Вычислительные технологии **Том 5, № 6, 2000**

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

М. К. Орунханов
Казахский государственный национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: orun@kazgu.almaty.kz

The justifications of the fictitious domain method for the convection equations is carried out. The problem of natural convection with inhomogeneous conditions on the boundary is considered. The junior coefficients were extended to the fictitious domain in order to obtain the additional problem.

Для решения задач математической физики в областях сложной геометрии достаточно приемлемые результаты дает использование метода фиктивных областей [1, 2]. Большинство результатов по применению этого метода получено для задач с однородными граничными условиями [3–5], за исключением нескольких работ, например [6].

Рассмотрим неоднородную краевую задачу для уравнений естественной конвекции в ограниченной области Ω с границей S:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \mu\Delta\mathbf{v} - \nabla p + \gamma\mathbf{g}\theta, \tag{1}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\theta = \chi\Delta\theta, \quad \mathrm{div}\mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{g}$ — постоянный вектор; γ — коэффициент объемного расширения; $\mathbf{v}, p, \theta$ — поля скоростей, давления и температуры соответственно; μ, χ — коэффициенты вязкости и теплопроводности. Систему уравнений (1), (2) дополним граничными условиями

$$\mathbf{v}\big|_S = \boldsymbol{\varphi}(x)\big|_S = \boldsymbol{\varphi}_s, \quad \theta\big|_S = H_0(x)\big|_S = \theta_s. \tag{3}$$

Далее рассмотрим вспомогательную задачу, полученную продолжением в дополнительную область младших коэффициентов из задачи (1)–(3). Заметим, что теорема существования для задачи (1)–(3) доказывается в процессе обоснования метода фиктивных областей для этой задачи.

Пусть S — граница области Ω, область D полностью охватывает область Ω, S_1 — граница области D и $S_1 \in C^2$, $S\bigcap S_1 = \varnothing$, а также выполнены условия из [7, гл.1]:

а) поля $\boldsymbol{\varphi}_s$, θ_s можно продолжить в области D в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = \mathrm{rot} D(x), \quad D(x) \in W_2^2(D),$$

$$\theta(x) = H_0(x), \quad H_0(x) \in W_2^1(D), \quad \Omega \Subset D;$$

б) существует семейство дважды непрерывно дифференцируемых срезывающих функций $\xi(x,\delta)$ для $\delta \in (0,\delta_1)$, равных единице вблизи S, нулю — в точках Ω, удаленных от границы на расстояние больше δ, единице — в области $D_1 = D \setminus \Omega$. Потребуем также выполнение неравенств

$$\big|\xi(x,\delta)\big| < C, \quad \left|\frac{\partial \xi(x,\delta)}{\partial x_i}\right| < \frac{C}{\delta},$$

где C — постоянная, не зависящая от $\delta \in (0,\delta_1)$. Полагаем, что

$$\oint\limits_S \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} ds = \oint\limits_{S_1} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

Обозначим

$$\boldsymbol{\varphi}(\delta,x) = \mathrm{rot}\left(\xi(x,\delta) D(x)\right),$$

$$H(\delta,x) = \xi(x,\delta) H_0(x)$$

и положим

$$\boldsymbol{\varphi}^\delta(x) = \begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(x), & x \in D_1, \\ \boldsymbol{\varphi}(\delta,x), & x \in \Omega, \end{cases} \qquad H^\delta = \begin{cases} H_0(x), & x \in D_1, \\ H(\delta,x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\boldsymbol{\varphi}^\delta(x) \in W_2^1(D), \quad \mathrm{div}\boldsymbol{\varphi}^\delta(x) = 0, \quad H^\delta(x) \in W_2^1(D).$$

