

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА*

А. В. АВДЕЕВ

*Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: avdeev@sscc.ru

М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ-МЛ.

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Новосибирск, Россия*

e-mail: mmlavr@nsu.ru

Э. В. ГОРЮНОВ

*Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: elder@nmsf.sccc.ru

Р. А. ВАЛИУЛЛИН, А. Ш. РАМАЗАНОВ

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

e-mail: ramazanovas@bashedu.ru

The numerical approach to processing the results of measurements, which are obtained at exploitation of the oil well, is suggested. Joint determination of parameters of bottomhole formation zone, i. e. formation pressure, water permeability of bed and radius of bottomhole formation zone, is of interest of oilmen and geophysicists. The algorithm for solving the inverse problem, which is based on using the minimization technique of objective functionals, is developed and tested on model data.

Введение

В работе предлагается численный подход к математической обработке результатов измерений, полученных при эксплуатации нефтяной скважины, основанный на применении теории обратных задач математической физики и хорошо зарекомендовавший себя при решении ряда задач разведочной геофизики. Речь идет о гидродинамическом методе зондирования нефтяных пластов, основанном на измерении давления и расхода жидкости в стволе скважины [1, 2]. В качестве исходных данных используются (и обрабатываются)

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №99-05-65372, 99-05-64538, 01-05-64704, 01-15-98544, 01-15-99092.

© А. В. Авдеев, М. М. Лаврентьев-мл., Э. В. Горюнов, Р. А. Валиуллин, А. Ш. Рамазанов, 2001.

кривые изменения давления (КИД) во времени, которые в больших объемах и попутно с другой информацией получают при освоении и испытании нефтяных скважин.

Технология исследования скважины следующая:

- 1) для записи изменения давления во времени на забое скважины помещают автономный манометр;
- 2) в течение времени t_v в начале освоения невозмущенного пласта с помощью различных устройств понижают давление в скважине;
- 3) после снижения давления (в течение времени t_v) прекращают воздействие на пласт.

По одной технологии скважину закрывают, по другой — перестают отбирать притекающую из пласта жидкость, и она скапливается в стволе скважины. При этом уровень жидкости поднимается и растет забойное давление. Рост давления после прекращения воздействия на пласт зависит от параметров пласта и процессов в стволе скважины (мешающих факторов).

Полезную информацию о параметрах пласта находят, анализируя кривую восстановления давления (КВД) и кривую притока жидкости (КП).

Математическая модель процесса, учитывающая все современные представления о физике его протекания, является слишком сложной, недоступной для исследования и анализа. Поэтому рассматривается упрощенная модель как среды, так и процесса, которая тем не менее адекватно отражает основные тенденции его протекания. А именно, рассматривается однофазная фильтрация в горизонтальном, неоднородном по простираению пласте, ограниченном круговым контуром питания. Неоднородность пласта задается функцией проницаемости, т. е. предполагается, что все остальные параметры вдоль пласта постоянны. Гидропроводность и пьезопроводность пласта считаются связанными с проницаемостью линейно. Одно граничное условие задает известное изменение забойного давления, а другое используется при расчете КП и КВД.

При сделанных предположениях модельные уравнения оказываются относительно простыми и численное решение прямой задачи (определение поля давления в неоднородном пласте при испытании скважины в предположении известных параметров пласта) не представляет затруднений при использовании современных персональных компьютеров. Имеются широко применяемые на практике алгоритмы обработки КВД, позволяющие определить параметры удаленных от скважины зон пласта [2]. Однако для нефтяников и геофизиков особый интерес представляет определение параметров призабойной зоны пласта. Исходными данными для решения этой задачи являются кривая изменения забойного давления, известная из промыслового эксперимента, давление на контуре питания, гидропроводность удаленной зоны, кривая снижения забойного давления во времени в процессе воздействия на пласт (при свабировании или компрессировании).

В работе предложен и апробирован на модельных данных алгоритм решения некоторых из вышеуказанных обратных задач, основанный на использовании методов минимизации так называемых целевых функционалов.

1. Постановка задачи

Обозначая давление пласта через p_1 при $r_c < r < R_1$ и p_2 при $R_1 < r < R_k$, рассмотрим следующую систему [3]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi(r) \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right), \quad r_c < r < R_k, \quad t > 0 \quad (1)$$

(χ — пьезопроводность пласта, $\text{м}^2/\text{с}$; кусочно-постоянная функция χ моделирует кольцевую призабойную зону пласта (ПЗП) ($r_c < r < R_1$) с гидропроводностью σ_1 (пьезопроводностью χ_1) и пласт с гидропроводностью σ_2 (пьезопроводностью χ_2)) с начальными и граничными условиями

$$p|_{t=0} = P_{pl}, \quad (2)$$

$$p|_{r=R_k} = P_{pl}, \quad p|_{r=r_c} = \phi(t), \quad t < t_v, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial p_1}{\partial t} - C \frac{\partial p_1}{\partial r} \right|_{r=r_c} = 0, \quad t > t_v. \quad (4)$$

