}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv=\sum_{k=1}^4 V_k(\tau,\xi',x_3),$$

$$u_{1,h}(t,x)=u_1^0(x)-\int\limits_0^t D_{x_1}p_h(s,x)\,ds,\quad u_{2,h}(t,x)=u_2^0(x)-\int\limits_0^t D_{x_2}p_h(s,x)\,ds,$$

$$u_{3,h}(t,x)=\cos(\omega t)u_3^0(x)-\int\limits_0^t \cos(\omega(t-s))D_{x_3}p_h(s,x)\,ds. \qquad (12)$$

Нетрудно показать, что

$$D_t u_{1,h}+D_{x_1}p_h\equiv 0,\quad D_t u_{2,h}+D_{x_2}p_h\equiv 0,$$

$$D_t u_{3,h}+\omega^2\int\limits_0^t u_{3,h}\,ds+D_{x_3}p_h\equiv 0,\quad u_{j,h}|_{t=0}=u_j^0(x),\quad j=1,2,3,$$

и в силу интегрального представления (11)

$$\|D_{x_1}u_{1,h}+D_{x_2}u_{2,h}+D_{x_3}u_{3,h},\ L_q(R_3^+)\|\to 0,\quad h\to 0,$$

$$\|b_1u_{1,h}+b_2u_{2,h}+b_3u_{3,h}+b_4\int\limits_0^t p_h(s,x)\,ds|_{x_3=0},\ L_q(R_2)\|\to 0,\quad h\to 0.$$

Поэтому вектор-функцию $(u_h(t,x),p_h(t,x))$ можно рассматривать в качестве приближенного решения краевой задачи (2).

2. Необходимые и достаточные условия разрешимости

Здесь мы установим, что условие (6) является необходимым и достаточным для разрешимости краевой задачи (2) в весовом соболевском пространстве $W_{q,\gamma}^{r_1,r_2}(R_4^{++})$ при $q\leq 3/2$. В силу теоремы 1

$$u(t,x)\in W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++}),\quad p(t,x)\in W_{q,\gamma}^{0,2}(R_4^{++})$$

при $q>3/2$. Более того,

$$u(t,x)\in W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++}),\quad \nabla p(t,x)\in W_{q,\gamma}^{0,1}(R_4^{++})$$

при $q>1$. Поэтому остается доказать, что функция $p(t,x)\in L_{q,\gamma}(R_4^{++})$ при $1<q\leq 3/2$ тогда и только тогда, когда функция $u_3^0(x)\in L_q(R_3^+)\cap L_{1,-1}(R_3^+)$ удовлетворяет условию (6).

Лемма 1. *Пусть $u_3^0(x)\in L_q(R_3^+)\cap L_{1,-1}(R_3^+)$. Для того, чтобы функция $p(t,x)\in L_{q,\gamma}(R_4^{++})$ при $q\leq 3/2$, необходимо, чтобы*

$$\int\limits_{R_3^+} u_3^0(x)dx=0.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\int\limits_{R_3^+} u_3^0(x)dx \neq 0$ и $p(t,x) \in L_{q,\gamma}(R_4^{++})$ при $q \leq 3/2$. Поскольку $\|p(t,x),\, L_{q,\gamma}(R_4^{++})\| \leq c < \infty$, тогда в силу неравенства Хаусдорфа — Юнга имеем

$$\|(2\pi)^{-1/2}\int\limits_0^\infty e^{-i\xi_3 x_3}\tilde{p}(\tau,\xi',x_3)\,dx_3,\ L_{q'}(R_4)\| \leq c < \infty, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1,$$

где

$$\tilde{p}(\tau,\xi',x_3) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{R_2} e^{-\tau t - i\xi' x'}p(t,x)\,dt\,dx', \quad \tau = i\eta+\gamma.$$

Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon>0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\varepsilon<|\xi|<1}\left|\int\limits_0^\infty e^{-i\xi_3 x_3}\tilde{p}(\tau,\xi',x_3)\,dx_3\right|^{q'}d\xi\,d\eta \leq c.$$

