

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПРИ СОПРЯЖЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ*

О. Б. БОЧАРОВ

Институт водных и экологических проблем СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: bob@ad-sbras.nsc.ru

И. Г. ТЕЛЕГИН

Горно-Алтайский государственный университет, Россия

e-mail: dckt@bcentr.gorny.ru

Numerical analysis of difference schemes for solving the problem on conjugation of different two-phase fluid filtration models is made. As a result of numerical experiments on different grids the optimal scheme is chosen.

При изучении вытеснения нефти водой из пористых коллекторов с учетом капиллярных сил наиболее распространенной является модель Маскета — Леверетта (МЛ-модель). Однако, как показано А. Н. Коноваловым в [1], вследствие обращения в нуль функций, описывающих относительные фазовые проницаемости, естественные граничные условия для этой модели являются плохо обусловленными (градиенты решения в окрестности границы становятся бесконечно большими). В работе О. Б. Бочарова [2] предложено в качестве граничного условия на эксплуатационной скважине рассмотреть уравнение модели Ба-клея — Леверетта (БЛ-модель). В работах В. Н. Монахова, И. Г. Телегина [3, 4] эту модель предложено применять в окрестности эксплуатационной скважины. В итоге возникает задача сопряжения обеих моделей. Целью данной работы является сравнительный анализ некоторых численных методов решения данной задачи сопряжения.

Уравнения моделей. Одномерная МЛ-модель фильтрации двухфазной жидкости в однородной изотропной пористой среде в отсутствие массовых сил при заданном суммарном расходе фаз имеет вид [5]

$$ms_{\bar{t}} = (k_0 a_0(s) a_1(s) s_{\bar{x}} - Q(\bar{t}) b(s))_{\bar{x}}, \quad (1)$$

где $\bar{x} \in [0, L]$ — пространственная координата; L — расстояние от нагнетательной скважины до эксплуатационной; \bar{t} — время; $s = (s_1 - S_1^0)/(1 - S_1^0 - S_2^0)$ — динамическая насыщенность смачивающей фазы; s_1 — истинная насыщенность смачивающей фазы;

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №99-01-00622.

© О. Б. Бочаров, И. Г. Телегин, 2002.

$(S_1^0, S_2^0) = \text{const}$ — остаточные водо- и нефтенасыщенности; $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$, m_0 — пористость коллектора; $k_0 = \text{const}$ — абсолютная проницаемость коллектора; $a_0(s) = \overline{k_1} \overline{k_2}$, $a_1(s) = -p_{cs}/(\mu_2(\overline{k_1} + \mu\overline{k_2}))$, $p_c(s) = (m_0/k_0)^{1/2}\gamma j(s)$ — капиллярное давление; γ — коэффициент поверхностного натяжения; $j(s)$ — функция Леверетта; $b(s) = \overline{k_1}/(\overline{k_1} + \mu\overline{k_2})$ — коэффициент подвижности вытесняющей фазы; $\overline{k_i} = \overline{k_i}(s)$ — относительные фазовые проницаемости; μ_i — вязкости фаз (индекс $i = 1$ соответствует воде, $i = 2$ — нефти). Здесь и далее для функций $f_\alpha = \partial f/\partial \alpha$.

При этом функциональные параметры модели имеют следующие свойства [5]:

- 1) $0 < (\overline{k_1}, \overline{k_2}) < 1$ при $s \in (0, 1)$, $a_0(0) = a_0(1) = \overline{k_1}(0) = \overline{k_2}(1) = 0$;
- 2) $(k_{1s}, k_{2s}, p_{cs}) \in C(G)$, где G — замкнутая область в пространстве переменных (\overline{x}, s) , причем $M^{-1} \leq (\mu_1, \mu_2, -p_{cs}) \leq M$, $M > 0$;
- 3) $|\ln(a_1), b/\overline{k_1}| \leq M_0(M)$.

Полагая $Q(\overline{t}) = Q_0 = \text{const}$, введем безразмерные переменные: $x = \overline{x}/L$, $t = \overline{t}Q_0/(mL)$, при этом уравнение (1) запишется в виде

$$s_t = (\varepsilon a(s)s_x - b(s))_x \equiv -v_x, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \gamma(m_0k_0)^{1/2}/(Q_0L\mu_2)$ — капиллярное число; $a(s) = -a_0j_s/(\overline{k_1} + \mu\overline{k_2})$; $v = v(x, t)$ — скорость фильтрации вытесняющей фазы.

Значению параметра $\varepsilon \equiv 0$ соответствует модель Баклея — Леверетта.

Обозначим через $\Gamma_0 = \{x, t | x = 0, t \geq 0\}$ нагнетательную скважину, через $\Gamma_l = \{x, t | x = l, t \geq 0\}$ — линию сопряжения моделей, через $\Gamma_1 = \{x, t | x = 1, t \geq 0\}$ — эксплуатационную скважину, а через Ω_{mn} — область $\{x, t | m < x < n, t > 0\}$, $m = 0; l, n = l; 1$.

