Вычислительные технологии **Том 7, № 1, 2002**

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ ДЛЯ АНАЛИЗА ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

С. Н. Авдеенко, В. В. Домбровский
Томский государственный университет, Россия
e-mail: avdeenko@ef.tsu.ru, dombrovs@ef.tsu.ru

In the present paper the use of interval arithmetic methods for the analysis of financial transaction is suggested. The formulas for main characteristics are obtained with the help of generalized interval arithmetic. The computational results are presented.

Введение

Современные финансово-банковские операции (коммерческие сделки, инвестиции в реальные или финансовые активы, кредитные соглашения) предполагают, как правило, вложения и поступления распределенных во времени денежных сумм. Эффективность подобных операций зависит от ряда параметров и условий, оговоренных в контрактах: размеров денежных сумм, процентной ставки, сроков выплат и поступлений и др.

Объектом финансового анализа в данном случае являются потоки платежей — суммы распределенных во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации операции. Расчет показателей эффективности таких операций основан на фундаментальном в финансовом анализе принципе дисконтирования денежных потоков [1 – 3]. При этом предполагается точное задание всех параметров операции: размеров инвестиционных доходов и расходов, значения рыночной ставки процентов (рыночной нормы доходности, ставки сравнения [1 – 3]). При решении многих практических задач, как правило, ни инвестиционные расходы, ни тем более будущие инвестиционные доходы и будущая рыночная ставка процентов точно неизвестны. Но всегда можно с достаточной степенью достоверности задать интервалы, в которых они лежат. В этом случае адекватным математическим аппаратом для количественного анализа денежных потоков, связанных с финансовыми операциями, могут служить методы интервального анализа [4 – 8]. Применение интервального анализа позволяет заключить в интервалы решения задач, о входных данных которых известно лишь то, что они лежат в некоторых интервалах.

Как известно, существует несколько способов представления интервальных величин: обычная интервальная арифметика [4 – 6, 8], обобщенная интервальная арифметика [9], арифметика Каухера [7]. В работе [10] анализ потоков платежей в условиях интервальной неопределенности проведен с использованием обычной (классической) интервальной арифметики.

В данной работе для расчета и анализа основных обобщающих характеристик интервальных денежных потоков (под интервальным потоком будем понимать поток платежей, параметры которого — размеры платежей и процентная ставка — задаются интервалами) и эффективности инвестиционных проектов (ИП) применяется обобщенная интервальная арифметика. Выведены формулы для вычисления этих характеристик с использованием обобщенной интервальной арифметики и проведен сравнительный численный анализ результатов, полученных в обычной и обобщенной арифметиках.

1. Основные понятия обобщенной интервальной арифметики

Рассмотрим интервал X шириной $2s$. Пусть x — середина интервала X. Тогда любая точка в этом интервале может быть представлена как $x + u$ для некоторого значения u, удовлетворяющего условию $-s \leq u \leq s$. Следуя [9], запишем $X = x + u$, несмотря на то,что X — интервал, а $x + u$ — некоторое число из этого интервала. Согласно [9], интервальное представление $f(X)$ любой функции записывается в форме $f(X) = A + Bu$, где A и B — интервалы. Арифметические действия с интервальными функциями в обобщенной интервальной арифметике производятся согласно следующим правилам. Пусть $g(X)$ — интервальная функция, представленная в виде $g(X) = C + Du$, где C и D — интервалы. Сложение и вычитание

$$f(x) \pm g(x) = (A + Bu) \pm (C + Du) = (A \pm C) + (B \pm D)u. \tag{1}$$

Умножение

$$f(X)g(X) = (A + Bu)(C + Du) = AC + (AD + BC)u + BDu^2. \tag{2}$$

Ограничиваем u^2 интервалом $[0, s^2]$ и окончательно получаем $h(X) = f(X)g(X) = E + Fu$, где

$$E = AC + BD\left[0, s^2\right], \quad F = AD + BC.$$

Деление

$$h(X) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + Bu}{C + Du} = \frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C(C + Du)}u. \tag{3}$$