По имеющейся информации $P_{\text{exp}}(r_c, t)$ (измеренное давление на стенке скважины) требуется определить функцию $\chi(r)$. Для упрощения решения представим искомую функцию $\chi(r)$ в виде кусочно-постоянной функции $\chi(r) = \{\chi_1, r_c < r < R_1; \chi_2, R_1 < r < R_k\}$. Тогда к постановке задачи (1)–(4) необходимо добавить следующие условия сопряжения на границе разрыва:

$$[p_1]_{r=R_1} = 0, \quad \left[\chi_1 \frac{\partial p_1}{\partial r} \right]_{r=R_1} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\chi(r) = \frac{\sigma(r)}{h\beta^*}$, $\sigma(r) = \{\sigma_1, r_1 < r < R_1; \sigma_2, R_1 < r < R_k\}$, $C = 2\pi\sigma(r_c)r_c \frac{\rho g \cos(\alpha)}{S}$ при моделировании КП и $C = 2\pi\sigma(r_c) \frac{r_c}{\beta_l V_p}$ при моделировании КВД.

Параметр влияния ствола скважины C связывает скорость притока жидкости из пласта со скоростью изменения давления в стволе скважины. В первом случае (КП) приток жидкости из пласта приводит к повышению уровня жидкости в стволе скважины и росту гидростатического давления на забое, а во втором — к росту давления из-за сжатия жидкости в закрытом объеме V_p . Подробный вывод граничного условия (4) можно найти в работе [4].

В работе приняты следующие обозначения: β^* — упругость пласта, Па^{-1} ; β_l — сжимаемость жидкости, Па^{-1} ; σ — гидропроводность, $\text{м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$; h — толщина пласта, м; ρ — плотность жидкости в стволе скважины, $\text{кг}/\text{м}^3$, предполагается постоянной; S — площадь поперечного сечения потока жидкости вблизи уровня, м^2 ; α — угол отклонения ствола скважины от вертикали в интервале перемещения уровня; t_v — время воздействия на пласт, с; t_k — время окончания процесса, с; r_c — радиус скважины, м; R_1 — радиус ПЗП, м; R_k — радиус пласта, м; g — ускорение свободного падения, $\text{м}/\text{с}^2$; $\phi(t)$ — изменение забойного давления в период t_v возмущения пласта.

Необходимо по дополнительной информации определить один или несколько из следующих параметров: пластовое давление P_{pl} , гидропроводность ПЗП σ_1 , гидропроводность пласта σ_2 , радиус призабойной зоны R_1 .

Классическая схема решения такого типа обратных задач такова [5]:

- 1) делается предположение о структуре пласта, т. е. о значениях параметров;
- 2) численно решается прямая задача (1)–(5);
- 3) вычисляется след решения такой задачи в точке $r = r_c$;
- 4) рассчитывается отклонение этого следа от заданной дополнительной информации $P_{\text{exp}}(r_c, t)$ $t_v < t < t_k$;
- 5) выбираются новые значения параметров пласта, которые должны дать меньшее отклонение данных на шаге 4, и т. д.

Другими словами, алгоритм требует многократного решения “прямой задачи”. С этим обстоятельством связана высокая “вычислительная стоимость” большинства обратных задач, которые невозможно (или нецелесообразно) решать методом перебора всех возможных значений искомых параметров [6, 7].

2. Решение прямой задачи

Прямой задачей мы называем нахождение поля давлений $p_i(r, t)$ как решения задачи (1)–(5) при известных значениях параметров пласта (σ_1, σ_2, R_1).

Для ее численного решения использовался алгоритм, реализующий конечно-разностный метод на неравномерной по r сетке (неявная схема). Программа была написана на алгоритмических языках Pascal и C++, оттестирована и включена в программный комплекс для решения обратной задачи.

Для проведения численных экспериментов использовался компилятор Watcom C++. Расчеты проводились на процессоре Pentium класса Celeron 466. Решение одной прямой задачи при заданных параметрах σ_1, σ_2 и R_1 занимает 15 с.

Выбирались следующие значения параметров: $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 10^{-9} \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$; $r_c < R_1 < R_k$; β^* — упругость пласта, $2.25 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; h — толщина пласта, 5 м; ρ — плотность жидкости, 1000 кг/м^3 ; S — площадь поперечного сечения потока жидкости, $2921 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$; $\alpha = 0$; t_v — время воздействия на пласт равно 3600 с (1 ч); t_k — время окончания процесса равно 36 000 с (10 ч); $r_c = 0.108 \text{ м}$; $R_k = 100 \text{ м}$; $g = 9.81 \text{ м/с}^2$; $P_{pl} = 10^7 \text{ Па}$.

Модельная функция $P_{\text{exp}}(r_c, t)$, показывающая изменение забойного давления, представлена на рис. 1. Напомним, что эта функция является исходными данными для алгоритма обращения, восстанавливающего значения требуемых коэффициентов.