Сопряжение решений МЛ и БЛ-моделей с использованием смены эволюционной переменной. Рассмотрим случай, когда вблизи эксплуатационной скважины капиллярные силы малы. Разобьем область Ω_{01} на две, в области Ω_{0l} фильтрация двухфазной жидкости описывается МЛ-моделью и соответственно этому в (2) $\varepsilon \neq 0$, а в области Ω_{l1} — БЛ-моделью и в (2) $\varepsilon = 0$. Предлагается для решения уравнения (2) в области Ω_{01} изучать следующую начально-краевую задачу:

$$s|_{x=0} = 1; \quad s|_{t=0} = s_0(x), \quad x \in [0, 1]; \quad [s]_{x=l} = [v]_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где $[f]_{x=l} = \{f(l-0, t) - f(l+0, t)\}$ — скачок функции $f(x, t)$ на линии Γ_l .

Из условий склейки на Γ_l следует условие $\varepsilon a s_x|_{x=l-0} = 0$, и задача (2), (3) распадается на две подзадачи. В области Ω_{0l}

$$s_t = (\varepsilon a s_x - b)_x; \quad s|_{t=0} = s_0(x), \quad s|_{x=0} = 1, \quad \varepsilon a s_x|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

В области Ω_{l1} фильтрация описывается БЛ-моделью, в соответствии с этим $\varepsilon = 0$:

$$s_t = -b_x; \quad s|_{t=0} = s_0(x), \quad s|_{x=l} = S_l(t). \quad (5)$$

В работах [3, 4] предложено сменить эволюционную переменную в области Ω_{l1} искомую насыщенность s на расход v . В этом случае легче обосновать непрерывность расхода. Тогда задача (5) принимает вид

$$v_x = -\varphi_t(v); \quad v|_{t=0} = v_0(x), \quad v|_{x=l} = v_l(t), \quad (6)$$

где зависимость $s = \varphi(v)$ является обратной по отношению к зависимости $v = b(s)$, $v_0 = b[s_0(x)]$, $v_l(t) = b[S_l(t)]$, функция $S_l(t) = s(x, t)|_{x=l}$ определяется по решению $s(x, t)$ задачи (4).

Особенность задач (4), (6) заключается в склейке решений $s = s(x, t)$, $(x, t) \in \Omega_{0l}$ уравнения (4), эволюционного по переменной t , и функции $s(x, t) = \varphi[v(x, t)]$, $(x, t) \in \Omega_{1l}$, выражающейся через решения $v(x, t)$ уравнения (6), эволюционного по переменной x .

Вопросам существования обобщенного решения задачи сопряжения МЛ- и БЛ-моделей (4), (6) посвящена работа [3], а первые предварительные расчеты проведены в [4]. Необходимо отметить, что в [3, 4] изучалась параболически регуляризованная задача для уравнения (6).

Построение алгоритмов численного решения задачи (4), (6) затруднено несколькими обстоятельствами:

- 1) заменой эволюционной переменной;
- 2) условием $\varphi_v|_{v=0;1} = \infty$, которое осложняет применение градиентных итерационных методов при линеаризации разностного уравнения.

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи сопряжения (4), (6). Вначале произведем регуляризацию используемой в дальнейшем функции φ_v

$$\bar{\varphi}_v(s) = \begin{cases} \varphi_v(s^*), & s \in [0, s^*], \\ \varphi_v(s), & \\ \varphi_v(1 - s^*), & s \in [1 - s^*, 1]. \end{cases}$$

Значение s^* подбиралось по результатам численных экспериментов, черта над $\bar{\varphi}_v(s)$ в дальнейшем изложении опускается.

Введем основную сетку в области Ω_{0l} с распределенными узлами $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, t_n = n\tau; i = \overline{0, N}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ($h = 1/N$ — шаг по пространственной координате, $\tau = rh$ — шаг по временной переменной). Пусть при этом линии Γ_l соответствует номер $M_l = lN$ узла на сетке (предполагается, что M_l не является дробным числом).

Также введем вспомогательную сетку в области Ω_{1l} $\omega_{h_v\tau_v} = \{x_i = ih_v, t_n = n\tau_v; i = \overline{M_l, M_1}, n = 0, 1, 2, \dots\}$ ($h_v = r_1\tau_v$ — шаг по координате x , τ_v — шаг по времени), M_1 соответствует линии Γ_1 или эксплуатационной скважине.

При этом r и r_1 выбирались так, чтобы на линии Γ_l узлы сетки $\omega_{h_v\tau_v}$ совпали с узлами сетки $\omega_{h\tau}$.

Для нахождения численного решения использовались противопотоковые схемы из соображений необходимости вычислять $s(x, t)$ на линии склейки без привлечения дополнительных узлов сетки. В дальнейшем используются обозначения, принятые в [6].