В знаменателе заменим u интервалом $[-s, s]$. Получим $h(X) = E + Fu$, где

$$E = \frac{A}{C}; \quad F = \frac{BC - AD}{C(C + D[-s, s])}. \tag{4}$$

Если функции f и g зависят от n интервальных переменных X_i с шириной w_i соответственно $X_i = x_i + u_i$, где $u_i \in [-s_i, s_i]$, то они представляются в форме

$$f(X) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i u_i, \quad g(X) = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i u_i,$$

где A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — интервалы. Результатом арифметических действий с этими функциями будет функция

$$h(X) = C_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,$$

где для сложения

$$C_i = A_i + B_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

для вычитания

$$C_i = A_i - B_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

для умножения

$$C_0 = A_0 B_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i B_i \left[0, s_i^2\right],$$

$$C_i = A_0 B_i + A_i B_0 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_i B_j \left[-s_j, s_j\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

для деления

$$C_0 = A_0 / B_0, \quad C_i = \frac{B_0 A_i - A_0 B_i}{D},$$

где

$$D = B_0 \left(B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i \left[-s_i, s_i\right] \right).$$

Получив результат как функцию, линейно зависящую от $u_1, u_2, \ldots, u_n$, мы "доводим" ее до интервала заменой каждой переменной u_i на ограничивающий ее интервал $[-s_i, s_i]$.

2. Анализ потоков платежей

Для анализа потоков платежей необходимо уметь рассчитывать их основные обобщающие характеристики. Таких характеристик две: наращенная сумма и современная (приведенная) величина. Наращенной суммой потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами. Современной величиной потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока или упреждающий его. Наращенную сумму определяют, например, чтобы знать общую сумму задолженности на какой-либо момент времени, итоговый объем инвестиций, накопленный на момент оценки денежный резерв. Современная величина является важнейшим показателем при оценке эффективности реальных и финансовых инвестиций, коммерческих сделок и т. д. [1−3].

Типичными потоками платежей, рассматриваемыми в финансовой математике, являются годовые ренты — потоки платежей, компоненты которых — постоянные положительные величины, а интервал между платежами равен одному году [1−3]. На платежи начисляются сложные проценты по заданной номинальной годовой ставке в общем случае несколько раз в год. Рассмотрим задачи определения указанных выше характеристик для интервальной годовой ренты.

2.1. Наращенная сумма годовой ренты с начислениями процентов m раз в год

Пусть платежи поступают один раз в год в конце года. Размер платежа зададим в виде интервала $\left[\underline{R}, \overline{R}\right]$. Общее количество платежей равно n. Проценты на платежи начисляются по номинальной (сложной) ставке $j \in [\underline{j}, \overline{j}\,]$, $j > 0$, а число периодов начисления в

год равно m. Таким образом, каждый раз проценты начисляются по ставке $\dfrac{j}{m} \in \left[\dfrac{\underline{j}}{m}, \dfrac{\overline{j}}{m}\right]$.
Представим платеж и ставку наращения в следующем виде:

$$R = R_0 + u_R, \quad -s_R \le u_R \le s_R,$$

где R_0 — середина интервала $\left[\underline{R}, \overline{R}\right]$; $2s_R$ — ширина интервала $\left[\underline{R}, \overline{R}\right]$;

$$\frac{j}{m} = j_0 + u_j; \quad -s_j \le u_j \le s_j$$

$\left(j_0 \text{ — середина интервала } \left[\dfrac{\underline{j}}{m}, \dfrac{\overline{j}}{m}\right], 2s_j \text{ — ширина интервала } \left[\dfrac{\underline{j}}{m}, \dfrac{\overline{j}}{m}\right]\right)$.

Сумма первого платежа $R = R_0 + u_R$. После первого начисления процентов наращенная величина первого платежа будет $R_0 + u_R + (R_0 + u_R)(j_0 + u_j) = (R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)$. После второго начисления $(R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j) + (R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)(j_0 + u_j) = (R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^2$. В конце первого года наращенная величина первого платежа составит $(R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^m$. Первый платеж потока платежей будет приносить проценты в течение $n - 1$ лет, второй — в течение $n - 2$ лет и т. д. Получаем ряд платежей с начисленными на них процентами:

$$(R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^{m(n-1)}, (R_0 + u_R)(1 + j_0 + u_j)^{m(n-2)}, \ldots$$

