

ОБ АЛГОРИТМАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ*

Э. П. ШУРИНА, М. Ю. ВЕЛИКАЯ, М. П. ФЕДОРУК

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: mife@net.ict.nsc.ru

The methods for solving the time-domain two-dimensional Maxwell equations are presented. These methods are based on the finite volume and the finite element schemes with Lagrange multipliers. Some test results are described.

Введение

В последние годы в связи с потребностями фундаментальной науки и ее практических приложений стали развиваться алгоритмы численного решения уравнений Максвелла в областях сложной формы, основанные на использовании методов конечных объемов, или конечных элементов [1–5]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{B} — вектор магнитной индукции; \mathbf{j} — плотность токов проводимости; ρ — плотность зарядов в области; c — скорость света в вакууме; ε_0 — электрическая постоянная; μ_0 — магнитная постоянная, причем константы удовлетворяют соотношению $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Плотности тока и заряда в этих уравнениях считаются заданными функциями координат и времени.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №98-02-17115а.

© Э. П. Шурина, М. Ю. Великая, М. П. Федорук, 2000.

При реализации таких алгоритмов возникает принципиальная трудность, связанная с нарушением дискретного аналога соотношения (3). Это обусловлено тем, что плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} вычисляются по алгоритмам, не зависящим от уравнений Максвелла и друг от друга. Значит, закон сохранения заряда

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_h + \operatorname{div}_h \mathbf{j} = 0 \quad (5)$$

в дискретном виде также может не выполняться. Такая ситуация типична, например, при моделировании широкого круга задач динамики плазмы методом частиц [6]. Согласно общей идее данного метода, плотности зарядов и токов определяются, как правило, независимо по положениям и скоростям отдельных макрочастиц. Это приводит к нарушению условия (5) и, как следствие, появлению дополнительных случайных шумов в плазменной системе и искажению физических характеристик процесса.

В литературе описан ряд приемов, обеспечивающих выполнение дискретного аналога закона сохранения заряда в основном применительно к алгоритмам метода частиц на декартовой сетке [7–10]. Так, в работе [7] для решения уравнения (5) предложено на каждом временном шаге вносить поправку в продольную часть электрического поля. Это приводит к необходимости на каждом шаге по времени решать уравнение для поправки к электростатическому потенциалу:

$$\Delta \delta \varphi = \operatorname{div}_h \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

В [8] описан очень простой способ коррекции разностного закона Гаусса, основанный на введении в уравнение (1) члена, пропорционального величине ∇F , который получил название псевдотока ($F = \operatorname{div} \mathbf{E} - \rho/\varepsilon_0$). В [9, 10] разработан алгоритм, в котором для выполнения разностного аналога уравнения непрерывности предложено находить вклад в плотность тока от каждой макрочастицы, непосредственно подсчитывая потоки через стороны (границы) прямоугольных ячеек. Поскольку этот закон автоматически выполняется для отдельной макрочастицы, он справедлив и для всей системы в целом. Обобщение данного подхода на случай двумерной неструктурированной треугольной сетки дано в работе [11].

В [1, 2] развит еще один подход к решению уравнений Максвелла. В его основе лежит использование неопределенных множителей Лагранжа, благодаря которым уравнения (3), (4), накладывающие ограничения на дивергенцию полей, включаются в решаемую систему совместно с уравнениями (1), (2). Для этой цели в уравнения (3), (4) вводятся “фиктивные” переменные — множители Лагранжа $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$, которые осуществляют корректировку электромагнитных полей, обеспечивая тем самым выполнение уравнений (3), (4). При этом множители Лагранжа удовлетворяют однородным условиям Дирихле на границе области.

В настоящей работе описан алгоритм для численного решения двумерных уравнений Максвелла на неструктурированной сетке, основанный на идеях, предложенных в работах [1, 2]. Рассмотрены два метода записи исходных дифференциальных уравнений в дискретной форме: метод конечных элементов и метод модифицированного конечного объема [12] и приведены результаты некоторых тестовых расчетов.

1. Вариационная формулировка задачи для волновых уравнений

Перепишем систему уравнений (1)–(4) в форме, включающей неопределенные множители Лагранжа [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \varphi - c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla p + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что при выполнении закона сохранения заряда с учетом краевых условий Дирихле для множителей Лагранжа, функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $p(\mathbf{x}, t)$ тождественно равны нулю во всей области и полученная система уравнений (6)–(9) эквивалентна исходной системе уравнений Максвелла (1)–(4). Систему уравнений (6)–(9) запишем в форме волновых уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \nabla \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + c^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} - \nabla P = \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (13)$$

где $\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$; $P = \frac{\partial p}{\partial t}$.

Начальные и краевые условия для системы уравнений (10)–(13) формулируем следующим образом:

$$\mathbf{E}(t=0) = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B}(t=0) = \mathbf{B}_0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t=0) = \nabla \varphi(t=0) + c^2 \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}(t=0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t=0) = \nabla p(t=0) - \operatorname{rot} \mathbf{E}_0,$$

а условия на границе области Γ :

$$\Phi = 0, \quad P = 0, \quad \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{n} = \mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{n}.$$

Вариационную постановку для волновых уравнений определим в слабой форме Галеркина, для чего вводим функциональные пространства

$$H(\operatorname{rot}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{rot} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3\},$$

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\},$$

$$H^1(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \nabla p \in L^2(\Omega)\}.$$

Введем также пространства функций, в которых будем в дальнейшем искать решения вариационных задач:

$$\begin{aligned} Y &= H(\text{rot}, \Omega) \cap H(\text{div}, \Omega), \\ Y_0 &= \{\mathbf{F} \in Y, \mathbf{F} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S\}, \\ Z &= H^1(\Omega)^3, \\ Z_0 &= \{\mathbf{F} \in Z, \mathbf{F} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } S\}. \end{aligned}$$

Вариационная постановка для электромагнитного поля в слабой форме с учетом введенных обозначений имеет вид [1]:

для магнитного поля

найти $\mathbf{B} \in Z, P \in L^2(\Omega)$, являющиеся решением уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{V} d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{B} : \nabla \mathbf{V} d\Omega + \int_{\Omega} P \text{div} \mathbf{V} d\Omega + \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\nabla \mathbf{B}_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{V}) d\gamma = \\ = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \text{rot} \mathbf{j} \cdot \mathbf{V} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} d\gamma, \quad \forall \mathbf{V} \in Z, \\ \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{B} q d\Omega = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \\ \mathbf{B}(t=0) = \mathbf{B}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t=0) = \nabla p(t=0) - \text{rot} \mathbf{E}_0; \end{aligned}$$

для электрического поля

найти $\mathbf{E} \in Z_0, \Phi \in L^2(\Omega)$, являющиеся решением уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \cdot \mathbf{V} d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla \mathbf{E} : \nabla \mathbf{V} d\Omega + \int_{\Omega} \Phi \text{div} \mathbf{V} d\Omega + \sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Gamma} (\nabla E_{\alpha} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{V}) d\gamma = \\ = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{V} d\Omega + \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho \text{div} \mathbf{V} d\Omega, \quad \forall \mathbf{V} \in Z_0, \\ \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{E} q d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho q d\Omega, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \\ \mathbf{E}(t=0) = \mathbf{E}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t=0) = \nabla \varphi(t=0) + c^2 \text{rot} \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{j}(t=0). \end{aligned}$$

Известно, что такого рода задачи корректны, если пространства, в которых ищутся решения, удовлетворяют условию Ладженской — Бабушки — Бреззи (ЛББ) [11]:

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\mathbf{v} \in Y} \frac{\int \text{div} \mathbf{V} q d\Omega}{\|\mathbf{V}\|_Y} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall q \in L^2(\Omega).$$

В нашем случае два пространства $(Y, L^2(\Omega))$ удовлетворяют этому условию [1] и вариационная задача является корректно поставленной.