Очевидно, что функции

$$\tilde{u}_j(\tau,\xi',x_3) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_0^\infty\int\limits_{R_2} e^{-\tau t - i\xi' x'}u_j(t,x)\,dt\,dx', \quad j=1,2,3,$$

и функция $\tilde{p}(\tau,\xi',x_3)$ являются решениями краевой задачи (7) при

$$f_j(\xi',x_3) = (2\pi)^{-3/2}\int\limits_{R_2} e^{-i\xi' x'}u_j^0(x)\,dx', \quad j=1,2,3,$$

и определяются формулами (9), (10). Согласно (10)

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-i\xi_3 x_3}\tilde{p}(\tau,\xi',x_3)\,dx_3 = \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2}\frac{1}{\lambda - i\xi_3}\int\limits_0^\infty (e^{-i\xi_3 s}-e^{-\lambda s})\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds-$$

$$-\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2}\frac{1}{\lambda + i\xi_3}\int\limits_0^\infty e^{-i\xi_3 s}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds-$$

$$-\left(\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} - \frac{b_3\omega^2|\xi'|}{\sqrt{2\pi}l(\tau,\xi')\tau\sqrt{\tau^2+\omega^2}}\right)\frac{1}{\lambda + i\xi_3}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}\hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds.$$

В силу леммы Адамара функцию $\hat{u}_3^0(\xi',s)$ можно представить в виде

$$\hat{u}_3^0(\xi',s) = \hat{u}_3^0(0,s) + \sum_{j=1}^{2}\xi_j U_j(\xi',s),$$

где

$$U_j(\xi', s) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^1 \int\limits_{R_2} e^{-i\xi' x' \mu} (-ix_j) u_3^0(x)\, dx'\, d\mu.$$

Поскольку

$$e^{-i\xi_3 s} = 1 - i\xi_3 s \int\limits_0^1 e^{-i\xi_3 s\mu} d\mu, \quad e^{-\lambda s} = 1 - \lambda s \int\limits_0^1 e^{-\lambda s\mu} d\mu,$$

следовательно,

$$J = \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} \frac{1}{\lambda - i\xi_3} \int\limits_0^\infty \left(\lambda s \int\limits_0^1 e^{-\lambda s\mu} d\mu - i\xi_3 s \int\limits_0^1 e^{-i\xi_3 s\mu} d\mu \right) \hat{u}_3^0(\xi', s)\, ds +$$

$$+ \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} \frac{1}{\lambda + i\xi_3} \int\limits_0^\infty i\xi_3 s \int\limits_0^1 e^{-i\xi_3 s\mu} d\mu\, \hat{u}_3^0(\xi', s)\, ds - \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} \frac{1}{\lambda + i\xi_3} \int\limits_0^\infty e^{-i\xi_3 s} \sum_{j=1}^2 \xi_j U_j(\xi', s)\, ds +$$

$$+ \left(\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} - \frac{b_3 \omega^2 |\xi'|}{\sqrt{2\pi} l(\tau, \xi') \tau \sqrt{\tau^2 + \omega^2}} \right) \frac{1}{\lambda + i\xi_3} \int\limits_0^\infty \lambda s \int\limits_0^1 e^{-\lambda s\mu} d\mu \hat{u}_3^0(\xi', s)\, ds -$$

$$- \left(\frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} - \frac{b_3 \omega^2 |\xi'|}{\sqrt{2\pi} l(\tau, \xi') \tau \sqrt{\tau^2 + \omega^2}} \right) \frac{1}{\lambda + i\xi_3} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda s} \sum_{j=1}^2 \xi_j U_j(\xi', s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\lambda + i\xi_3} \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{2\pi}\tau^2} - \frac{b_3 \omega^2 |\xi'|}{\sqrt{2\pi} l(\tau, \xi') \tau \sqrt{\tau^2 + \omega^2}} \right) \int\limits_0^\infty \hat{u}_3^0(0, s)\, ds = \sum_{k=1}^6 J_k.$$

Очевидно, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{\varepsilon < |\xi| < 1} \left| \sum_{k=1}^5 J_k \right|^{q'} d\xi\, d\eta \le c \| u_3^0(x),\ L_{1,-1}(R_3^+) \|^{q'} \le c.$$