Сформулируем вспомогательную задачу в ограниченной области D:

$$(\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\, \mathbf{v}^\varepsilon = \mu \Delta \mathbf{v}^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \frac{\xi^\varepsilon(x)}{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\varphi}(x) - \mathbf{v}^\varepsilon\right) + \gamma \mathbf{g} \theta^\varepsilon,$$

$$(\mathbf{v}^\varepsilon \cdot \nabla)\, \theta^\varepsilon = \chi \Delta \theta^\varepsilon + \frac{\xi^\varepsilon(x)}{\varepsilon}\left(H_0(x) - \theta^\varepsilon(x)\right), \tag{4}$$

$$\mathbf{v}^\varepsilon\big|_{S_1} = \boldsymbol{\varphi}^\delta(x)\big|_{S_1}, \quad \theta^\varepsilon\big|_{S_1} = H_0(x)\big|_{S_1} \tag{5}$$

с условиями согласования

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial n} - \sigma \cdot \mathbf{n} p^\varepsilon\right]\Big|_S = \left[\mathbf{v}^\varepsilon\right]\big|_S = 0,$$

$$\left[\chi \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial n}\right]\Big|_S = \left[\theta^\varepsilon\right]\big|_S = 0, \quad \xi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_1, \\ 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

где σ — метрический тензор; $\mathbf{n}$ — нормаль к границе S.

Пусть $H_1(D)$ — гильбертово пространство, порожденное скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi})_D^1 = \mu(\mathbf{v}_x, \boldsymbol{\varphi}_x)_D + \chi(\theta_x, \eta_x)_D,$$

где $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, \theta)$; $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\varphi}, \theta)$; $\forall \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}{}_2^1(D)$; $\theta, \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, а $\overset{\circ}{\mathbf{J}}{}_2^1(D)$ является подпространством пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, для функций из которого $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$.

Пусть $H_1^\varepsilon(D)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\mathbf{u},\boldsymbol{\psi})_\varepsilon = (\mathbf{u},\boldsymbol{\psi})_D^1 + \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v},\boldsymbol{\varphi})_{D_1} + \frac{1}{\varepsilon}(\eta,\theta)_{D_1},$$

а норма определяется равенством

$$\left\|\mathbf{u}^\varepsilon\right\|^2_{H_1^\varepsilon(D)} = \mu\left\|\mathbf{v}_x^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D)} + \chi_0\chi\left\|\theta_x^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathbf{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D_1)} + \frac{\chi_0}{\varepsilon}\left\|\theta^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D_1)}$$

(χ_0 — произвольная положительная постоянная).

Дадим определение обобщенного решения задачи (4) – (6).

Определение. *Обобщенным решением задачи (4) – (6) называются функции* $\mathbf{v}_1^\varepsilon = \mathbf{v}^\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}^\delta(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}{}_2^1(D)$, $\theta_1^\varepsilon = \theta^\varepsilon - H^\delta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, *удовлетворяющие интегральному тождеству*

$$\begin{gathered}\left((\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x),\nabla)\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x)\right)_D - \mu\left(\nabla(\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x)),\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_D - \\ -\chi\chi_0\left(\nabla(\theta_1^\varepsilon + H^\delta(x)),\nabla\eta\right)_D + \chi_0\left(\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x),\nabla\right)\eta,\theta_1^\varepsilon + H^\delta(x)\right)_D + \\ +\gamma\left(\mathbf{g}(\theta_1^\varepsilon + H^\delta(x)),\boldsymbol{\omega}\right)_D - \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_1^\varepsilon,\boldsymbol{\omega})_{D_1} - \frac{\chi_0}{\varepsilon}(\theta_1^\varepsilon,\eta)_{D_1} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

для $\forall\boldsymbol{\omega} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}{}_2^1(D)$, $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Интегральное тождество (7) эквивалентно операторному уравнению

$$\mathbf{u}^\varepsilon = A^\varepsilon\mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{F}, \quad \mathbf{u}^\varepsilon = (\mathbf{v}^\varepsilon,\theta^\varepsilon) \tag{8}$$