Рассмотрим двумерный случай, когда векторы полей имеют только две ненулевые компоненты. Не нарушая общности, положим ненулевыми компоненты x, y векторных полей $\mathbf{E} = (E_x, E_y), \mathbf{B} = (B_x, B_y)$, а в качестве пробной возьмем функцию вида $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$,

функции V_x, V_y выберем из одного пространства и обозначим их одним символом “ V ”. Вариационные постановки для компонент x, y имеют вид:

для магнитного поля

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} V d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla B_x \nabla V d\Omega + \int_{\Omega} P \frac{\partial V}{\partial x} d\Omega &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \text{rot}_x \mathbf{j} V d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathbf{j} \times \mathbf{n})_x V d\gamma, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} V d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla B_y \nabla V d\Omega + \int_{\Omega} P \frac{\partial V}{\partial y} d\Omega &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \text{rot}_y \mathbf{j} V d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma} (\mathbf{j} \times \mathbf{n})_y V d\gamma, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) q d\Omega &= 0, \end{aligned}$$

для электрического поля

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} V d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla E_x \nabla V d\Omega + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial V}{\partial x} d\Omega &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial j_x}{\partial t} V d\Omega + \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial V}{\partial x} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} V d\Omega + c^2 \int_{\Omega} \nabla E_y \nabla V d\Omega + \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial V}{\partial y} d\Omega &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\partial j_y}{\partial t} V d\Omega + \frac{c^2}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial V}{\partial y} d\Omega, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right) q d\Omega &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega} \rho q d\Omega. \end{aligned}$$

Шаг по времени Δt считаем постоянным. Электрические поля вычисляем в целые моменты времени $t^n = n\Delta t$, а магнитные поля — в полуцелые моменты времени $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$. Множители Лагранжа находим в текущий момент времени $t^{n+1/2}$ для P и t^n для Φ . Считаем также, что триангуляция расчетной области \mathfrak{S}_h задана в виде множества узлов $\hat{x}^k = (\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ и множества треугольников e_n .

Выбор дискретных конечномерных подпространств необходимо осуществить так, чтобы соблюдалось условие Ладыженской — Бабушки — Бреззи [11]. Для этого достаточно, чтобы степень функций из конечномерных подпространств Z_h, Z_h^0 и L_2^h , различалась на единицу. Введем дискретные конечномерные подпространства

$$\begin{aligned} Z_h &= \{V_h : \forall \Omega_n \in \mathfrak{S}_h, V_h \in P_1\}, \\ Z_h^0 &= \{V_h \in Z_h, V_h \times \mathbf{n} = 0 \forall \hat{x}^k \in \Gamma_h\}, \\ L_2^h &= \{q_h : \forall \Omega_n \in \mathfrak{S}_h, q_h \in P_0\}, \end{aligned}$$

которые определены таким образом, что функции из подпространств Z_h, Z_h^0 принадлежат классу кусочно-линейных функций, а функции из подпространства L_2^h являются кусочно-постоянными. Такой выбор подпространств обеспечивает выполнение условия ЛББ.

Помимо этого, при использовании базисных функций первого и нулевого порядков полученные в результате пространственной дискретизации матрицы систем линейных алгебраических уравнений имеют разреженную структуру. Значения физических переменных \mathbf{E}, \mathbf{B} аппроксимируем линейными функциями, тогда как множители Лагранжа, являющиеся вспомогательными, определим в классе кусочно-постоянных функций. Любую функцию $V_h \in Z_h$ можно представить в виде линейной комбинации финитных базисных функций $\Psi_i : V_h = \sum_i V_i \Psi_i = \mathbf{V}^T \Psi$, где V_i — значения функции в узлах дискретизации, Ψ_i — кусочно-линейные базисные функции пространства, характеризующиеся свойством $\Psi_i(\hat{x}^k) = \delta_{ik}$ (δ_{ik} — символ Кронекера). Любую функцию $q_h \in L_2^h$ можно представить аналогично, в виде линейной комбинации базисных функций $\phi_i : q_h = \sum_i q_i \phi_i = \mathbf{q}^T \phi$, где q_i —

сеточные значения функции; ϕ_i — кусочно-постоянные базисные функции пространства L_2^h , обладающие свойством

$$\phi_i(\hat{x}^k) = \begin{cases} 1, & \hat{x}^k \in \text{supp}(\phi_i) \\ 0, & \hat{x}^k \notin \text{supp}(\phi_i) \end{cases}$$

(под $\text{supp}(\phi_i)$ понимается множество всех треугольников, являющихся носителем ϕ_i). Дискретный аналог вариационной постановки для магнитного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_x^{n+1/2} + \left[\int_{\Omega_n} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \hat{\phi}^T d\Omega \right] P^{n+1/2} \right\} = \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{2}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_x^{n-1/2} - \right. \\ \left. - c^2 \left[\int_{\Omega_n} \nabla \hat{\Psi}^T \nabla \hat{\Psi} d\Omega \right] B_x^{n-1/2} - \frac{1}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_x^{n-3/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T (\text{rot}_x \mathbf{j}^{n+1/2}) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma_n} \hat{\Psi}^T (\mathbf{j}^{n+1/2} \times \mathbf{n})_x d\gamma \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_y^{n+1/2} + \left[\int_{\Omega_n} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y} \hat{\phi}^T d\Omega \right] P^{n+1/2} \right\} = \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{2}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_y^{n-1/2} - \right. \\ \left. - c^2 \left[\int_{\Omega_n} \nabla \hat{\Psi}^T \nabla \hat{\Psi} d\Omega \right] B_y^{n-1/2} - \frac{1}{\Delta t^2} \left[\int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T \hat{\Psi} d\Omega \right] B_y^{n-3/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_n} \hat{\Psi}^T (\text{rot}_y \mathbf{j}^{n+1/2}) d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma_n} \hat{\Psi}^T (\mathbf{j}^{n+1/2} \times \mathbf{n})_y d\gamma \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\sum_{n=1}^{NE} \left\{ \int_{\Omega_n} \frac{\partial \hat{\Psi}^T}{\partial x} \hat{\phi} d\Omega B_x^{n+1/2} + \int_{\Omega_n} \frac{\partial \hat{\Psi}^T}{\partial y} \hat{\phi} d\Omega B_y^{n+1/2} \right\} = 0 \quad (16)$$