3. Решение обратной задачи

Для выявления особенностей постановки задачи первоначально рассматривалась следующая упрощенная постановка:

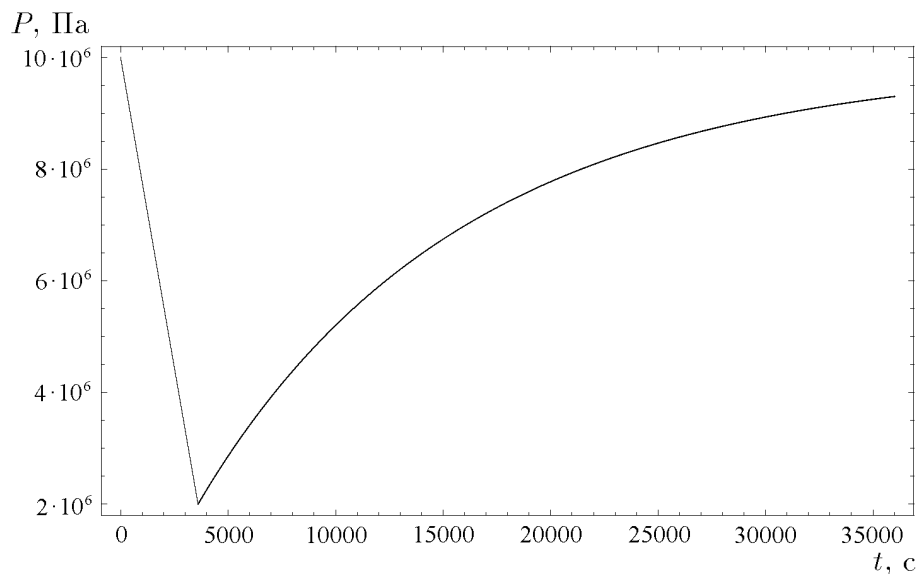


Рис. 1. Модельная функция $P_{\text{exp}}(r_c, t)$.

Обратная задача 1. В предположении, что гидропроводность σ_2 удаленной зоны пласта и пластовое давление P_{pl} известны, определить гидропроводность ПЗП σ_1 и радиус призабойной зоны R_1 .

Для решения этой и других обратных задач был рассмотрен целевой функционал следующего вида:

$$\Phi_1[R_1, \sigma_1] = \int_{t_v}^{t_k} \|P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)\|^2 dt, \quad (6)$$

где $P_{\text{exp}}(r_c, t)$ — входные данные; $P_{\text{dir}}(r_c, t)$ — решение прямой задачи при текущих (пробных) значениях R_1 и σ_1 .

На рис. 2 показано поведение функционала Φ_1 (линии уровня) в зависимости от значений σ_1 и R_1 (R_1 измеряется в метрах, σ_1 — в $\text{м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$). Рисунок получен после перебора по сетке $0.3 \cdot 10^{-11} < \sigma_1 < 1.3 \cdot 10^{-11}$ с шагом $\Delta\sigma_1 = 0.025 \cdot 10^{-11}$ и $0.2 < R_1 < 1.2$ с шагом $\Delta R_1 = 0.025$. Точнее, сначала был осуществлен перебор по сетке в широком интервале изменения параметров с относительно большим шагом, а затем проведен перебор с более мелким шагом в вышеуказанных границах. Выбор указанного интервала для перебора с мелким шагом, в котором содержатся истинные значения искомых параметров, сделан с учетом решения третьей обратной задачи, в рамках которого были определены значения σ_1 и R_1 . Метод перебора осуществлялся с целью выяснения структурных особенностей целевого функционала, которые учитывались в дальнейшем при построении более сложного алгоритма обращения, не основанного на методе перебора.

Видно, что минимум функционала располагается в сравнительно узком “овраге”, в котором находится также значительное количество локальных минимумов. Этот факт затрудняет применение стандартных оптимизационных процедур.

В результате вышеописанного перебора были восстановлены следующие значения параметров: $R_1 = 0.775$ м, $\sigma_1 = 0.875 \cdot 10^{-11}$ $\text{м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$.

Оказалось, что минимум функционала Φ_1 , достигающийся при этих значениях параметров, незначительно отличается от его значений при другом выборе параметров R_1 и σ_1 , расположенных на главной ветке “оврага” (см. рис. 2).

На рис. 3, 4 представлены соответственно абсолютная

$$\Delta(t) = |P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)|$$

и относительная

$$\delta(t) = 100 \% \left| \frac{P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)}{P_{\text{exp}}(r_c, t)} \right|$$

погрешности для решения задачи при $R_1 = 0.775$ м, $\sigma_1 = 0.875 \cdot 10^{-11}$ $\text{м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$ (данные значения получены методом перебора по сетке в области, указанной на рис. 2).