в пространстве $H_1^\varepsilon(D)$, где A^ε — нелинейный оператор и $\mathbf{F}$ определяются тождествами

$$A^\varepsilon\mathbf{u}^\varepsilon = \left((\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x),\nabla)\boldsymbol{\omega},\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x)\right)_D + \left(\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\delta(x),\nabla\right)\eta,\theta_1^\varepsilon + H^\delta(x)\right)_D + \gamma(\theta_1^\varepsilon,\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}),$$

$$\mathbf{F} = \mu\left(\nabla\boldsymbol{\varphi}^\delta\cdot\nabla\boldsymbol{\omega}\right)_D + \chi\chi_0\left(\nabla H^\delta(x),\nabla\eta\right)_D - \gamma(H^\delta(x),\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}).$$

Оператор A^ε вполне непрерывный, это легко доказывается. Для доказательства теоремы существования применим теорему Лере—Шаудера, т. е. покажем, что все возможные решения операторного уравнения

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \lambda A^\varepsilon\mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{F} \tag{9}$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ ограничены в $H_1^\varepsilon(D)$ одной и той же постоянной. Пусть $\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda,\delta_1)$ — решение операторного уравнения (9), т. е. удовлетворяет интегральному тождеству (7) с $\delta = \delta_1$. В тождестве (7) положим $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v}_1^\varepsilon(x)$, $\eta = \theta_1^\varepsilon(x)$. Тогда приходим к тождеству

$$\begin{gathered}\lambda\left((\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x),\nabla)\mathbf{v}_1^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)\right)_D - \mu\left\|\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|^2_D - \chi\chi_0\left\|\nabla\theta_1^\varepsilon\right\|^2_D - \\ -\frac{1}{\varepsilon}\left(\left\|\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|^2_{D_1} + \frac{\chi_0}{\varepsilon}\left\|\nabla\theta_1^\varepsilon\right\|^2_{D_1}\right) + \lambda\chi_0\left(\left(\mathbf{v}_1^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x),\nabla\right)\theta_1^\varepsilon,\theta_1^\varepsilon + H^{\delta_1}(x)\right)_D + \\ +\gamma\left(\mathbf{g}(\theta_1^\varepsilon + H^{\delta_1}(x)),\mathbf{v}_1^\varepsilon\right)_D - \mu\left(\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon,\nabla\varphi^{\delta_1}\right)_D - \chi\chi_0\left(\nabla\theta_1^\varepsilon,\nabla H^{\delta_1}(x)\right)_D = 0,\end{gathered}$$

из которого следует

$$\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|^2_{H_1^\varepsilon(D)} \leqslant \lambda\Bigg\{\Bigg|\int\limits_D \left((\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_1^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right)dx\Bigg| + \chi_0\Bigg|\int\limits_D \left((\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\nabla)\theta_1^\varepsilon, H^{\delta_1}(x)\right)dx\Bigg| +$$

$$+\Bigg|\int\limits_D \left((\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\cdot\nabla)\theta_1^\varepsilon, H^{\delta_1}(x)\right)dx\Bigg| + \gamma|\mathbf{q}|\Bigg|\int\limits_D |\theta_1^\varepsilon + H^{\delta_1}(x)|\cdot|\mathbf{v}_1^\varepsilon|dx\Bigg|\Bigg\} +$$

$$+\mu\big|\left(\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\nabla\right)\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)\big| + \chi\chi_0\big|\left(\nabla\theta_1^\varepsilon, \nabla H^{\delta_1}(x)\right)\big|.$$

Оцениваем интегралы по неравенствам вложения

$$\lambda\Bigg|\int\limits_D \left(\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)dx\Bigg| \leqslant \lambda\left\|\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|_D\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|^2_{L_4(D)} \leqslant C_1\lambda\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|^2_{W_2^1(D)},$$

$$\lambda\Bigg|\int\limits_D \left(\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)\cdot\nabla\right)\theta_1^\varepsilon\cdot H^{\delta_1}(x)dx\Bigg| \leqslant \lambda\left\|\nabla\theta_1^\varepsilon\right\|_D\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|_{L_4(D)}\left\|H^{\delta_1}\right\|_{L_4(D)} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\lambda\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)}\left\|H^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)},$$