(NE — число треугольников в триангуляции, Ψ — локальные базисные функции). В векторно-матричной форме уравнения (14)–(16) принимают вид

$$\frac{M}{\Delta t^2} B_x^{n+1/2} + Q_x^T P^{n+1/2} = \tilde{F}_x^{n+1/2},$$

$$\frac{M}{\Delta t^2} B_y^{n+1/2} + Q_y^T P^{n+1/2} = \tilde{F}_y^{n+1/2},$$

$$Q_x B_x^{n+1/2} + Q_y B_y^{n+1/2} = 0,$$

где $M = \left\{ \int_{\Omega_n} \hat{\Psi}_j \hat{\Psi}_i d\Omega \right\}_{i,j=1}^N \cong \left\{ \frac{|\Omega_n|}{3} \delta_{i,j} \right\}_{i,j=1}^N$ — матрица массы;

$L = \left\{ \int_{\Omega_n} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial x} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial y} \frac{\partial \hat{\Psi}_i}{\partial y} \right) d\Omega \right\}_{i,j=1}^N$ — матрица жесткости;

$Q_x = \left\{ \int_{\Omega_n} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial x} \hat{\phi}_i \right) d\Omega \right\}_{i,j=1}^N$, $Q_y = \left\{ \int_{\Omega_n} \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_j}{\partial y} \hat{\phi}_i \right) d\Omega \right\}_{i,j=1}^N$ — матрицы первых производных;

$$\tilde{F}_x^{n+1/2} = \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - c^2 L \right) B_x^{n-1/2} - \frac{M}{\Delta t^2} B_x^{n-3/2} + F_x^{n+1/2},$$

$$\tilde{F}_y^{n+1/2} = \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - c^2 L \right) B_y^{n-1/2} - \frac{M}{\Delta t^2} B_y^{n-3/2} + F_y^{n+1/2},$$

$$F_x^{n+1/2} = \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_n} (\text{rot}_x \mathbf{j}^{n+1/2})^T \hat{\Psi} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma_n} (\mathbf{j}^{n+1/2} \times \mathbf{n})_x^T \hat{\Psi} d\gamma \right\},$$

$F_y^{n+1/2} = \sum_{n=1}^{NE} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega_n} (\text{rot}_y \mathbf{j}^{n+1/2})^T \hat{\Psi} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Gamma_n} (\mathbf{j}^{n+1/2} \times \mathbf{n})_y^T \hat{\Psi} d\gamma \right\}$ — векторы правых частей. Для электрического поля дискретная вариационная постановка имеет аналогичный вид.

На заданной триангуляции матрицы L , Q_x , Q_y имеют одинаковый портрет и разреженную структуру, что позволяет применять экономичную схему хранения — разреженный строчный формат. Использование приближенной, а не точной аналитической формулы для вычисления вкладов в матрицу массы позволяет привести ее к диагональному виду, что дает возможность применить эффективные алгоритмы для нахождения решений полученных матричных систем уравнений без операции обращения матрицы.

2. Конечно-объемная аппроксимация

Метод конечного объема предполагает разбиение расчетной области на множество непесекающихся контрольных объемов $\tilde{\Omega}_j$, $\Omega \approx \bigcup_j \tilde{\Omega}_j$, в объединении дающих исходную область с некоторой погрешностью аппроксимации ($\Omega \approx \bigcup_j \tilde{\Omega}_j$). Будем исходить из того, что определена триангуляция области \mathfrak{S}_h . Тогда контрольным объемом $\tilde{\Omega}_j$, окружающим j -й узел, является область, ограниченная участками медиан [13]. Дискретизация области на такие контрольные объемы (дуальная сетка) представлена на рис. 1.

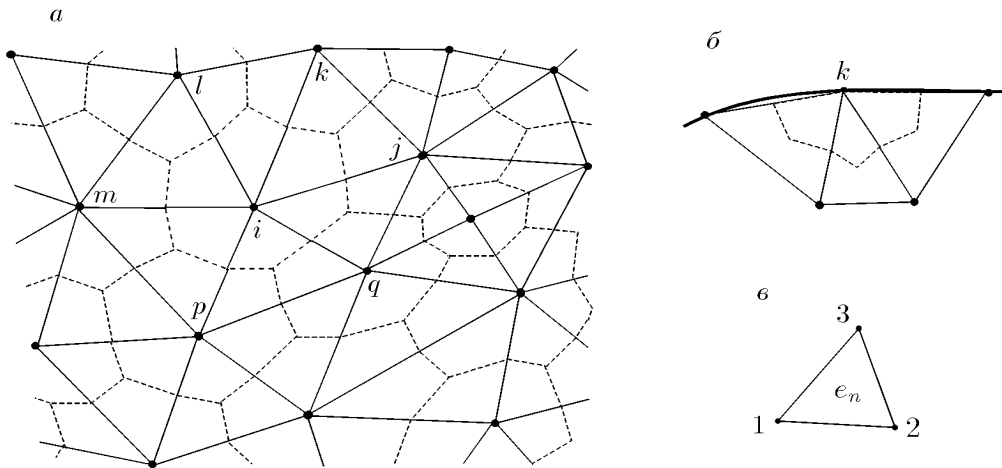


Рис. 1. Дискретизация фрагмента расчетной области (а), граничный узел (б) и конечный элемент e_n (в). Штриховой линией показаны контрольные объемы, принадлежащие внутренним (j, p, q, m, i) и граничным (k, l) узлам; 1–3 номера узлов элемента e_n .

Введем следующие обозначения: $\tilde{\Omega}_j$ — контрольный объем узла j ; e_n — треугольный конечный элемент n ; S_j — граница контрольного объема; S_i^n — часть границы S_j , образованная медианой, выходящей из узла i элемента e_n . Зафиксируем некоторую внутреннюю

точку триангуляции i и получим интегробалансные соотношения для уравнений Максвелла. Проинтегрируем уравнения для магнитного поля по соответствующему контрольному объему $\tilde{\Omega}_i$. В результате запишем балансные соотношения для двумерного случая:

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_x^{n+1/2}}{\Delta t^2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial P^{n+1/2}}{\partial x} d\Omega = 2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_x^{n-1/2}}{\Delta t^2} d\Omega + c^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla B_x^{n-1/2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_x^{n-3/2}}{\Delta t^2} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{rot}_x \mathbf{j}^{n+1/2} d\Omega, \quad (17)$$

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_y^{n+1/2}}{\Delta t^2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial P^{n+1/2}}{\partial y} d\Omega = 2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_y^{n-1/2}}{\Delta t^2} d\Omega + c^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla B_y^{n-1/2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{B_y^{n-3/2}}{\Delta t^2} d\Omega + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{rot}_y \mathbf{j}^{n+1/2} d\Omega, \quad (18)$$

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \left(\frac{\partial B_x^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial B_y^{n+1/2}}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (19)$$

Аналогичные выражения для электрического поля имеют вид

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_x^{n+1}}{\Delta t^2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial x} d\Omega = 2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_x^n}{\Delta t^2} d\Omega + c^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla E_x^n d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_x^{n-1}}{\Delta t^2} d\Omega - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial j_x^{n+1}}{\partial t} d\Omega - \frac{c^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial x} d\Omega, \\ \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_y^{n+1}}{\Delta t^2} d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial y} d\Omega = 2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_y^n}{\Delta t^2} d\Omega + c^2 \int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla E_y^n d\Omega - \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{E_y^{n-1}}{\Delta t^2} d\Omega - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tilde{\Omega}_i} \frac{\partial j_y^{n+1}}{\partial t} d\Omega - \frac{c^2}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho^{n+1}}{\partial y} d\Omega, \\ \int_{\tilde{\Omega}_i} \left(\frac{\partial E_x^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{n+1}}{\partial y} \right) d\Omega = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tilde{\Omega}_i} \rho^{n+1} d\Omega.$$

Найдем вклады от треугольного конечного элемента в глобальные матрицы конечно-объемной системы линейных алгебраических уравнений, получаемой из уравнений (17)–(19).