На последний платеж проценты не начисляются, и он равен $R_0 + u_R$. Для определения наращенной суммы необходимо просуммировать получившийся ряд платежей. Выражение для интервального значения наращенной суммы имеет вид

$$S = (R_0 + u_R)\left((1 + j_0 + u_j)^{m(n-1)} + (1 + j_0 + u_j)^{m(n-2)} + \ldots + (1 + j_0 + u_j)^m + 1\right).$$

Нетрудно заметить, что данный ряд представляет собой геометрическую прогрессию. Применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, получим

$$S = (R_0 + u_R)\frac{(1 + j_0 + u_j)^{mn} - 1}{(1 + j_0 + u_j)^m - 1}.$$

Используя правила обобщенной интервальной арифметики (1)−(4), определим множитель наращения. Слагаемое в числителе представим в виде

$$(1 + j_0 + u_j)^{mn} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] + \left[\underline{B}, \overline{B}\right] u_j,$$

где

$$\underline{A} = (1 + j_0)^{nm}, \quad \overline{A} = (1 + j_0)^{nm} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{nm}{2}\right]} C_{nm}^{2k}(1 + j_0)^{nm-2k} s_j^{2k}, \quad \underline{B} = nm(1 + j_0)^{nm-1},$$

$$\overline{B} = nm(1 + j_0)^{nm-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{nm-1}{2}\right]} C_{nm}^{2k+1}(1 + j_0)^{nm-1-2k} s_j^{2k}.$$

Здесь квадратные скобки в верхнем пределе суммы обозначают целую часть числа.

Слагаемое в знаменателе

$$(1 + j_0 + u_j)^m = \left[\underline{C}, \overline{C}\,\right] + \left[\underline{D}, \overline{D}\,\right] u_j,$$

где

$$\underline{C} = (1 + j_0)^m\,; \quad \overline{C} = (1 + j_0)^m + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_m^{2k} \,(1 + j_0)^{m-2k}\, s_j^{2k}; \quad \underline{D} = m\,(1 + j_0)^{m-1}\,;$$

$$\overline{D} = m\,(1 + j_0)^{m-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_m^{2k+1} \,(1 + j_0)^{m-1-2k}\, s_j^{2k}.$$

Применяя правила обобщенного деления и умножения и заменяя u_j и u_R на соответствующие интервалы, получим окончательное выражение для наращенной суммы:

$$S \in \left[\underline{S}, \overline{S}\,\right], \tag{5}$$

где

$$\underline{S} = R_0\underline{K} - s_R\left(\overline{K} + \overline{M}s_j\right) - s_jR_0\overline{M};$$

$$\overline{S} = R_0\overline{K} + s_R\left(\overline{K} + \overline{M}s_j\right) + s_jR_0\overline{M};$$

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} - 1}{\overline{C} - 1}; \quad \overline{K} = \frac{\overline{A} - 1}{\underline{C} - 1};$$

$$\underline{M} = \frac{\underline{B}\,(\underline{C} - 1) - \overline{D}\,(\underline{A} - 1)}{\left(\overline{C} - 1\right)\left(\overline{C} - 1 + \overline{D}s_j\right)}; \quad \overline{M} = \frac{\overline{B}\left(\overline{C} - 1\right) - \underline{D}\,(\underline{A} - 1)}{(\underline{C} - 1)\left(\underline{C} - 1 - \overline{D}s_j\right)}.$$

2.2. Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Оценку современной величины годовой ренты определим на момент времени, совпадающий с началом ренты. Обозначим через V дисконтный множитель, $V = \dfrac{1}{1 + j/m}$, $V > 0$. Следовательно, $V \in \left[\dfrac{1}{1 + \overline{j}/m}, \dfrac{1}{1 + \underline{j}/m}\right]$. Представим дисконтный множитель в виде обобщенного интервала

$$V = V_0 + u_V, \quad -s_V \le u_V \le s_V,$$

где V_0 — середина интервала $\left[\underline{V}, \overline{V}\,\right]$, $2s_V$ — ширина интервала $\left[\underline{V}, \overline{V}\,\right]$.