$$\mu\big|\left(\nabla\mathbf{v}_1^\varepsilon, \nabla\varphi^{\delta_1}\right)_D\big| + \chi\chi_0\big|\left(\nabla\theta_1^\varepsilon, \nabla H^{\delta_1}(x)\right)_D\big| \leqslant \left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}\left(\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)} + \left\|H^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)}\right),$$

$$\lambda\gamma\Bigg|\int\limits_D (\mathbf{q}\cdot\theta_1^\varepsilon\mathbf{v}_1^\varepsilon)dx\Bigg| \leqslant \lambda\gamma|\mathbf{q}|\left\|\theta_1^\varepsilon\right\|_{L_2(D)}\left\|\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|_{L_2(D)} \leqslant \nu\left\|\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D)}\cdot C_\nu\left\|\theta_1^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \nu\left\|\mathbf{v}_1^\varepsilon\right\|^2_{H_1^\varepsilon(D)} + C_\nu\left\|\nabla\theta_1^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D)}.$$

Далее предполагаем, что χ_0 достаточно большая величина, а параметр ν — малая величина и $\chi\chi_0 - C_\nu \geqslant \nu_0 > 0$. В итоге приходим к неравенству

$$\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|^2_{H_1^\varepsilon(D)} \leqslant \lambda s_0\Bigg\{\Bigg|\int\limits_D \left((\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_1^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right)dx\Bigg| + \chi_0\Bigg|\int\limits_D \left((\mathbf{v}_1^\varepsilon\cdot\nabla)\theta_1^\varepsilon, H^{\delta_1}(x)\right)dx\Bigg|\Bigg\} +$$

$$+\lambda C_1\left(\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|^2_{W_2^1(D)} + \left\|H^{\delta_1}\right\|^2_{W_2^1(D)}\right)\cdot\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{H_1^\varepsilon(D)} + \left(\left\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)} + \left\|H^{\delta_1}\right\|_{W_2^1(D)}\right)\cdot\left\|\mathbf{u}_1^\varepsilon\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}, \quad (10)$$

где s_0 — положительная постоянная, не зависящая от δ, ε.

Теперь предполагаем, что множество решений $\left\{\mathbf{u}_1^\varepsilon(x, \lambda, \delta_1)\right\}$ не ограничено в совокупности, $\lambda \in [0, 1]$. Тогда существует подпоследовательность $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, стремящаяся к λ_0 при $n \to 0$. Рассмотрим соответствующие этой последовательности функции $\mathbf{u}_1^\varepsilon(x, \lambda_n, \delta_1) = \mathbf{u}_{1n}^\varepsilon$. Норма $S_n = \|\mathbf{u}_1^\varepsilon(x, \lambda_n, \delta_1)\|_{H_1^\varepsilon(D)} = \|\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon\|_{H_1^\varepsilon(D)} \to \infty$ при $n \to 0$.

Обозначим

$$\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon = \frac{\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon}{\|\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon\|_{H_1^\varepsilon(D)}} = \frac{\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon}{S_n} = \left(\frac{\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon}{S_n}, \frac{\theta_{1n}^\varepsilon}{S_n}\right) = \left(\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon, T_n\right).$$

Поделив обе части (11) на S_n^2, получим

$$1 \leqslant s_0\lambda_n\Bigg\{\Bigg|\int\limits_D \left((\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right)dx\Bigg| + \chi_0\Bigg|\int\limits_D \left((\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon\cdot\nabla)T_n^\varepsilon, H^{\delta_1}(x)\right)dx\Bigg|\Bigg\} +$$

$$+\lambda C_1\left(\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\|^2_{W_2^1(D)}+\|H^{\delta_1}\|^2_{W_2^1(D)}\right)\frac{1}{S_n}+\left(\|\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\|_{W_2^1(D)}+\|H^{\delta_1}\|_{W_2^1(D)}\right)\frac{1}{S_n}.$$

Множество функций $\boldsymbol{\omega}_n^\varepsilon$ равномерно ограничены по n в $H_1^\varepsilon(D)$. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$1\leqslant s_0\lambda_n\left\{\left|\int\limits_D\left((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}\right)dx\right|+\chi_0\left|\int\limits_D\left((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)T^\varepsilon,H^{\delta_1}(x)\right)dx\right|\right\}. \tag{11}$$