Опыт решения ряда обратных задач, связанных с разведочной геофизикой, показывает, что целевой функционал обычно имеет более простую структуру в случае “фиксированной геометрии” среды, когда точки скачкообразного изменения ее параметров заданы и определению подлежат лишь параметры среды [6, 7]. Поэтому была исследована следующая задача.

Обратная задача 2. Требуется совместно определить гидропроводность ПЗП σ_1 и гидропроводность пласта σ_2 при известном радиусе R_1 призабойной зоны.

При решении этой обратной задачи использовался следующий метод: для фиксированного значения R_1 методом наискорейшего спуска [8] производится поиск σ_1 и σ_2 , дающих

минимум целевого функционала

$$\Phi_2[\sigma_1, \sigma_2] = \int_{t_v}^{t_k} \|P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)[\sigma_1, \sigma_2]\|^2 dt.$$

Для расчета градиента была использована ранее отлаженная на других задачах программа (в дальнейшем предполагается вывести и использовать аналитические формулы для градиента). В настоящей работе градиент целевого функционала следующим образом аппроксимировался конечными разностями:

$$\nabla_{\sigma_1} \Phi_2[\sigma_1, \sigma_2] = \frac{\Phi_2[\sigma_1 + \Delta\sigma_1, \sigma_2] - \Phi_2[\sigma_1 - \Delta\sigma_1, \sigma_2]}{2 \Delta\sigma_1},$$

$$\nabla_{\sigma_2} \Phi_2[\sigma_1, \sigma_2] = \frac{\Phi_2[\sigma_1, \sigma_2 + \Delta\sigma_2] - \Phi_2[\sigma_1, \sigma_2 - \Delta\sigma_2]}{2 \Delta\sigma_2}.$$

На рис. 5 представлены линии уровня функционала при $R_1 = 0.775$ м. Его структура, как и ожидалось, оказалась проще, чем в случае обратной задачи 1. “Овраг” не имеет локальных минимумов, и точка минимума функционала ($\sigma_1 = 0.87338 \cdot 10^{-11}$ м³/(Па·с), $\sigma_2 = 10.024 \cdot 10^{-11}$ м³/(Па·с)) при фиксированном значении R_1 определяется с хорошей точностью.

На рис. 5 значения функционала на соседних линиях уровня идут с постоянным шагом, равным 0.005. Восстановление точки минимума произошло за 20 итераций метода наискорейшего спуска (время счета 180 мин.)

Наконец, была рассмотрена полная постановка.