Современная величина ренты определяется как сумма всех платежей, дисконтированных на момент оценки современной величины. Дисконтируя первый платеж на начало ренты, получим величину $(R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^m$. Современная величина второго платежа $(R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^{2m}$. Продолжая рассуждения, получим ряд современных величин платежей следующего вида:

$$(R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^m\,, (R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^{2m}\,, \,\ldots, \,(R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^{nm}\,.$$

Суммируя эти величины по правилам обобщенной интервальной арифметики, получим выражение для интервального значения современной величины ренты

$$P = (R_0 + u_R) \sum_{k=1}^{n} (V_0 + u_V)^k .$$

Свернем полученное выражение по формуле геометрической прогрессии

$$P = (R_0 + u_R)\,(V_0 + u_V)^m \,\frac{(V_0 + u_V)^{nm} - 1}{(V_0 + u_V)^m - 1}.$$

Слагаемое в числителе представим в виде

$$(V_0 + u_V)^{nm} = \left[\underline{A}, \overline{A}\,\right] + \left[\underline{B}, \overline{B}\,\right] u_V ,$$

где

$$\underline{A} = V_0^{nm}; \quad \overline{A} = V_0^{nm} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{nm-1}{2}\right]} C_{nm}^{2k} V_0^{nm-2k} s_V^{2k}; \quad \underline{B} = nmV_0^{nm-1};$$

$$\overline{B} = nmV_0^{nm-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{nm-1}{2}\right]} C_{nm}^{2k+1} V_0^{nm-1-2k} s_V^{2k}.$$

Слагаемое в знаменателе

$$(V_0 + u_V)^{m} = \left[\underline{C}, \overline{C}\,\right] + \left[\underline{D}, \overline{D}\,\right] u_V ,$$

где

$$\underline{C} = V_0^{m}; \quad \overline{C} = V_0^{m} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_{m}^{2k} V_0^{m-2k} s_V^{2k}; \quad \underline{D} = mV_0^{m-1};$$

$$\overline{D} = mV_0^{m-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_{m}^{2k+1} V_0^{m-1-2k} s_V^{2k}.$$

Далее, применяя правила обобщенного деления и умножения и заменяя u_V и u_R на соответствующие интервалы, получим окончательный результат:

$$P \in \left[\underline{P}, \overline{P}\,\right], \tag{6}$$

где

$$\underline{P} = R_0\underline{K} - s_R\left(\overline{K} + \overline{M}s_V\right) - s_V R_0 \overline{M};$$

$$\overline{P} = R_0\overline{K} + s_R\left(\overline{K} + \overline{M}s_V\right) + s_V R_0 \overline{M};$$

$$\underline{K} = \underline{C}\frac{\underline{A} - 1}{\overline{C} - 1}; \quad \overline{K} = \overline{C}\frac{\overline{A} - 1}{\underline{C} - 1} + \overline{D}\frac{\overline{B}\left(\overline{C} - 1\right) - \underline{D}\left(\underline{A} - 1\right)}{\left(\underline{C} - 1\right)\left(\underline{C} - 1 - \overline{D}s_V\right)};$$

$$\underline{M} = \underline{D}\frac{\underline{A} - 1}{\overline{C} - 1} + \underline{C}\frac{\underline{B}\left(\underline{C} - 1\right) - \overline{D}\left(\overline{A} - 1\right)}{\left(\overline{C} - 1\right)\left(\overline{C} - 1 + \overline{D}s_V\right)};$$

$$\overline{M} = \overline{D}\frac{\overline{A} - 1}{\underline{C} - 1} + \overline{C}\frac{\overline{B}\left(\overline{C} - 1\right) - \underline{D}\left(\underline{A} - 1\right)}{\left(\underline{C} - 1\right)\left(\underline{C} - 1 - \overline{D}s_V\right)}.$$

3. Анализ инвестиционных проектов

Основными характеристиками эффективности ИП являются чистый приведенный доход (Net Present Value, NPV) и внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return, IRR) [1–3]. NPV — это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени потоков доходов и вложений. IRR — это расчетная ставка процентов, при которой NPV проекта равен нулю. Экономический смысл данного показателя в том, что он дает верхнюю оценку нормы дисконтирования, при которой проект еще приносит доход. В интервальной постановке задача определения NPV сводится к определению современной величины интервального денежного потока, компоненты которого, в общем случае не равные интервалы, могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Задача определения IRR сводится к проблеме отыскания положительного корня интервального полинома. Рассмотрим сначала задачу определения чистого приведенного дохода.