Однако функция $\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda,\delta)=\left\{\mathbf{v}_1^\varepsilon+\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)-\boldsymbol{\varphi}^{\delta}(x),\theta_1^\varepsilon+H^{\delta_1}(x)-H^\delta(x)\right\}$ является обобщенным решением задачи (8) с $\boldsymbol{\varphi}^\delta(x),H^\delta(x)$ при любом $\delta\in(0,\delta_1]$, причем норма $\left\|\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta)\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}\to\infty$ при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta)}{\left\|\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta)\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)}{\left\|\mathbf{u}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\right\|_{H_1^\varepsilon(D)}}=\left(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon(x),T^\varepsilon(x)\right),$$

где $\mathbf{u}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta)=\left\{\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon+\boldsymbol{\varphi}^{\delta_1}(x)-\boldsymbol{\varphi}^\delta(x),\theta_{1n}^\varepsilon+H^{\delta_1}(x)-H^\delta(x)\right\}$. Ввиду этого для предельной функции $\boldsymbol{\omega}_0^\varepsilon=(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,T^\varepsilon(x))$ неравенство (11) справедливо для любого $\delta\in(0,\delta_1]$:

$$1\leqslant s_0\lambda_n\left\{\left|\int\limits_D\left((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^{\delta}\right)dx\right|+\left|\int\limits_D\left((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)T^\varepsilon,H^{\delta}(x)\right)dx\right|\right\}. \tag{12}$$

Покажем, что неравенство (12) неверно при малых δ,ε. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_D\left((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^\delta\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_D\left(\frac{\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)}{S_n^2}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\cdot\boldsymbol{\varphi}^\delta(x)dx=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_\delta}\left(\frac{\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)}{S_n^2}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\cdot\boldsymbol{\varphi}^\delta(x)dx+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{D_1}\left(\frac{\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)}{S_n^2}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\cdot\boldsymbol{\varphi}^\delta(x)dx\right\}.$$

Оценим по неравенству вложения второй интеграл правой части

$$\int\limits_{D_1}(\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\cdot\nabla)\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon(x,\lambda_n,\delta_1)\cdot\boldsymbol{\varphi}^\delta(x)dx=\left|\int\limits_{D_1}(\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\cdot\boldsymbol{\varphi}^\delta(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|_{D_1}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|_{L_4(D_1)}\left\|\boldsymbol{\varphi}^\delta\right\|_{L_4(D_1)}\leqslant C\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{7/4}_{D_1}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{1/4}_{D_1}\left\|\boldsymbol{\varphi}^\delta\right\|_{L_4(D_1)}\leqslant$$

$$\leqslant C\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{7/4}_{D_1}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{1/4}_{D_1}\left\|\boldsymbol{\varphi}^\delta\right\|_{W_2^1(D)}\leqslant C_1\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{7/4}_{D_1}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{1/4}_{D_1}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{\alpha}\varepsilon_1^\alpha\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{\frac{7}{4}\cdot\alpha}_{D_1}+\frac{1}{\alpha'}\varepsilon_1^{-\alpha'}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^{\alpha'/4}_{D_1}\right)=J_1.$$

Положим $\alpha=8/7,\ \alpha'=8,\ \varepsilon_1=\varepsilon^{1/24}$. Тогда

$$J_1\leqslant C_1\left(\frac{7}{8}\varepsilon^{1/24}\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^2_{D_1}+\frac{1}{8}\varepsilon^{-1/3}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^2_{D_1}\right)\leqslant C_2\left(\varepsilon^{1/24}\mu\left\|\nabla\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^2_{D_1}+\varepsilon^{2/3}\frac{1}{\varepsilon}\left\|\mathbf{v}_{1n}^\varepsilon\right\|^2_{D_1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_3\varepsilon^{1/24}\left(\mu\big\|\nabla\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\big\|^2_{D_1}+\frac{1}{\varepsilon}\big\|\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\big\|^2_{D_1}\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{J_1}{S_n}\leqslant C_3\varepsilon^{1/24}. \tag{13}$$