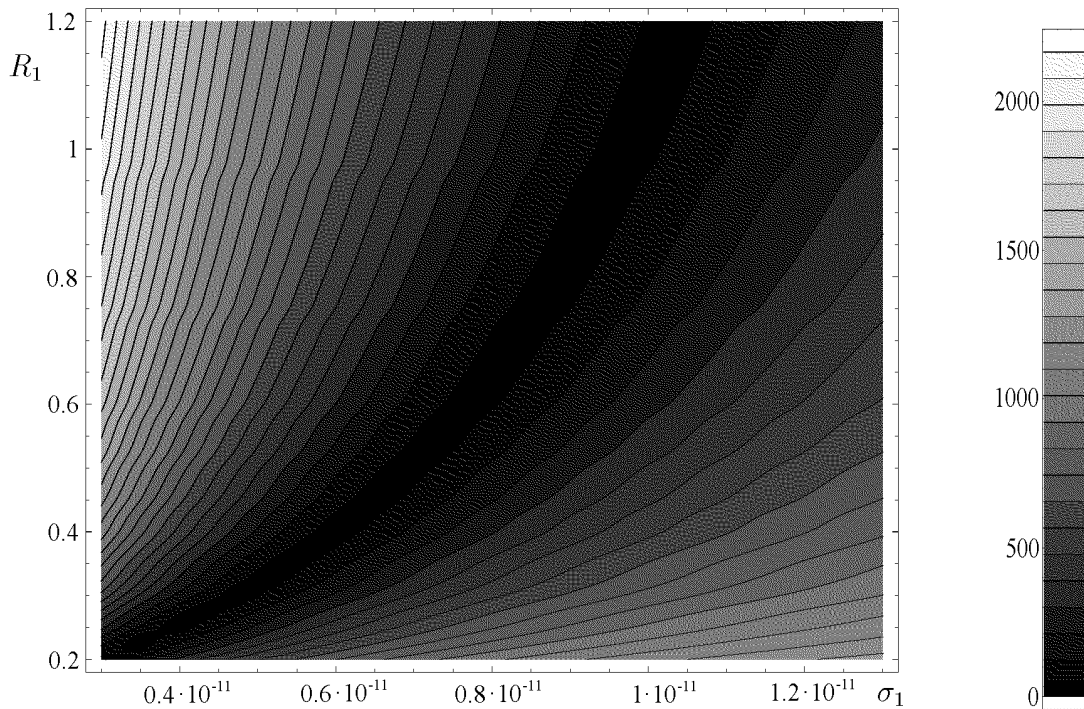
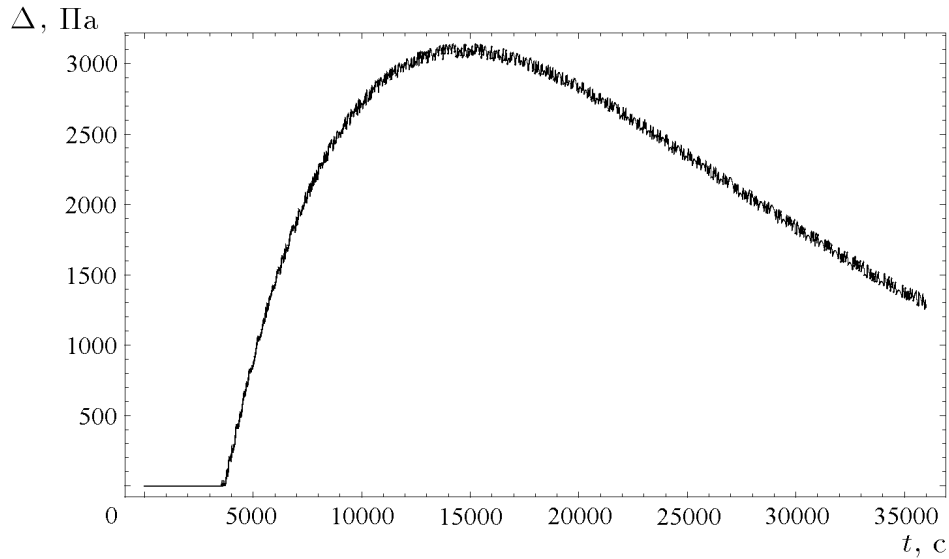
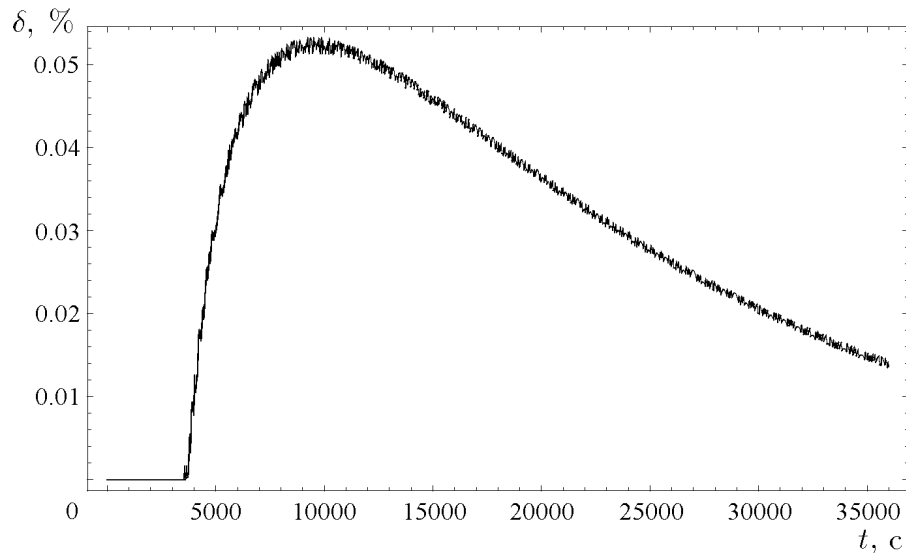


Рис. 2. Линии уровня функционала Φ_1 .

Рис. 3. Абсолютная погрешность решения $P_{\text{exp}}(r_c, t)$.Рис. 4. Относительная погрешность решения $P_{\text{exp}}(r_c, t)$.

Обратная задача 3. Требуется совместно определить гидропроводность ПЗП σ_1 , гидропроводность пласта σ_2 и радиус R_1 призабойной зоны.

Для ее решения использовался следующий алгоритм. Были выбраны границы изменения параметра R_1 : $R_1^{\text{beg}} \dots R_1^{\text{end}}$, затем для каждого зафиксированного R_1^i из этого промежутка осуществлялся поиск σ_1 и σ_2 , дающих минимум целевого функционала

$$\Phi_3[\sigma_1, \sigma_2, R_1] = \int_{t_v}^{t_k} \|P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)[\sigma_1, \sigma_2, R_1]\|^2 dt.$$

Поиск σ_1 и σ_2 осуществлялся методом наискорейшего спуска. Однако при попадании в “овраг” не удавалось достаточно точно отыскать направление градиента функционала (ввиду того, что градиент аппроксимировался конечными разностями), поэтому спуск к точке минимума требовал чрезмерно больших временных затрат.