Матрица конвективно-диффузионного члена L

Используя формулу Остроградского — Гаусса, получим

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla B_x d\Omega = \int_{\tilde{\Gamma}_i} (\nabla B_x)_n d\gamma, \quad (20)$$

где $(\nabla B_x)_n = \frac{\partial B_x}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали. Если τ — касательная к некоторой границе Γ и α — угол между касательной и положительным направлениями оси x , то $\cos(\mathbf{n}, x) = -\sin \alpha$, $\cos(\mathbf{n}, y) = \cos \alpha$ и интеграл, входящий в уравнение (20), запишется так:

$$\int_{\tilde{\Gamma}_i} (\nabla B_x)_n d\gamma = \int_{\tilde{\Gamma}_i} \frac{\partial B_x}{\partial x} dy - \frac{\partial B_x}{\partial y} dx.$$

С учетом введенных обозначений аппроксимация конвективно-диффузионного члена для контрольного объема Ω_i примет вид

$$\int_{\tilde{\Omega}_i} \operatorname{div} \nabla B_x d\Omega \approx \sum_{\{n|e_n \text{ содержит узел } i\}} \sum_{nb} \int_{S_{nb}^n} \frac{\partial B_x}{\partial x} dy - \frac{\partial B_x}{\partial y} dx. \quad (21)$$

Здесь внешняя сумма означает учет вкладов всех треугольников, примыкающих к узлу i , а nb — локальные номера узлов треугольника с номером n , смежных с узлом i . Таким образом, каждая внутренняя сумма состоит из двух слагаемых — потоков через грани S_{nb}^n , $nb \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$. В методе конечного объема пространственные интегралы заменяются интегралами по границе и задача состоит в построении аппроксимации потоков через грани. Тогда в предположении некоторого профиля искомых величин на гранях контрольного объема выражение (21) дает дискретный аналог для узла i , который связывает значения искомой функции в узле i и смежных ему узлах триангуляции j, m, \dots, q . Получим этот дискретный аналог для внутреннего узла i . Рассмотрим некоторый треугольник (i, j, m) , содержащий узел i (рис. 2).

Узлы триангуляции (i, j, m) имеют локальные номера 1, 2, 3 (после перехода к сборке матрицы и вектора правой части по конечным элементам это ограничение станет несущественным). Вклад треугольника (i, j, m) в выражение для потока через границу контрольного объема S_i содержит потоки через два отрезка S_2^n, S_3^n . Используем следующие обозначения:

$(\tilde{x}_{nb}, \tilde{y}_{nb})$ — основание медианы, выходящей из узла nb , $nb \in \{2, 3\}$;

(x^c, y^c) — координаты центроида треугольника;

$l_{nbx} = \tilde{x}_{nb} - x^c, l_{nby} = \tilde{y}_{nb} - y^c$ — длины проекций отрезка медианы S_{nb}^n на оси x, y ;

$y = k_{nb}x + b_{nb}$ — уравнение медианы, выходящей из узла nb .

Пусть $J_{1nb}^n = - \int_{S_{nb}^n} \frac{\partial B_x}{\partial n}$ — поток через отрезок медианы S_{nb}^n , $nb \in \{2, 3\}$ (в индексации потока J_{1nb}^n 1 означает, что рассматривается контрольный объем узла с локальным номером 1). Построим аппроксимацию потока J_{1nb}^n . Согласно формуле (21), получим

$$J_{1nb}^n = \left\{ \int_{x^c}^{\tilde{x}_{nb}} \frac{\partial B_x(x, k_{nb}x + b_{nb})}{\partial y} dx - \int_{y^c}^{\tilde{y}_{nb}} \frac{\partial B_x((y - b_{nb})/k_{nb}, y)}{\partial y} dy \right\} G_{1,nb},$$

где коэффициент $G_{1,nb}$ определяется как

$$G_{1,nb} = \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_{nb} & y_{nb} \\ 1 & x_{\{2,3\} \setminus \{nb\}} & y_{\{2,3\} \setminus \{nb\}} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

В каждом из контрольных объемов выберем положительное направление обхода. Для удобства вычислений примем, что интегрирование производится от центра масс (x^c, y^c) до основания медианы (x_{nb}, y_{nb}) , но соответствующие интегралы входят в балансовые соотношения со знаками “+” ($G_{1,nb} = 1$) или “−” ($G_{1,nb} = -1$) в зависимости от того, совпадает ли направление интегрирования с положительным направлением обхода. На практике не придется вычислять определитель (22), поскольку, как показано в [12], согласованные ориентации конечных элементов и контрольных объемов связаны между собой и, таким образом, определенный способ хранения номеров узлов конечно-элементной сетки позволяет избежать дополнительных вычислений для учета положительного направления обхода. Для получения окончательного вида аппроксимации J_{1nb}^n необходимо предположение

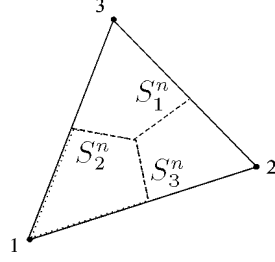


Рис. 2. Локальная нумерация вершин треугольника e_n и отрезков медиан.

о профиле искомых функций на гранях контрольного объема. Пусть функция $B_x(x, y)$ линейна на каждом из конечных элементов e_n :

$$B_x(x, y) = a_0^n + a_1^n x + a_2^n y, (x, y) \in e_n,$$

значения коэффициентов могут быть определены обращением матрицы D^n через значения в узлах треугольника:

$$\begin{bmatrix} a_0^n \\ a_1^n \\ a_2^n \end{bmatrix} = K^n \begin{bmatrix} B_x^1 \\ B_x^2 \\ B_x^3 \end{bmatrix}, \quad K^n = (D^n)^{-1}, \quad D^n = \begin{bmatrix} 1 & \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \\ 1 & \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ 1 & \hat{x}_3 & \hat{y}_3 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где $B_x = (B_x^1, B_x^2, B_x^3)^T$ — локальный вектор значений функции в узлах треугольника. Аппроксимация частных производных на элементе e_n имеет вид $\frac{\partial B_x}{\partial x} \approx a_2^n$, $\frac{\partial B_x}{\partial y} \approx a_3^n$, так что поток J_{1nb}^n может быть вычислен приближенно:

$$J_{1nb}^n = \left\{ \int_{x^c}^{\tilde{x}^{nb}} a_3^n dx - \int_{y^c}^{\tilde{y}^{nb}} a_2^n dy \right\} G_{1,nb} = \{a_3^n l_{nbx} - a_2^n l_{nby}\} G_{1,nb} = \tilde{J}_{1nb}^n. \quad (24)$$