Рассмотрим второй интеграл из (12)

$$\int\limits_D(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)T^\varepsilon(x)H^\delta(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left\{\int\limits_{\Omega_\delta}\frac{(\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\cdot\nabla)T^\varepsilon_{1n}H^\delta(x)}{S_n^2}dx+\int\limits_{D_1}\frac{(\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\cdot\nabla)T^\varepsilon_{1n}H_0(x)}{S_n^2}dx\right\}.$$

Рассуждая, как при выводе оценки (13), имеем

$$\left|\int\limits_{D_1}(\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\cdot\nabla)T^\varepsilon_{1n}H_0(x)dx\right|\leqslant C_4\varepsilon^{1/24}.$$

После перехода к пределу при $n\to\infty$ с функциями $\boldsymbol{\varphi}^\delta(x), H^\delta(x)$ имеем

$$1\leqslant s_0\lambda_0\left\{\left|\int\limits_{\Omega_\delta}\big((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^\delta\big)\,dx\right|+\left|\chi_0\int\limits_{\Omega_\delta}\big((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)T^\varepsilon,H^\delta(x)\big)\,dx\right|\right\}+C_5\varepsilon^{1/24},$$

где второй интеграл правой части оценивается следующим образом:

$$\left|\int\limits_{\Omega_\delta}\big((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)T^\varepsilon,H^\delta(x)\big)\,dx\right|\leqslant\big\|\nabla T^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_4(\Omega_\delta)}\big\|H^\delta(x)\big\|_{L_4(\Omega_\delta)}\leqslant$$

$$\leqslant C\big\|\nabla T^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla H_0(x)\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\to 0\quad\text{при}\quad\delta\to 0.$$

Оценим интеграл

$$\left|\int\limits_{\Omega_\delta}\big((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon,\boldsymbol{\varphi}^\delta\big)\,dx\right|=\left|\int\limits_{\Omega_\delta}((\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\operatorname{rot}(\xi(x,\delta)D(x)))\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega_\delta}\big|(\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big|\cdot(|\nabla\xi(x,\delta)|+\xi(x,\delta)|\nabla D(x)|)dx\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\Omega_\delta}|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon|\cdot|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon|\cdot\left(\frac{1}{\delta}+|\nabla D(x)|\right)dx\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{\delta}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}+\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_4(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla D(x)\big\|_{L_4(\Omega_\delta)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{\delta}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}+\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|^2_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|D(x)\big\|_{W_2^2(\Omega_\delta)}\right).$$

Заметим, что

$$\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|^2_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|D(x)\big\|_{W_2^2(\Omega_\delta)}\to 0,\ \delta\to 0.$$

Здесь C — универсальная положительная постоянная, не зависящая от ε, δ:

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{\Omega_\delta} \big|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big| \cdot \big|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big| dx \leqslant \frac{1}{\delta}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}.$$

Теперь используем легко доказуемую оценку

$$\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)} \leqslant C\delta^{1/2}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \delta\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}. \tag{14}$$

В силу (13) и (14) имеем

$$1 \leqslant C_6\left(\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} + \frac{1}{\delta^{1/2}}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(S)} + \varepsilon^{1/24} + \big\|\nabla T^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\right). \tag{15}$$

Оценим следы функции $\boldsymbol{\omega}^\varepsilon$:

$$\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(S)} \leqslant \big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon - \frac{\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}}{S_n}\big\|_{L_2(S)} + \big\|\frac{\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}}{S_n}\big\|_{L_2(S)}. \tag{16}$$

Последнее слагаемое оценивается по теореме вложения:

$$\big\|\frac{\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}}{S_n}\big\|_{L_2(S)} \leqslant \frac{\big\|\nabla\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\big\|^{1/2}_{L_2(D_1)}}{S_n}\cdot\big\|\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\big\|^{1/2}_{L_2(D_1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{S_n}}\big\|\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}\big\|^{1/2}_{L_2(D_1)} \leqslant C_7\varepsilon^{1/4}.$$