С целью избежать этих затруднений был предложен следующий метод. Вводились минимизирующие функции

$$S_{\sigma_1}(\sigma_2, R_1)[N_{\sigma_1}^G] = \{\sigma_1^* : \min_{\sigma_1^*} \Phi_3[\sigma_1^*, \sigma_2, R_1]\},$$

$$S_{\sigma_2}(\sigma_1, R_1)[N_{\sigma_2}^G] = \{\sigma_2^* : \min_{\sigma_2^*} \Phi_3[\sigma_1, \sigma_2^*, R_1]\},$$

$$S_{R_1}(\sigma_1, \sigma_2)[N_{R_1}^G] = \{R_1^* : \min_{R_1^*} \Phi_3[\sigma_1, \sigma_2, R_1^*]\},$$

т. е. эти функции предоставляли значение параметра (σ_1 , σ_2 или R_1), минимизирующего функционал Φ_3 при заданных двух остальных параметрах. Минимизация осуществлялась методом “золотого сечения” [8], параметр N_*^G задавал число итераций поиска минимума.

Затем проводилась следующая процедура минимизации: начиная с некоторой “удаленной” точки (σ_1^U, σ_2^U) (в данном случае выбирались $\sigma_1^U = 0.001 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$, $\sigma_2^U = 100 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$, значения, лежащие на границе области искомых параметров), находились значения $\sigma_2^* = S_{\sigma_2}\{S_{\sigma_1}(\sigma_2, R_1)[N_{\sigma_1}^G], R_1\}[N_{\sigma_2}^G]$ и $\sigma_1^* = S_{\sigma_1}(\sigma_2, R_1)[N_{\sigma_1}^G]$, т. е. значения σ_1^* и σ_2^* , предоставляющие минимум функционала Φ_3 при заданном значении R_1 .

На рис. 6 представлены функции изменения σ_2 , σ_1 в зависимости от радиуса R_1 и предоставляемый ими минимум функционала Φ_3 . При этом были взяты следующие значения параметров минимизации $N_{\sigma_1}^G = 25$ и $N_{\sigma_2}^G = 25$ (искомые σ_2 , σ_1 при заданном R_1^i находились за $N_{\sigma_1}^G N_{\sigma_2}^G = 625$ итераций (решений прямой задачи), т. е. около 150 мин).

Минимальной величины функционал достигал при следующих значениях параметров: $R_1 = 1.1 \text{ м}$; $\sigma_1 = 1.00618225 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$ и $\sigma_2 = 10.00008904 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{Па}\cdot\text{с})$ (при этом значение функционала было $\Phi_3 = 0.002963657 \text{ Па}^2\cdot\text{с}$). Значения абсолютной $\Delta(t)$ и относительной $\delta(t)$ погрешностей представлены на рис. 7 и 8.

Для одновременного восстановления параметров σ_2 , σ_1 и R_1 возможно использовать

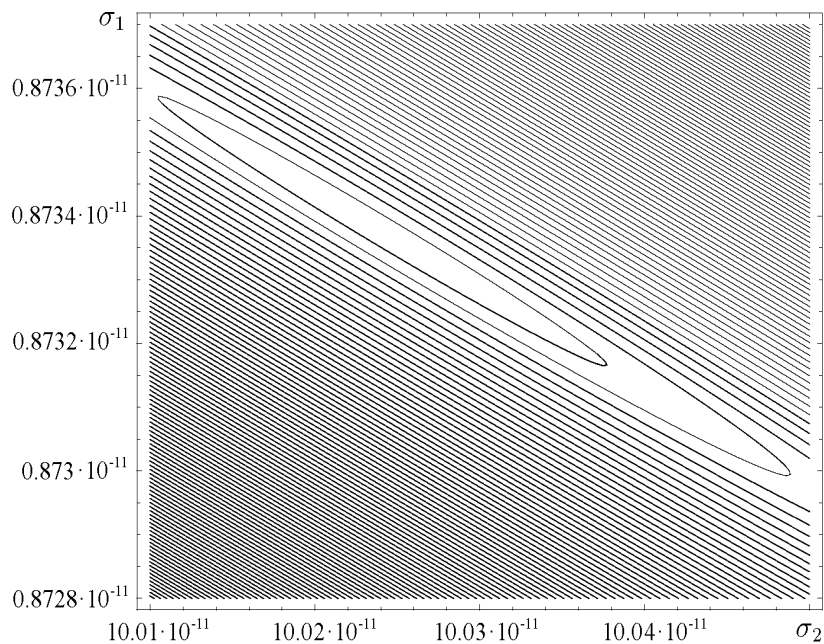


Рис. 5. Линии уровня функционала Φ_2 .