Согласно (23), входящие в уравнение (24) коэффициенты a_2^n, a_3^n выразим через компоненты матрицы K^n и локального вектора неизвестных $B_x = (B_x^1, B_x^2, B_x^3)^T$:

$$a_2^n = \sum_{m=1}^3 k_{2m}^n B_x^m, \quad a_3^n = \sum_{m=1}^3 k_{3m}^n B_x^m.$$

Тогда

$$\tilde{J}_{1nb}^n = \left\{ l_{nbx} \sum_{m=1}^3 k_{3m}^n B_x^m - l_{nby} \sum_{m=1}^3 k_{2m}^n B_x^m \right\} G_{1,nb} = d_{1nb}^n B_x, \quad nb \in \{2, 3\}, \quad (25)$$

где вектор-строка d_{1nb}^n состоит из коэффициентов, с которыми входят в выражение (24) компоненты локального вектора неизвестных $B_x = (B_x^1, B_x^2, B_x^3)^T$. Компоненты d_{1nb}^n имеют вид

$$(d_{1nb}^n)_m = \{k_{3m}^n l_{nbx} - k_{2m}^n l_{nby}\} G_{1,nb}, \quad m = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Выражения (25), (26) представляют собой аппроксимацию потоков J_{12}^n, J_{13}^n через часть границы $S_2^n \cup S_3^n$ контрольного объема $\tilde{\Omega}_i$, принадлежащую элементу e_n . Любой треугольник e_n содержит части трех контрольных объемов. Потоки через часть границ контрольных объемов, принадлежащую e_n , войдут в балансовые соотношения контрольных объемов $\tilde{\Omega}_i$,

$\tilde{\Omega}_j, \tilde{\Omega}_m$, а коэффициенты их аппроксимаций дадут вклады в строках и столбцах i, j, m . Поэтому вклад треугольного конечного элемента (i, j, m) , соответствующий аппроксимации интеграла в (21), в матрицу L можно представить в виде локальной матрицы l^{en}

$$l^{en} = \begin{bmatrix} d_1^n \\ d_2^n \\ d_3^n \end{bmatrix},$$

где каждая из вектор-строк d_ν^n ($\nu = 1, 2, 3$) получается суммированием двух вектор-строк, соответствующих отрезкам медиан, окружающим узел ν :

$$d_\nu^n = \sum_{nb \in \{1,2,3\} \setminus \{\nu\}} d_{\nu nb}^n, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Согласно формуле (26), при генерации локальных вектор-строк $d_{\nu nb}^n$, где $\nu, nb = 1, 2, 3$, необходим учет положительного направления обхода, выбранного в каждом из контрольных объемов $\tilde{\Omega}_i$. Для получения согласованной ориентации всех контрольных объемов достаточно согласовать ориентации конечных элементов [13]. После выбора порядка обхода треугольников, например левостороннего, аппроксимация потока через часть границы $S_2^n \cap S_3^n$ контрольного объема $\tilde{\Omega}_i$ примет вид

$$\begin{aligned} \int_{S_2^n \cap S_3^n} \frac{\partial B_x}{\partial x} ds &\approx - \left\{ \int_{x^c}^{\tilde{x}_2} a_3^n dx - \int_{y^c}^{\tilde{y}_2} a_2^n dy \right\} + \left\{ \int_{x^c}^{\tilde{x}_3} a_3^n dx - \int_{y^c}^{\tilde{y}_3} a_2^n dy \right\} = \\ &= \sum_{m=1}^3 (-k_{3m}^n l_{2x} + k_{2m}^n l_{2y} + k_{3m}^n l_{3x} - k_{2m}^n l_{3y}) \tilde{B}_x^m = d_1^n B_x. \end{aligned}$$

Здесь вектор-строка d_1^n определяется как

$$d_1^n = \begin{bmatrix} k_{31}^n (-l_{2x} + l_{3x}) + k_{21}^n (-l_{3y} + l_{2y}) \\ k_{32}^n (-l_{2x} + l_{3x}) + k_{22}^n (-l_{3y} + l_{2y}) \\ k_{33}^n (-l_{2x} + l_{3x}) + k_{23}^n (-l_{3y} + l_{2y}) \end{bmatrix}^T.$$

Сделаем некоторые упрощения с учетом того, что

$$\tilde{x}_n - \tilde{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k - \hat{x}_n),$$

$$l_{nx} - l_{kx} = \tilde{x}_n - \tilde{x}_k = \frac{1}{2}(\hat{x}_k - \hat{x}_n),$$

$$l_{ny} - l_{ky} = \tilde{y}_n - \tilde{y}_k = \frac{1}{2}(\hat{y}_k - \hat{y}_n).$$

Таким образом,

$$d_1^n = \begin{bmatrix} 0.5k_{31}^n (\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + 0.5k_{21}^n (\hat{y}_3 - \hat{y}_2) \\ 0.5k_{32}^n (\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + 0.5k_{22}^n (\hat{y}_3 - \hat{y}_2) \\ 0.5k_{33}^n (\hat{x}_2 - \hat{x}_3) + 0.5k_{23}^n (\hat{y}_3 - \hat{y}_2) \end{bmatrix}^T. \quad (27)$$

Вектор-строки d_2^n, d_3^n можно получить из (27) циклической перестановкой индексов.

Матрица массы M

Для того чтобы матричную систему, полученную методом конечного объема, можно было разрешить без процедуры обращения матрицы, необходимо выполнить диагонализацию матрицы массы. Для этого аппроксимируем интегралы вида $\int_{\tilde{\Omega}_i} B_x d\Omega$, входящие как в левую, так и в правую части уравнений. Полагаем, что подынтегральная функция $B_x(x, y)$ является кусочно-постоянной на треугольном конечном элементе e_n . Тогда вклад от конечного элемента e_n в i -й узел определяется соотношением

$$\int_{\tilde{\Omega}_i \cap e_n} B_x d\Omega \approx B_x \int_{\tilde{\Omega}_i \cap e_n} d\Omega = |\tilde{\Omega}_i \cap e_n| B_x$$

($\tilde{\Omega}_i \cap e_n$ — часть контрольного объема, принадлежащая конечному элементу e_n). Нетрудно заметить, что $\tilde{\Omega}_i \cap e_n = \frac{1}{3}|e_n|$. Таким образом, элементы локальной матрицы массы имеют вид $m_{ij}^\Omega = \frac{1}{3}|e_n|\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Матрицы первых производных Q_x, Q_y

Операторы первого порядка аппроксимируем, используя предположение о линейности подынтегральной функции. Тогда

$$\int_{\tilde{\Omega}_i \cap e_n} \frac{\partial B_x}{\partial x} d\Omega \approx B_x \int_{\tilde{\Omega}_i \cap e_n} K_2^n d\Omega = |\tilde{\Omega}_i \cap e_n| K_2^n B_x = \frac{1}{3}|e_n| K_2^n B_x,$$

где K_2^n — вторая строка из матрицы коэффициентов (23); B_x — сеточные значения функции. Элементы локальных матриц имеют вид

$$(q_x)_{ij}^\Omega = \frac{1}{3}|e_n|k_{2j}^n, \quad (q_y)_{ij}^\Omega = \frac{1}{3}|e_n|k_{3j}^n.$$