Следовательно,

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{\varepsilon < |\xi| < 1} |J_6|^{q'} d\xi\, d\eta \le c.$$

Тогда, учитывая определение $l(\tau, \xi')$, получаем

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{\varepsilon < |\xi| < 1} \left| \frac{b_4 - i(b_1\xi_1 + b_2\xi_2)}{(\lambda + i\xi_3)\tau^2 l(\tau, \xi')} \int\limits_0^\infty \hat{u}_3^0(0, s)\, ds \right|^{q'} d\xi\, d\eta \le c.$$

Отсюда

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_{\varepsilon < |\xi| < 1} \left| |\xi|^{-1} \int\limits_0^\infty \hat{u}_3^0(0, s)\, ds \right|^{q'} d\xi \le c.$$

Поскольку $q \le 3/2$, функция $|\xi|^{-q'}$ несуммируема в окрестности нуля. Следовательно, если условие (6) не выполнено, то $\int\limits_0^\infty \hat{u}_3^0(0,s)\,ds \neq 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon<|\xi|<1} \left| |\xi|^{-1} \int\limits_0^\infty \hat{u}_3^0(0,s)\,ds \right|^{q'} d\xi = \infty.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает первая часть утверждения теоремы 2. Для доказательства второй части нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $u_3^0(x) \in L_q(R_3^+) \cap L_{1,-1}(R_3^+)$ *и выполнено условие (6), тогда*

$$\|p_h(t,x),\, L_{q,\gamma}(R_4^{++})\| \le c\Big(\|u_3^0(x),\, L_q(R_3^+)\| + \|u_3^0(x),\, L_{1,-1}(R_3^+)\| \Big), \tag{13}$$

при этом

$$\|p_{h_1}(t,x) - p_{h_2}(t,x),\, L_{q,\gamma}(R_4^{++})\| \to 0, \quad h_1,\ h_2 \to 0. \tag{14}$$

Доказательство. В силу (12)

$$e^{-\gamma t} p_h(t,x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1} e^{i\eta t + i\xi' x'} G(\xi' v) v_4(\tau,\xi',x_3)\,d\eta\,d\xi'\,dv =$$

$$= \sum_{k=1}^4 (2\pi)^{-3/2} \int\limits_h^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1} e^{i\eta t + i\xi' x'} G(\xi' v) V_k(\tau,\xi',x_3)\,d\eta\,d\xi'\,dv = \sum_{k=1}^4 P_k(t,x).$$

Оценки всех слагаемых проводятся по одной схеме, поэтому мы проведем подробное доказательство только для первого слагаемого $P_1(t,x)$, которое перепишем следующим образом:

$$P_1(t,x) = (2\pi)^{-3/2} \int\limits_h^1 v^{-1} \int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1} e^{i\eta t + i\xi' x'} G(\xi' v) \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} \int\limits_{x_3}^\infty e^{\lambda(x_3-s)} \hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv +$$

$$+ (2\pi)^{-3/2} \int\limits_1^{h^{-1}} v^{-1} \int\limits_{R_2}\int\limits_{R_1} e^{i\eta t + i\xi' x'} G(\xi' v) \frac{\omega^2}{2\sqrt{2\pi}\tau^2} \int\limits_{x_3}^\infty e^{\lambda(x_3-s)} \hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds\,d\eta\,d\xi'\,dv =$$

$$= P_1^1(t,x) + P_1^2(t,x).$$

Поскольку

$$\int\limits_{x_3}^\infty e^{\lambda(x_3-s)} \hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^\infty \theta(s-x_3) e^{\lambda(x_3-s)} \theta(s) \hat{u}_3^0(\xi',s)\,ds,$$

$$\int\limits_{R_1} e^{-i\xi_3 x_3} \theta(-x_3) e^{\lambda x_3}\,dx_3 = \frac{1}{\lambda - i\xi_3}, \quad \int\limits_0^\infty e^{-\tau t} dt = 1/\tau,$$