Пусть проект описывается интервальным денежным потоком, компоненты которого характеризуются величинами $R^{(t)} \in \left[\underline{R}^{(t)}, \overline{R}^{(t)}\right]$ и могут быть как положительными (доходы от инвестиций), так и отрицательными (инвестиционные расходы). Ставка сравнения $q \in \left[\underline{q}, \overline{q}\right]$.

В соответствии с правилами обобщенной интервальной арифметики представим каждый член потока $R^{(t)}$ и ставку сравнения q в следующем виде:

$$R^{(t)} = R_0^{(t)} + u_R^{(t)}, \quad -s_R^{(t)} \le u_R^{(t)} \le s_R^{(t)},$$

где $R_0^{(t)}$, $2s_R^{(t)}$ — середина и ширина интервала $\left[\underline{R}^{(t)}, \overline{R}^{(t)}\right]$,

$$q = q_0 + u_q, \quad -s_q \le u_q \le s_q,$$

где q_0, $2s_q$ — середина и ширина интервала $\left[\underline{q}, \overline{q}\right]$.

Тогда значение чистого приведенного дохода определится по формуле

$$W = \sum_t \left(R_0^{(t)} + u_R^{(t)}\right) \frac{1}{\left(1 + q_0 + u_q\right)^t}. \tag{7}$$

Используя правила обобщенной интервальной арифметики, вычислим выражение, стоящее в знаменателе:

$$\left(1 + q_0 + u_q\right)^t = \left[\underline{A}^{(t)}, \overline{A}^{(t)}\right] + \left[\underline{B}^{(t)}, \overline{B}^{(t)}\right] u_q,$$

где

$$\underline{A}^{(t)} = \left(1 + q_0\right)^t; \quad \overline{A}^{(t)} = \left(1 + q_0\right)^t + \sum_{k=1}^{\left[\frac{t}{2}\right]} C_t^{2k} \left(1 + q_0\right)^{t-2k} s_q^{2k}; \quad \underline{B}^{(t)} = t\left(1 + q_0\right)^{t-1};$$

$$\overline{B}^{(t)} = t\left(1 + q_0\right)^{t-1} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{t-1}{2}\right]} C_t^{2k+1} \left(1 + q_0\right)^{t-1-2k} s_q^{2k}.$$

Подставляя это выражение в формулу (7) для чистого приведенного дохода и используя правила деления обобщенных чисел, получим

$$W \in \left[\underline{W}, \overline{W}\,\right] = \sum_t \left(\left[\frac{R_0^{(t)}}{\overline{A}^{(t)}}, \frac{R_0^{(t)}}{\underline{A}^{(t)}}\right] + u_R^{(t)} \left[\frac{\underline{A}^{(t)}}{\overline{D}^{(t)}}, \frac{\overline{A}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}}\right] - u_q \left[\frac{R_0^{(t)}\underline{B}^{(t)}}{\overline{D}^{(t)}}, \frac{R_0^{(t)}\overline{B}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}}\right] \right),$$

где $\underline{D}^{(t)} = \underline{A}^{(t)} \left(\underline{A}^{(t)} - \overline{B}^{(t)} s_q \right)$; $\overline{D}^{(t)} = \overline{A}^{(t)} \left(\overline{A}^{(t)} + \overline{B}^{(t)} s_q \right)$.

Окончательный результат получим, заменив u_q и $u_R^{(t)}$ на соответствующие ограничивающие интервалы: u_q заменим на $[-s_q, s_q]$, $u_R^{(t)}$ — на $\left[-s_R^{(t)}, s_R^{(t)}\right]$. Имеем

$$W \in \left[\underline{W}, \overline{W}\,\right], \tag{8}$$

где

$$\underline{W} = \sum_t \left(\frac{R_0^{(t)}}{\overline{A}^{(t)}} - s_R^{(t)} \frac{\overline{A}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}} - s_q \frac{R_0^{(t)} \overline{B}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}} \right);$$

$$\overline{W} = \sum_t \left(\frac{R_0^{(t)}}{\underline{A}^{(t)}} + s_R^{(t)} \frac{\overline{A}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}} + s_q \frac{R_0^{(t)} \overline{B}^{(t)}}{\underline{D}^{(t)}} \right).$$

Для определения IRR необходимо решить уравнение

$$\sum_{t=1}^{n} R(t) V^t = 0, \quad V = \frac{1}{1 + Q_b} \tag{9}$$

относительно неизвестной ставки Q_b (внутренней нормы доходности).