Вектор правой части

Рассмотрим аппроксимацию вектора правой части в общем виде

$$f^\Omega = \int_{\tilde{\Omega}_i} f(\mathbf{x}) d\Omega.$$

На каждом элементе представим функцию $f(\mathbf{x})$ линейным интерполянтном

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^3 f(\hat{x}^k) L_k$$

(L_1, L_2, L_3 — L -координаты на конечном элементе e_n). Как показано в [11], элементы локального вектора правой части можно вычислить по формуле

$$f_i^\Omega = \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ik} \frac{11}{54} + (1 - \delta_{ik}) \frac{7}{108} \right) f(\hat{x}^k) |e_n|.$$

Дискретизация уравнений (17)–(19) методом конечных объемов с использованием линейных и кусочно-постоянных базисных функций на треугольниках дает три матричных уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{M}{\Delta t^2} B_x^{n+1/2} - Q_x F^{n+1/2} &= \tilde{F}_x^{n+1/2}, \\ \frac{M}{\Delta t^2} B_y^{n+1/2} - Q_y F^{n+1/2} &= \tilde{F}_y^{n+1/2}, \\ Q_x B_x^{n+1/2} + Q_y B_y^{n+1/2} &= 0,\end{aligned}$$

где $M = \left\{ \frac{1}{3} |e_n| \delta_{ij} \right\}_{i,j=1}^N$ — матрица массы; $Q_x = \left\{ \frac{1}{3} |e_n| k_{2j}^n \right\}_{i,j=1}^N$, $Q_y = \left\{ \frac{1}{3} |e_n| k_{3j}^n \right\}_{i,j=1}^N$ — матрицы первых производных;

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x^{n+1/2} &= \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - c^2 L \right) B_x^{n-1/2} - \frac{M}{\Delta t^2} B_x^{n-3/2} + F_x^{n+1/2}; \\ \tilde{F}_y^{n+1/2} &= \left(\frac{2M}{\Delta t^2} - c^2 L \right) B_y^{n-1/2} - \frac{M}{\Delta t^2} B_y^{n-3/2} + F_y^{n+1/2};\end{aligned}$$

$F_x^{n+1/2}$, $F_y^{n+1/2}$ — векторы правых частей [12, 13]. Для электрического поля система уравнений имеет аналогичный вид.

3. Алгоритмы решения матричных систем линейных уравнений

Алгоритм Удзавы

Рассмотрим алгоритм Удзавы [14], ориентированный на решение задач о нахождении седловой точки. Пусть H_1, H_2 — конечномерные гильбертовы пространства со скалярным произведением (\cdot, \cdot) , которое определяется в зависимости от класса рассматриваемых функций. Сформулируем абстрактную задачу о седловой точке: найти $\mathbf{X} \in H_1$, $\mathbf{Y} \in H_2$, являющиеся решением матричной системы

$$\begin{bmatrix} M & Q^T \\ Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Здесь $\mathbf{F} \in H_1$, $\mathbf{G} \in H_2$, $M : H_1 \rightarrow H_1$ — линейный, симметричный, положительно определенный оператор, $Q^T : H_2 \rightarrow H_1$ — линейный оператор, сопряженный с $Q : H_1 \rightarrow H_2$. Применяя блочное исключение, из (28) получим

$$QM^{-1}Q^T\mathbf{Y} = QM^{-1}\mathbf{F} - \mathbf{G}.$$

Очевидно, что матрица $QM^{-1}Q^T$ симметрична и положительно определена, так как матрица M — симметричный, положительно определенный оператор. В [14] показано, что

$$(QM^{-1}Q^T\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \sup_{\mathbf{U} \in H_1} \frac{(\mathbf{V}, Q\mathbf{U})^2}{(M\mathbf{U}, \mathbf{U})}.$$

Следовательно, необходимым и достаточным условием единственности решения (28) является выполнение условия Ладыженской — Бабушки — Бреззи. Пусть заданы начальные приближения $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$. Определим последовательность $\{(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ [14]:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + M^{-1}(\mathbf{F} - (M\mathbf{X}_i + Q^T\mathbf{Y}_i)), \\ \mathbf{Y}_{i+1} = \tau(Q\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{G}) \end{cases}$$

(τ — некоторое действительное число). Рассмотрим применение алгоритма Удзавы на примере уравнений для магнитного поля. Волновые уравнения Максвелла эквивалентны трем матричным уравнениям на каждом временном шаге:

$$\frac{M}{\Delta t^2} B_x + Q_x^T P = \tilde{F}_x, \quad (29)$$

$$\frac{M}{\Delta t^2} B_y + Q_y^T P = \tilde{F}_y, \quad (30)$$

$$Q_x B_x + Q_y B_y = 0. \quad (31)$$

Систему (29)–(31) представим в виде

$$\begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 & Q_x^T \\ 0 & \tilde{M} & Q_y^T \\ Q_x & Q_y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где $\tilde{M} = M/\Delta t^2$. Введем обозначения

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & \tilde{M} \end{bmatrix}, \quad Q = [Q_x, Q_y], \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \end{bmatrix}$$

и систему (32) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & Q^T \\ Q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

(матрица \bar{M} — диагональная). Как отмечено выше, при использовании функций первого порядка для аппроксимации физических переменных и функций нулевого порядка для множителей Лагранжа условие ЛББ выполняется. Следовательно, для решения системы (33) можно применить алгоритм Удзавы. Пусть заданы начальные приближения B_x^0, B_y^0, P^0 . Определим последовательность

$$\begin{cases} B_x^{i+1} = B_x^i + \tilde{M}^{-1}(\tilde{F}_x - (\tilde{M}B_x^i + Q_x^T P^i)), \\ B_y^{i+1} = B_y^i + \tilde{M}^{-1}(\tilde{F}_y - (\tilde{M}B_y^i + Q_y^T P^i)), \\ P^{i+1} = P^i + \tau(Q_x B_x^i + Q_y B_y^i), \end{cases}$$

где τ — некоторое действительное число. Так как матрица массы диагонализирована, вычисление обратной к ней матрицы не требует больших затрат.

Регуляризация по Тихонову

Рассмотрим при фиксированном моменте времени систему матричных уравнений (29)–(31), полученных конечно-элементной аппроксимацией. Из первых двух уравнений выразим B_x, B_y :

$$B_x = \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \left(-Q_x^T P + \tilde{F}_x \right), \quad (34)$$

$$B_y = \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \left(-Q_y^T P + \tilde{F}_y \right). \quad (35)$$

Полученные выражения подставим в уравнение (31):

$$Q_x \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \left(-Q_x^T P + \tilde{F}_x \right) + Q_y \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \left(-Q_y^T P + \tilde{F}_y \right) = 0 \quad (36)$$

и разрешим (36) относительно множителя Лагранжа:

$$Q_x \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} Q_x^T P + Q_y \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} Q_y^T P = Q_x \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \tilde{F}_x + Q_y \left(\frac{M}{\Delta t^2} \right)^{-1} \tilde{F}_y.$$

Так как матрица M диагонализирована, она перестановочна с матрицами Q_x, Q_y . Тогда уравнение относительно P примет вид

$$AP = F, \quad (37)$$

где $A = (Q_x Q_x^T + Q_y Q_y^T)$, $F = Q_x \tilde{F}_x + Q_y \tilde{F}_y$. Решив (37), из (34), (35) получим B_x, B_y . Однако система (37) плохо обусловлена, и задача нахождения множителя Лагранжа требует регуляризованного алгоритма [15]. Найдем решение P_ε , доставляющее минимум функционалу

$$M^\alpha[P, F] = \|AP - F\|^2 + \varepsilon \|P\|^2.$$

Из условия экстремума $\frac{\partial M^\alpha[P, F]}{\partial P} = 0$ для определения регуляризованного решения P_ε получим

$$(A^T A + \varepsilon I) P_\varepsilon = A^T F. \quad (38)$$

Выбор параметра регуляризации ε может оказать существенное влияние на скорость сходимости метода сопряженных градиентов, которым решается система линейных алгебраических уравнений (38).