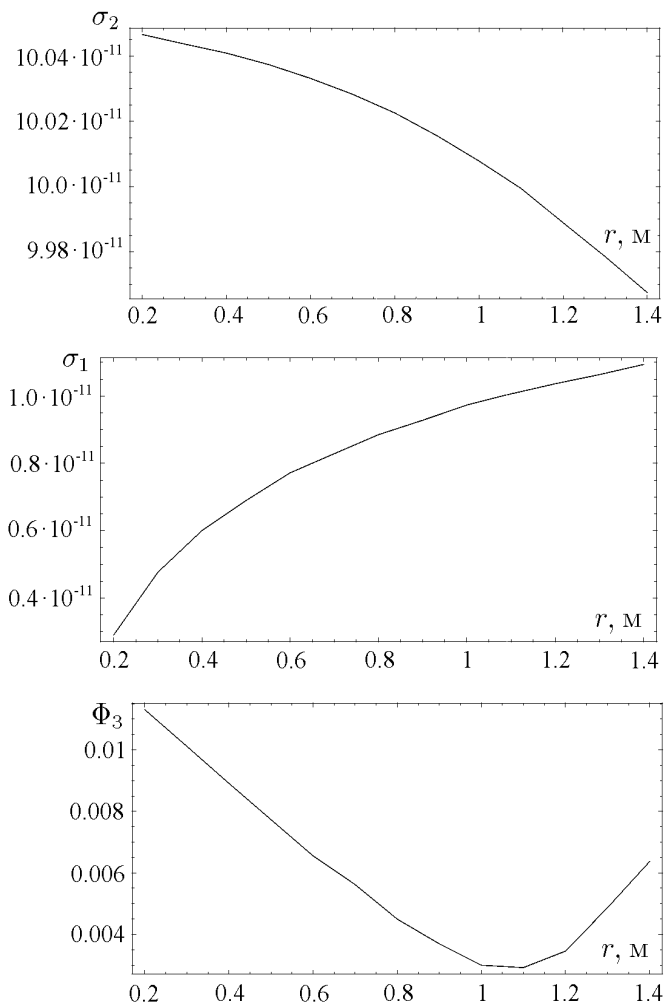


Рис. 6. Функции изменения σ_2 , σ_1 в зависимости от радиуса R_1 и предоставляемый ими минимум функционала Φ_3 .

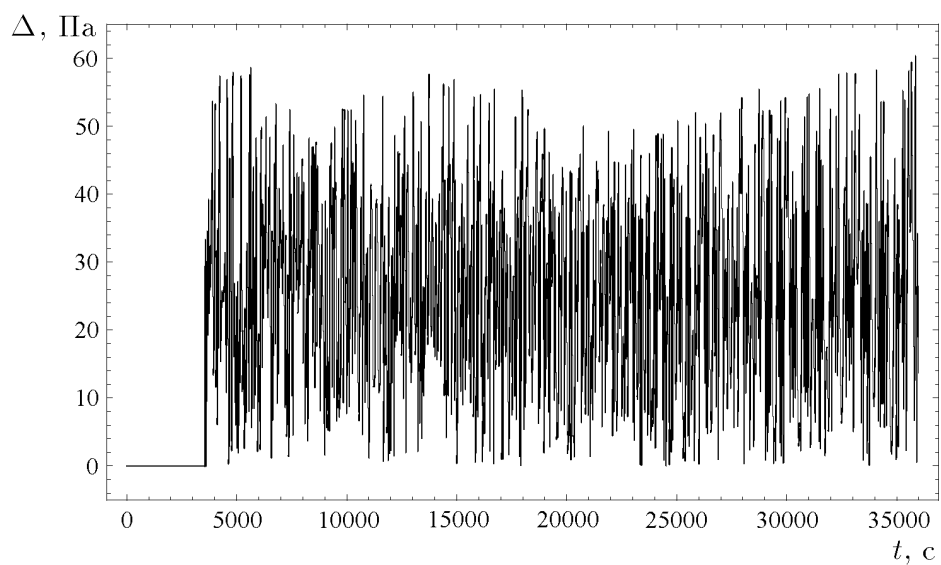


Рис. 7. Абсолютная погрешность решения $P_{\text{exp}}(r_c, t)$.

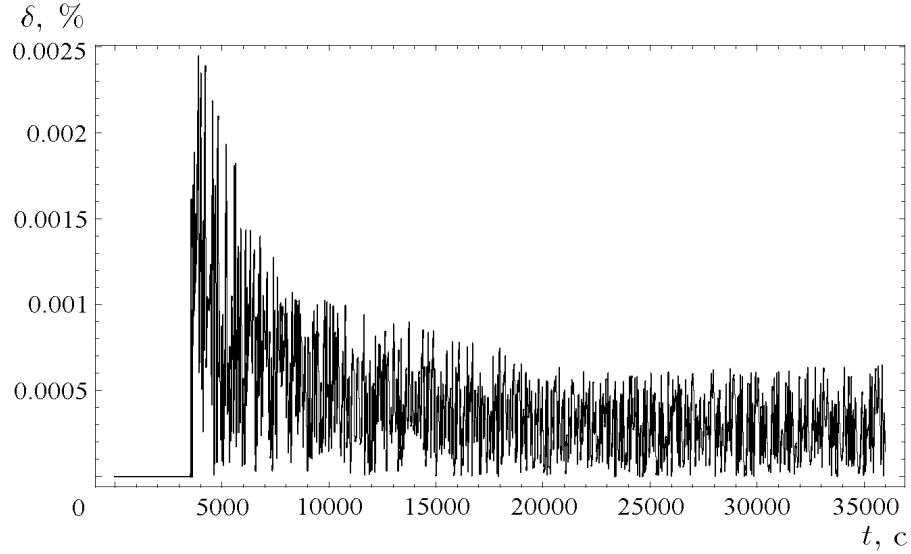


Рис. 8. Относительная погрешность решения $P_{\text{exp}}(r_c, t)$.