Левая часть данного уравнения представляет собой интервальный полином относительно переменной V, причем компоненты денежного потока образуют ряд коэффициентов этого полинома. Согласно теореме Декарта, количество положительных корней полинома не превосходит числа перемен знака в ряду его коэффициентов. Поэтому в случае потока платежей с одной переменой знака (такой поток называется стандартным и соответствует случаю, когда инвестиционные расходы предшествуют доходам) уравнение (9) имеет единственное положительное решение (в противном случае применение IRR как показателя эффективности ИП некорректно). Очевидно

$$Q_b \subseteq \frac{1}{V} + 1.$$

Существует несколько методов нахождения нулей полиномов, имеющих интервальные коэффициенты, с помощью интервальной арифметики [4, 5, 8, 9, 11]. В данной работе для выделения корня полинома (9) использована модификация метода Ньютона, использующая наклон [9], реализованная в обобщенной интервальной арифметике. Идея интервально-арифметической версии этой модификации состоит в следующем.

Рассмотрим полином

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m.$$

Согласно [9], всегда можно записать $f(x) - f(y) = (y - x) g(x, y)$, где

$$g(x, y) = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} x^k y^{m-1-k}.$$

Если y — нуль функции $f()$, т. е. $f(y) = 0$, то

$$y = x - \frac{f(x)}{g(x, y)}.$$

Пусть X — интервал, который содержит y, т. е. $y \in x - \dfrac{f(x)}{g(x,X)}$. Определим

$$N(x,X) = x - \frac{f(x)}{g(x,X)}. \tag{10}$$

Если $y \in X$, то $y \in N(x,X)$. Представляем (10) в обобщенной интервальной форме:

$$N(x,X,u) = x + \frac{A+Bu}{C+Du}.$$

Интервальное расширение модификации метода Ньютона задается рекуррентным соотношением

$$X_n = X_{n-1} \cap N\left(x, X_{n-1}, u\right).$$

Процесс останавливается, если дальнейшее уточнение интервала невозможно.

4. Численные расчеты и сравнительный анализ интервальных методов

В данном разделе приводятся результаты численных расчетов обобщающих характеристик интервальных денежных потоков и показателей эффективности ИП, полученные с применением обычной и обобщенной интервальных арифметик.

Формулы для расчета основных обобщающих характеристик интервальных потоков платежей и инвестиционных проектов в классической интервальной арифметике получены в [10]. Наращенная сумма годовой ренты с начислениями процентов m раз в год лежит в интервале

$$S = \left[\underline{R}, \overline{R}\right] \cdot \left[\underline{M}, \overline{M}\,\right], \tag{11}$$

где $\underline{M} = \dfrac{\left(1+\dfrac{\underline{j}}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1+\dfrac{\underline{j}}{m}\right)^{m} - 1}$; $\overline{M} = \dfrac{\left(1+\dfrac{\overline{j}}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1+\dfrac{\overline{j}}{m}\right)^{m} - 1}$.

Современная величина годовой ренты с начислениями процентов m раз в год лежит в интервале

$$P = \left[\underline{R}, \overline{R}\right] \left[\frac{1-\left(1+\dfrac{\overline{j}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{\overline{j}}{m}\right)^{m} - 1}, \frac{1-\left(1+\dfrac{\underline{j}}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\dfrac{\underline{j}}{m}\right)^{m} - 1} \right]. \tag{12}$$

Чистый приведенный доход рассчитывается как современная величина нерегулярного потока платежей, дисконтированных по ставке сравнения $Q = \left[\underline{q}, \overline{q}\,\right]$:

$$W = \left[\underline{R}, \overline{R}\right] \left[\frac{1}{\left(1+\overline{j}\right)^{t}}, \frac{1}{\left(1+\underline{j}\right)^{t}} \right]. \tag{13}$$