4. Результаты численного моделирования

Представленные в статье методы решения нестационарных уравнений Максвелла в физических переменных реализованы и исследованы в серии расчетов высокочастотных электромагнитных полей с высокой и низкой амплитудами при различных параметрах дискретизации области и временного интервала. В качестве тестов исследовалось распространение поперечных электромагнитных волн в плоском квадратном резонаторе с абсолютно проводящими стенками. Данные задачи описываются двумерными однородными уравнениями Максвелла и имеют аналитическое решение.

В первом тесте [4] в начальный момент времени задавалось распределение z -компоненты магнитного поля

$$B_z(\mathbf{x}, 0) = B_0 \cos(ax) \cos(by), \quad (39)$$

где $a = \frac{m\pi}{x_0}$, $b = \frac{n\pi}{x_0}$. В расчетах полагалось $B_0 = 1, n = m = 1, x_0 = y_0 = 1$. В расчетной области вводилась равномерная квадратная сетка с шагом $h = 0.01$, каждая ячейка которой делилась диагональю на два треугольника для получения треугольной сетки. Результаты вычислений, а также соответствующее аналитическое решение для компоненты электрического поля E_x приведены на рис. 3.

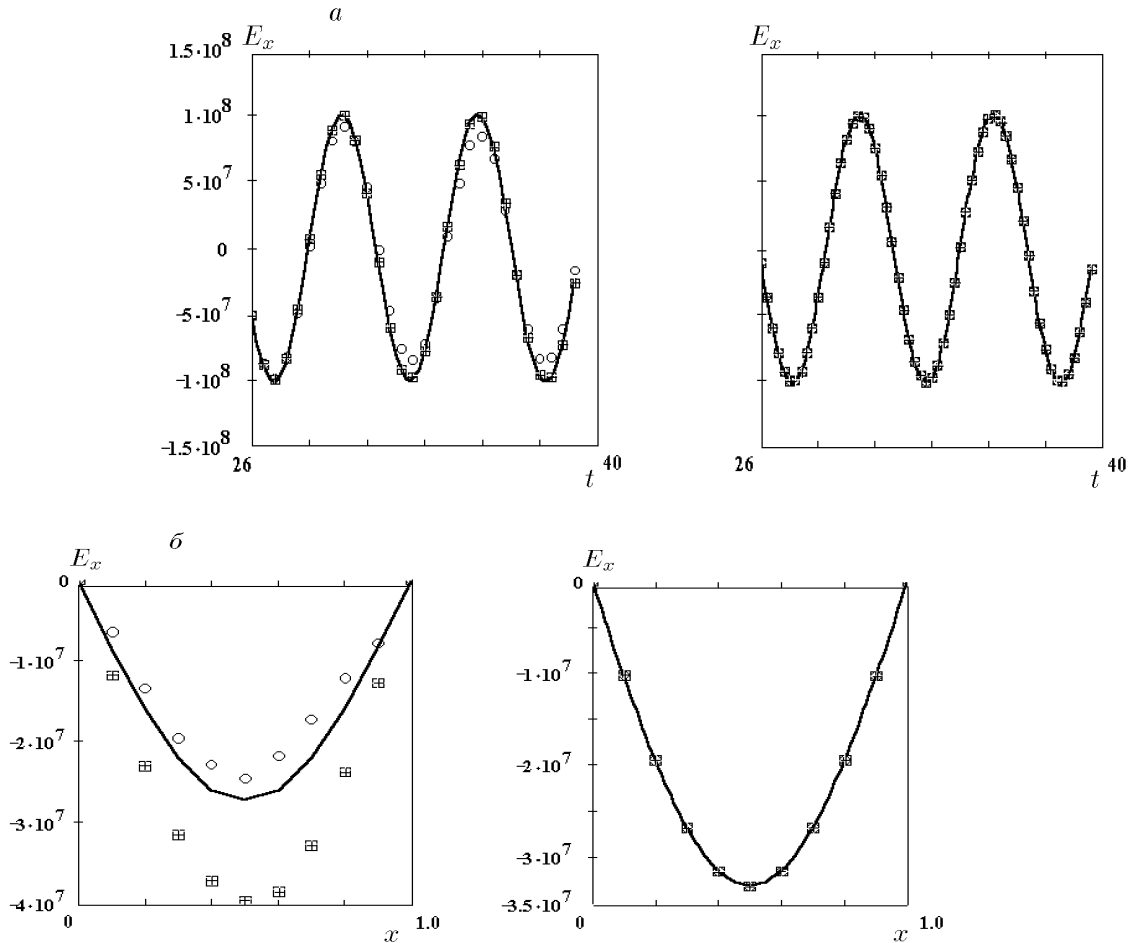


Рис. 3. Зависимость электрического поля E_x от времени (а) и распределение его в сечении $y = 0$ (б) в точке $(0.3, 0.4)$ при $\Delta t = 4 \cdot 10^{-10}$ с, $h = 0.1$ (слева) и $\Delta t = 4 \cdot 10^{-11}$ с, $h = 0.01$ (справа).

(—) — аналитическое решение; (□) — метод конечного объема;

(○) — метод конечных элементов + регуляризация; (+) — то же + алгоритм Удзавы.

Как видно из графиков, соответствие между результатами численного моделирования и аналитическим решением достаточно хорошее.

Во втором тесте [3] в начальный момент времени задавалось распределение z -компоненты электрического поля

$$E_z(\mathbf{x}, 0) = E_0 \cos(ax) \cos(by),$$

где $a = \frac{m\pi}{x_0}$, $b = \frac{n\pi}{x_0}$. В расчетах полагалось $E_0 = 1, n = m = 1, x_0 = y_0 = 1$. Магнитное поле имеет ненулевыми x - и y -компоненты. На рис. 4 представлено аналитическое и численное решения компонент магнитного поля B_x .