минимизирующую функцию

$$S_{R_1} \langle S_{\sigma_2} \{ S_{\sigma_1}(\sigma_2, R_1)[N_{\sigma_1}^G], R_1 \} [N_{\sigma_2}^G], S_{\sigma_1}(\sigma_2, R_1)[N_{\sigma_1}^G], R_1 \rangle [N_{R_1}^G],$$

однако это требует $N_{\sigma_1}^G N_{\sigma_2}^G N_{R_1}^G$ итераций (решений прямой задачи) при $N_{R_1} = 12$ — примерно 30 ч. Поскольку значения функционала Φ_3 весьма малы (см. рис. 6) и относительная интегральная погрешность

$$\delta^I = \frac{100\% \int_{t_v}^{t_k} \left| \frac{P_{\text{exp}}(r_c, t) - P_{\text{dir}}(r_c, t)}{P_{\text{exp}}(r_c, t)} \right| dt}{t_k - t_v}$$

находится в пределах 0.005%, то при внесении погрешности в начальные данные $P_{\text{exp}}(r_c, t)$ минимизирующая функция

$$S_{R_1}(\sigma_1^*, \sigma_2^*) [N_{R_1}^G] = \{ R_1^* : \min_{R_1^*} \Phi_3[\sigma_1^*, \sigma_2^*, R_1^*] \}$$

уже может не быть выпуклой, как на рис. 6.

Как видно, проблема одновременного восстановления σ_1 , σ_2 и R_1 требует дополнительных теоретических и численных исследований.

4. Выводы и предложения. Направления дальнейших исследований

Обычно алгоритм (программное приложение), созданный для конкретной прикладной задачи, не работает (по крайней мере, плохо и ненадежно работает), будучи механически перенесенным на другую задачу. Это вызывается разными причинами, которые можно завуалировать термином “специфика задачи”. Для осознанной адаптации алгоритма к особенностям того или иного приложения необходимо знать его общие свойства, например устойчивость по отношению к параметрам задачи, границы области применимости,

корректность применяемого математического аппарата, который и позволяет повысить эффективность работы за счет предварительного анализа.

В рамках исследуемой обратной задачи авторы планируют провести:

- обоснование корректности постановок прямой и обратной задач;
- исследование вопросов единственности решения;
- получение оценок условной устойчивости решения;
- исследование градиентов и гессианов целевых функционалов (вывод аналитических формул, дифференцируемость по Фреше, вопросы единственности точки минимума);
- изучение возможности применения регуляризации, совмещенных (комплексных) целевых функционалов;
- оптимизацию алгоритма обращения путем использования полуаналитических методов;
- тестирование алгоритма на чувствительность к ошибкам (за шумленности) данных обращения;
- проверку алгоритма на данных натуральных измерений.

Список литературы

- [1] БАСНИЕВ К. С., КОЧИНА И. Н., МАКСИМОВ В. М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.
- [2] БУЗИНОВ С. Н., УМРИХИН И. Д. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов. М.: Недра, 1984. 269 с.
- [3] ZELENYAK T. I., LAVRENTIEV JR. M. M., VISHNEVSKII M. P. Qualitative Theory of Parabolic Equations. Pt I. Netherlands, Utrecht: VSP, 1997. 420 p.
- [4] ВЛЮШИН В. Е. Точное решение задачи о восстановлении давления в скважине // Тр. МИНХ и ГП им. Губкина. 1977. Вып. 129. С. 124–126.
- [5] AVDEEV A. V., LAVRENTIEV JR. M. M., PRIMENKO V. I. Inverse Problems and Some Applications. Novosibirsk: ICM&MG, 1999. 342 p.
- [6] ALEKSEEV A. S., AVDEEV A. V., FATIANOV A. G., CHEVERDA V. A. Wave processes in vertically inhomogeneous media: a new strategy for a velocity inversion // Inverse Problems. 1993. Vol. 9, No. 3.
- [7] AVDEEV A. V., GORYUNOV E. V., LAVRENTIEV JR. M. M., SPIGLER R. Simultaneous Identification of Two Coefficients in a Diffusion Equation. Venice, Italy, 1999. (Prepr. / Institute of Industrial and Appl. Math.; TR-8/99). 22 p.
- [8] ВАСИЛЬЕВ Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.

*Поступила в редакцию 13 апреля 2001 г.,
в переработанном виде — 21 июня 2001 г.*