Расчет наращенной суммы проводится по формулам (11) для обычной интервальной арифметики и по (5) — для обобщенной. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Динамика наращенной суммы ренты с начислениями процентов m раз в году при изменении границ всех показателей

$\underline{i}$	$\overline{i}$	$\underline{R}$	$\overline{R}$	n	m	$\underline{Sg}$	$\overline{Sg}$	$\underline{S}$	$\overline{S}$	wg	w
14,73	15,27	45,8	52,2	3	12	160,119	183,686	160,201	183,661	23,567	23,460
14,76	15,24	45,6	52,4	3	12	159,478	184,325	159,554	184,305	24,846	24,751
14,79	15,21	45,4	52,6	3	12	158,838	184,963	158,906	184,948	26,125	26,042
14,82	15,18	45,2	52,8	3	12	158,197	185,602	158,257	185,590	27,404	27,333
14,85	15,15	45	53	3	12	157,557	186,241	157,608	186,233	28,683	28,625
14,88	15,12	44,8	53,2	3	12	156,917	186,880	156,959	186,875	29,963	29,916
14,91	15,09	44,6	53,4	3	12	156,277	187,519	156,309	187,516	31,242	31,207
14,94	15,06	44,4	53,6	3	12	155,637	188,158	155,658	188,157	32,522	32,498
14,97	15,03	44,2	53,8	3	12	154,997	188,798	155,008	188,798	33,801	33,790
15	15	44	54	3	12	154,357	189,438	154,357	189,438	35,081	35,081

Расчет современной величины проведен по формулам (12) для обычной интервальной арифметики и по (6) — для обобщенной. Результаты приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Динамика современной величины ренты с начислениями процентов m раз в году при изменении границ всех показателей

$\underline{i}$	$\overline{i}$	$\underline{R}$	$\overline{R}$	n	m	$\underline{Ag}$	$\overline{Ag}$	$\underline{A}$	$\overline{A}$	wg	w
15	15	249,2	252,8	4	2	703,441	713,603	703,441	713,603	10,162	10,162
14,97	15,03	249,4	252,6	4	2	703,544	713,499	703,55	713,5	9,955	9,951
14,94	15,06	249,6	252,4	4	2	703,65	713,393	703,659	713,397	9,743	9,739
14,91	15,09	249,8	252,2	4	2	703,757	713,285	703,767	713,294	9,528	9,527
14,88	15,12	250	252	4	2	703,867	713,174	703,875	713,191	9,308	9,316
14,85	15,15	250,2	251,8	4	2	703,978	713,061	703,983	713,087	9,083	9,104
14,82	15,18	250,4	251,6	4	2	704,091	712,946	704,09	712,983	8,854	8,893
14,79	15,21	250,6	251,4	4	2	704,207	712,828	704,197	712,878	8,622	8,681
14,76	15,24	250,8	251,2	4	2	704,324	712,708	704,304	712,774	8,384	8,47
14,73	15,27	251	251	4	2	704,443	712,586	704,41	712,668	8,143	8,258

Чистый приведенный доход рассчитывается по формуле (13) для обычной интервальной арифметики и по (8) — для обобщенной. Результаты — в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Динамика чистого приведенного дохода при изменении границ ставки сравнения и границ платежей

$\underline{i}$	$\overline{i}$	n	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$\underline{Wg}$	$\overline{Wg}$	$\underline{W}$	$\overline{W}$	wg	w
48,84	49,16	5	$-158,5$	92,5	83,5	100,5	191	94,5	22,69	29,61	22,71	29,61	6,92	6,90
			$-157,5$	96,5	85,5	102,5	194	95,5						
48,88	49,12	5	$-158,4$	92,6	83,6	100,6	191,1	94,6	23,09	29,21	23,10	29,21	6,12	6,11
			$-157,6$	96,4	85,4	102,4	193,9	95,4						
48,92	49,08	5	$-158,3$	92,7	83,7	100,7	191,2	94,7	23,49	28,82	23,50	28,82	5,32	5,31
			$-157,7$	96,3	85,3	102,3	193,8	95,3						
48,96	49,04	5	$-158,2$	92,8	83,8	100,8	191,3	94,8	23,89	28,42	23,90	28,42	4,52	4,52
			$-157,8$	96,2	85,2	102,2	193,7	95,2						
49	49	5	$-158,1$	92,9	83,9	100,9	191,4	94,9	24,29	28,02	24,29	28,02	3,72	3,72
			$-157,9$	96,1	85,1	102,1	193,6	95,1						

В табл. 4 приведены результаты расчетов внутренней нормы доходности.