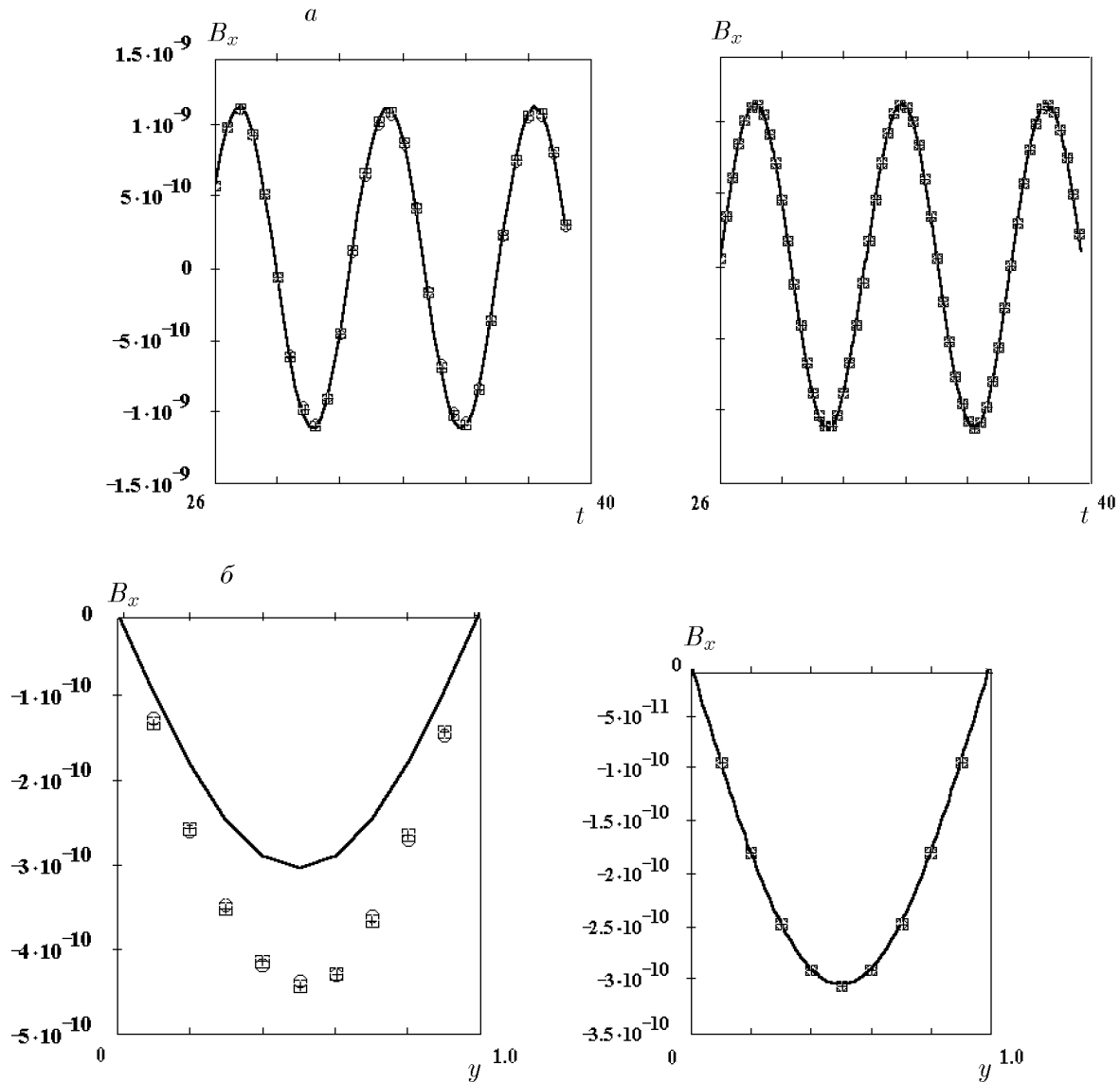


Рис. 4. Зависимость магнитного поля B_x от времени (а) и распределение его в сечении $x = 0$ (б) в точке $(0.3, 0.4)$ при $\Delta t = 4 \cdot 10^{-10}$ с, $h = 0.1$ (слева) и $\Delta t = 4 \cdot 10^{-11}$ с, $h = 0.001$ (справа).

Условные обозначения см. в подрисуночной подписи к рис. 3.

Заключение

Представленные в статье методы решения нестационарных уравнений Максвелла в физических переменных реализованы и исследованы в серии расчетов высокочастотных электромагнитных полей с высокой и низкой амплитудами при различных параметрах дискретизации области и временного интервала. Сравнение методов показало, что предпочтение следует отдать алгоритму Удзавы, поскольку этот метод обладает лучшей сходимостью и точностью, требует меньшее число операций умножения матрицы на вектор. Полученные результаты хорошо согласуются с известными аналитическими решениями тестовых задач [3, 4], что позволяет сделать вывод о возможности применения данного подхода для расчета нестационарных электромагнитных полей.

Список литературы

- [1] ASSOUS F., DEGOND P., HEITZE E., RAVIART P. A., SEGRE J. On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations // J. Comp. Phys. 1993. V. 109. P. 222–237.
- [2] ASSOUS F., DEGOND P., SEGRE J. Numerical approximation of the Maxwell equations in inhomogeneous media by P1 conforming finite element method // J. Comp. Phys. 1996. V. 128. P. 363–380.
- [3] MUNZ C.-D., SCHNEIDER R., VOS U. A finite-volume method for the maxwell equations in the time domain. Forschungszentrum Karlsruhe “Technik und Umwelt”. Karlsruhe, 1996.
- [4] HERMELINE F. Two coupled particle-finite volume methods using delaunay-voronoi meshes for the approximation of vlasov-poisson and vlasov-maxwell equations // J. Comp. Phys. 1993. V. 106. P. 1–18.
- [5] TROWBRIDGE C. W., BRYANT C. F., EMSON C. R. I. Some developments in electromagnetic field computation // Proc. 7th MAFELAP Conf. on the Math. of Finite Elements and Appl., 1990.
- [6] БЕРЕЗИН Ю. А., ВШИВКОВ В. А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. Новосибирск: Наука, 1980.
- [7] BORIS J. P. Relativistic plasma simulation — optimization of a hybrid code coordinates // Proc. 4th Intern. Conf. on the Numerical Simulation of Plasmas, Washington, Sept. 1970. P. 3–6.
- [8] MARDER B. A method for incorporating Gauss’ law into electromagnetic PIC codes // J. Comp. Phys. 1987. V. 68. P. 48–51.
- [9] VILLASENOR J., BUNEMAN O. Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers // Comp. Phys. Commun. 1992. V. 69. P. 306–361.
- [10] БЕРЕЗИН Ю. А., БРЕЙЗМАН Б. Н., ВШИВКОВ В. А. Численное моделирование инжекции мощного электронного пучка в вакуумную камеру с сильным магнитным полем // ПМТФ. 1981. №1. С. 3–9.
- [11] COULLIETTEAND D. L., KOCH M. On the difficulties and remedies in enforcing the $\text{div} = 0$ condition in the finite element analysis of thermal plumes with strongly temperature-dependent viscosity // Intern. J. Num. Methods in Fluids. 1994. V. 18. P. 189–214.
- [12] ШУРИНА Э. П., ВОЙТОВИЧ Т. В. Анализ алгоритмов методов конечных элементов и конечного объема на неортогональных сетках при решении уравнений Навье—Стокса // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, №4. С. 84–104.
- [13] РОЯК М. Э., СОЛОВЕЙЧИК Ю. Г., ШУРИНА Э. П. Сеточные методы решения краевых задач математической физики: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998.
- [14] BRAMBLE J. H., PASCIAK J. E., VASSILLV A. T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems // SIAM J. Num. An. 1997. V. 34, N 3. P. 1072–1092.
- [15] ТИХОНОВ А. Н., АРСЕНИН В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.