В неравенстве (16), переходя к пределу при $n \to \infty$ и в силу теорем вложения, имеем

$$\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(S)} \leqslant \lim_{n\to\infty}\big\|\boldsymbol{\omega}^\varepsilon - \frac{\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}}{S_n}\big\|_{L_2(S)} + \lim_{n\to\infty}\big\|\frac{\mathbf{v}^\varepsilon_{1n}}{S_n}\big\|_{L_2(S)} \leqslant C_7\varepsilon^{1/4}.$$

Из (15) и (3) следует

$$1 \leqslant C_8\left(\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} + \frac{\varepsilon^{1/4}}{\delta^{1/2}}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \big\|\nabla T^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)}\big\|\nabla\boldsymbol{\omega}^\varepsilon\big\|_{L_2(\Omega_\delta)} + \varepsilon^{1/24}\right). \tag{17}$$

Предполагаем, что $\varepsilon^{1/4} \leqslant \delta^{1/2}$, причем постоянная C_8 не зависит от ε, δ. Но такое неравенство невыполнимо, потому что левая часть (17) стремится к нулю при $\varepsilon, \delta \to 0$. Таким образом, приходим к противоречию. Следовательно, выполнены все условия теоремы Лере—Шаудера. Нами доказана следующая

Теорема 1. *Пусть выполняются требования а), б) и $\varepsilon < \delta$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (4)–(6). Для этого решения при достаточно малом ε имеет место оценка*

$$\big\|\mathbf{v}^\varepsilon_x\big\|^2_{L_2(D)} + \big\|\theta^\varepsilon_x\big\|^2_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon}\big\|\boldsymbol{\varphi}(x) - \mathbf{v}^\varepsilon\big\|^2_{L_2(D_1)} + \frac{1}{\varepsilon}\big\|H_0(x) - \theta^\varepsilon\big\|^2_{L_2(D_1)} \leqslant C < \infty,$$

причем постоянная C не зависит от ε, δ.

На основании данной теоремы сделаем вывод, что из последовательностей $\mathbf{v}^\varepsilon, \theta^\varepsilon$ можно выделить подпоследовательности, для которых имеют место соотношения

$\mathbf{v}^\varepsilon \to \mathbf{v}$ слабо в $W^1_2(\Omega)$,

$\theta^\varepsilon \to \theta$ слабо в $W_2^1(\Omega)$,
$\mathbf{v}^\varepsilon \to \mathbf{v}$ сильно в $L_4(\Omega)$,
$\theta^\varepsilon \to \theta$ сильно в $L_4(\Omega)$,
$\mathbf{v}^\varepsilon \to \boldsymbol{\varphi}_S$ сильно в $L_2(S)$,
$\theta^\varepsilon \to \theta_S$ сильно в $L_2(S)$.

В интегральном тождестве (7) переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате получаем, что $\mathbf{v}, \theta$ являются обобщенным решением задачи (1) – (3). Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия а), б). Тогда обобщенное решение задачи (4) – (6) сходится к решению задачи (1) – (3) при $\varepsilon \to 0$.*

Список литературы

[1] Вабищевич П. Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991.

[2] Коновалов А. Н., Конюх Г. В., Цуриков Н. В. О принципах построения итерационных процессов в методе фиктивных областей // Вариационные методы в задачах численного анализа: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ. 1986.

[3] Коробицына Ж. Л. Метод фиктивных областей для уравнения Лапласа с неоднородными краевыми условиями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, №7. С. 1095–1103.

[4] Бугров А. Н., Смагулов Ш. Метод фиктивных областей в краевых задачах для уравнений Навье—Стокса // Математические модели течений жидкости: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1978. С. 79–90.

[5] Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье—Стокса. Новосибирск, 1979 (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние, ВЦ; №68).

[6] Смагулов Ш., Орунханов М. К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, №5. С. 1078–1082.

[7] Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 12 сентября 2000 г.