Таблица 4

Расчет внутренней нормы доходности

n	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	$\underline{IRRg}$	$\overline{IRRg}$	wg
6	−151	−51	59	109	198	49	40	—	26,8209	28,5390	1,7181
	−149	−49	61	111	202	51	42	—	—	—	—
6	−101	−51	−86	49	139	199	99	—	20,8219	22,3017	1,4797
	−99	−49	−84	51	141	201	101	—	—	—	—
7	−52	−202	−52	48	198	98	198	190	22,7958	24,6612	1,8654
	−50	−198	−49	52	201	102	202	192	—	—	—

В таблицах использованы следующие обозначения: $\underline{i}, \overline{i}$ — нижняя и верхняя границы процентной ставки; n — срок; m — количество начислений процентов в году; $\underline{R}, \overline{R}$ — нижняя и верхняя границы платежа; $\underline{Sg}, \overline{Sg}$ и $\underline{S}, \overline{S}$ — нижняя и верхняя границы наращенной суммы, рассчитанной с помощью обобщенной и обычной интервальных арифметик соответственно; $\underline{Ag}, \overline{Ag}$ и $\underline{A}, \overline{A}$ — нижняя и верхняя границы современной величины, рассчитанной с помощью обобщенной и обычной интервальных арифметик соответственно; wg и w — ширина интервала результата, полученного с помощью обобщенной и обычной интервальных арифметик соответственно; $\underline{Wg}, \overline{Wg}$ и $\underline{W}, \overline{W}$ — нижняя и верхняя границы чистого приведенного дохода, рассчитанного с помощью обобщенной и обычной интервальных арифметик соответственно; $\underline{IRRg}, \overline{IRRg}$ — нижняя и верхняя границы внутренней нормы доходности.

На основе представленных результатов можно сделать вывод, что применение обобщенной интервальной арифметики для анализа финансовых операций вполне оправдано, так как в ряде случаев (например, при расчете современной величины потока платежей) позволяет получить более узкий интервал решения, чем при использовании классической. Кроме того, реализация модификации метода Ньютона, использующей наклон, в обобщенной интервальной арифметике обеспечивает быструю сходимость рекуррентной процедуры поиска внутренней нормы доходности. На практике при расчетах основных характеристик потоков платежей целесообразно использовать оба подхода и в качестве результата брать пересечение полученных интервалов.

Авторы выражают благодарность С. П. Шарому за предоставленную литературу и полезные замечания, способствовавшие улучшению данной работы.

Список литературы

[1] Домбровский В. В. Методы количественного анализа финансовых операций. Томск: Изд-во научно-техн. лит., 1998.

[2] Четыркин В. И. Методы финансовых и коммерческих расчетов. М.: Дело ЛТД, 1995.

[3] Шарп У. Ф., Александер Г. Дж., Бейли Дж. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1997.

[4] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.

[5] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

[6] Шокин Ю. И. Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981.

[7] Kaucher E. Interval analysis in the extended interval spase $\mathbb{IR}$ // Computing Suppl. 1980. Vol. 2. P. 33–49.

[8] Moore R. E. Methods and Applications of Interval Analysis. Philadelphia: SIAM, 1979.

[9] Hansen E. R. Computing zeros of functions using generalized interval arithmetic // Interval Computations. 1993. No. 3. P. 3–28.

[10] Домбровский В. В. Интервальные методы в управлении финансами // Междунар. конф. по проблемам управления: избр. тр. Т. 1. М., 1999. С. 202–209.

[11] Dargel R. H., Lascalzo F. R., Witt T. H. Automatic error bounds on real zeros of rational function // Comm. ACM. 1966. Vol. 19, No. 11.

Поступила в редакцию 28 ноября 2000 г.,
в переработанном виде — 10 июля 2001 г.