используя формулу преобразования Фурье свертки, получаем

$$P_1^1(t,x) = c\int\limits_h^1 v^{-1} \int\limits_{R_1}\int\limits_{R_3} e^{i\eta t + i\xi x} G(\xi' v) \frac{1}{\tau(\lambda - i\xi_3)} \times$$

$$\times \int\limits_{R_1}\int\limits_{R_1} e^{-i\eta\zeta - i\xi_3 y_3} \theta(y_3)\theta(\zeta) e^{-\gamma\zeta} \hat{u}_3^0(\xi', y_3) d\zeta\, dy_3\, dx\, d\eta\, dv.$$

Нетрудно проверить, что функция $\dfrac{|\xi'| + i\xi_3}{\tau(\lambda - i\xi_3)}$ удовлетворяет условиям теоремы Лизоркина о мультипликаторах [7]. Следовательно,

$$\|P_1^1(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\| \int\limits_h^1 v^{-1} \int\limits_{R_3} e^{i\xi x} G(\xi' v)(|\xi'| + i\xi_3)^{-1} \times$$

$$\times \int\limits_{R_1} e^{-i\xi_3 y_3} \theta(y_3) \hat{u}_3^0(\xi', y_3)\, dy_3\, dx\, dv,\ L_q(R_3^+)\|.$$

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi_3 x_3} e^{-|\xi'| x_3} \theta(x_3)\, dx_3 = \frac{1}{|\xi'| + i\xi_3},$$

используя формулу обратного преобразования Фурье, в силу неравенства Минковского имеем

$$\|P_1^1(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\int\limits_h^1 v^{-1} \| \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{R_2}\int\limits_{R_2} e^{i\xi'(x'-y')} G(\xi' v) \times$$

$$\times\ \theta(x_3 - y_3) e^{-|\xi'|(x_3 - y_3)} \theta(y_3) u_3^0(y)\, d\xi'\, dy'\, dy_3,\ L_q(R_3^+)\|\, dv.$$

Применяя неравенство Юнга, получаем

$$\|P_1^1(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\int\limits_h^1 v^{-1} \| \int\limits_{R_2} e^{i\xi' x'} G(\xi' v) e^{-|\xi'| x_3} d\xi',\ L_1(R_3^+)\|\, dv\, \|u_3^0(x),\ L_q(R_3^+)\|.$$

Сделав замену $s_j = \xi_j v, \quad j = 1,2, \quad y_l = x_l/v, \quad l = 1,2,3$, получим

$$\|P_1^1(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\int\limits_h^1 dv \| \int\limits_{R_2} e^{is'y'} G(s') e^{-|s'| y_3} ds',\ L_1(R_3^+)\|\, \|u_3^0(x),\ L_q(R_3^+)\|.$$

Полагая число N в определении функции $G(s')$ достаточно большим, приходим к неравенству

$$\|P_1^1(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\|u_3^0(x),\ L_q(R_3^+)\|. \tag{15}$$

Оценим функцию $P_1^2(t,x)$. В силу условия (6)

$$\int\limits_{R_3^+} e^{-i\xi' x'} u_3^0(x)\,dx = -\int\limits_0^1 \int\limits_0^\infty \int\limits_{R_2} e^{-i\mu\xi' y'} i\xi' y' u_3^0(y', y_3)\,dy'\,dy_3\,d\mu.$$

Тогда, повторяя рассуждения, описанные выше, получаем

$$\|P_1^2(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le$$

$$\le c\sum_{k=1}^2 \int\limits_1^{h^{-1}} v^{-1} \left\| \int\limits_{R_2} e^{i\xi' x'} G(\xi' v)\xi_k e^{-|\xi'|x_3} d\xi',\ L_q(R_3^+) \right\| dv\, \|x_k u_3^0(x),\ L_1(R_3^+)\|.$$

В результате замены $s_j = \xi_j v,\quad j=1,2,\quad y_l = x_l/v,\quad l=1,2,3$, получим

$$\|P_1^2(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le$$

$$\le c\sum_{k=1}^2 \int\limits_1^{h^{-1}} v^{-4+3/q}\,dv \left\| \int\limits_{R_2} e^{is' y'} G(s') s_k e^{-|s'|y_3} ds',\ L_q(R_3^+) \right\| dv\, \|u_3^0(x),\ L_{1,-1}(R_3^+)\|.$$

Поскольку при $q>1$ интеграл $\int\limits_1^\infty v^{-4+3/q}dv$ сходится, выбирая N в определении функции $G(s')$ достаточно большим, приходим к неравенству

$$\|P_1^2(t,x), L_q(R_4^{++})\| \le c\|u_3^0(x),\ L_{1,-1}(R_3^+)\|. \tag{16}$$

Из оценок (15) и (16) следует требуемая оценка для функции $P_1(t,x)$. Проводя такие же рассуждения для функций $P_j(t,x)$, $j=2,3,4$, получаем (13). Сходимость (14) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана.

При доказательстве теоремы 1 было установлено, что для приближенного решения краевой задачи (2) имеют место оценки

$$\sum_{j=1}^3 \|u_{j,h}(t,x),\ W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++})\| + \|\nabla p_h(t,x),\ W_{q,\gamma}^{0,1}(R_4^{++})\| \le$$

$$\le c\sum_{j=1}^3 \|u_j^0(x),\ W_q^1(R_3^+)\|, \tag{17}$$

при этом

$$\sum_{j=1}^3 \|u_{j,h_1}(t,x) - u_{j,h_2}(t,x),\ W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++})\| +$$

$$+\|\nabla p_{h_1}(t,x) - \nabla p_{h_2}(t,x),\ W_{q,\gamma}^{0,1}(R_4^{++})\| \to 0, \quad h_1,\ h_2 \to 0. \tag{18}$$

В силу полноты пространства $W_{q,\gamma}^r(R_4^{++})$ из (14) и (18) вытекает существование функций $u_j(t,x) \in W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++})$, $j=1,2,3$, $p(t,x) \in W_{q,\gamma}^{0,2}(R_4^{++})$, таких, что

$$\|u_{j,h}(t,x) - u_j(t,x),\ W_{q,\gamma}^{1,1}(R_4^{++})\| \to 0,$$

$$\|p_h(t,x) - p_(t,x),\, W^{0,2}_{q,\gamma}(R^{++}_4)\| \to 0$$

при $h \to 0$. При этом из неравенств (13) и (17) вытекает оценка

$$\sum_{j=1}^{3} \|u_j(t,x),\, W^{1,1}_{q,\gamma}(R^{++}_4)\| + \|p(t,x),\, W^{0,2}_{q,\gamma}(R^{++}_4)\| \leq$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{3} \|u^0_j(x),\, W^1_q(R^+_3)\| + \|u^0_3(x),\, L_{1,-1}(R^+_3)\|\right).$$

Нетрудно показать, что полученная вектор-функция $(u(t,x), p(t,x))$ является искомым решением краевой задачи (2). Доказательство единственности в указанных классах функций затруднений не вызывает. Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за полезные дискуссии.

Список литературы

[1] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Краевые задачи в четверти пространства для систем не типа Коши — Ковалевской. *Тр. Ин-та матем. СО РАН*, **26**, 1994, 42–76.

[2] Матвеева И. И. *Краевые задачи для систем с вырожденной матрицей при производной по времени*: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 1996.

[3] Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными. *Тр. Моск. мат. о-ва*, **9**, 1960, 401–423.

[4] Демиденко Г. В. Об условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений соболевского типа. *Краевые задачи для уравнений с частными производными: Тр. семинара акад. С. Л. Соболева.* Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, Новосибирск, **1**, 1984, 23–54.

[5] Демиденко Г. В., Успенский С. В. *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной.* Науч. книга, Новосибирск, 1998.

[6] Успенский С. В. О представлении функций, определяемых одним классом гипоэллиптических операторов. *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова*, **117**, 1972, 292–299.

[7] Лизоркин П. И. Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и метод мультипликаторов в теории вложений классов дифференцируемых функций. *Там же*, **105**, 1969, 89–167.

Поступила в редакцию 10 ноября 1998 г.