Уравнение МЛ-модели в Ω_{0l} аппроксимировалось с помощью неявной разностной схемы первого порядка

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = \frac{\varepsilon}{h} \left(a_{i+\frac{1}{2}}^n s_{x,i}^{n+1} - a_{i-\frac{1}{2}}^n s_{\bar{x},i}^{n+1} \right) - b_{\bar{x},i}^{n+1}, \quad i = \overline{1, M_l - 1}, \quad (7)$$

$$\frac{s_{M_l}^{n+1} - s_{M_l}^n}{\tau} = -\frac{2\varepsilon}{h} a_{M_l-\frac{1}{2}}^n s_{\bar{x},M_l}^{n+1} - b_{\bar{x},M_l}^{n+1}, \quad s_0^{n+1} = s_0^n = 1.$$

Для численного решения уравнения (5) использовалась разностная схема

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} = -\sigma b_{\bar{x},i}^{n+1} - (1 - \sigma) b_{\bar{x},i}^n, \quad i = \overline{M_l + 1, M_1}, \quad s_{M_l}^{n+1} = s_{M_l}^n, \quad (8)$$

где b_i^{n+1} линеаризовывались как $b_i^{n+1} = b_i^n + b_{si}^n (s_i^{n+1} - s_i^n)$. Схема (8) при $\sigma = 0.5$ имеет погрешность аппроксимации $O(h + \tau^2)$, при других значениях $\sigma \in [0, 1]$ погрешность аппроксимации $O(h + \tau)$.

Для численного решения систем (7), (8) применялся метод правой прогонки. Для аппроксимации уравнения (6) использовались два семейства разностных схем

$$\sigma_1 \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}}{h_v} + (1 - \sigma_1) \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_v} = -\sigma_2 \varphi_{vi}^{n+1} \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n}{\tau_v} - (1 - \sigma_2) \varphi_{vi}^{n+1} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau_v}, \quad (9)$$

$$i = \overline{M_l, M_1 - 1}; \quad v_{M_l}^{n+1} = b(S_l^{n+1});$$

$$\frac{v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}}{h_v} = -\sigma_3 \varphi_{vi}^{n+1} \frac{3v_{i+1}^{n+1} - 4v_{i+1}^n + v_{i+1}^{n-1}}{2\tau_v} - (1 - \sigma_3) \varphi_{vi}^{n+1} \frac{3v_i^{n+1} - 4v_i^n + v_i^{n-1}}{2\tau_v}, \quad (10)$$

$$i = \overline{M_l, M_1 - 1}; \quad v_{M_l}^{n+1} = b(S_l^{n+1}).$$

Схема (9) при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ имеет погрешность аппроксимации $O(h_v^2 + \tau_v^2)$, при $\sigma_1 = 0.5$ и $\sigma_2 \neq 0.5$ погрешность аппроксимации $O(h_v + \tau_v^2)$, при $\sigma_1 \neq 0.5$ и $\sigma_2 = 0.5 - O(h_v^2 + \tau_v)$, в остальных случаях погрешность аппроксимации $O(h_v + \tau_v)$.

Схема (10) при $\sigma_3 = 0.5$ аппроксимирует исходное уравнение со вторым порядком по обеим переменным, при $\sigma_3 \neq 0.5$ погрешность аппроксимации $O(h_v + \tau_v^2)$. Схема (10) является трехслойной, поэтому на первом шаге, т. е. когда вода подходит к линии склейки, применялась двухслойная схема (9) с $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = \sigma_3$.

В численных расчетах использовался следующий набор параметров:

$$\overline{k_1} = s^2; \quad \overline{k_2} = (1 - s)^2; \quad j = (1 - s)/(0.9 + s); \quad l = 0, 8; \quad \varepsilon = 0.5; \quad \mu = 0.1; \quad s^* = 0.05.$$

Выбор функциональных параметров был обусловлен простотой вычисления обратной функции $\varphi(v) = b^{(-1)}(v)$ для уравнения (6).

Ниже на рисунках жирными кривыми обозначены решения или характеристики, относящиеся к задачам сопряжения, а светлыми — результаты контрольного счета для БЛ-модели с $\sigma = 0.5$ во всей области Ω_{01} , пунктиром — линия Γ_l .

Результаты расчетов. Первоначально тестировали разностные схемы на сопряжение смены эволюционной переменной, т. е. во всей области решали задачу для БЛ-модели без линии сопряжения и с ней.

Рассмотрим случай применения единой сетки $\omega_{h\tau}$ на всей области. В численных расчетах использовались шаги сетки $h = h_v = 0.01$ ($N = 100$), $\tau = \tau_v = 0.001$, $M_l = 80$, $M_1 = 100$. Были проведены многовариантные расчеты при различных σ , σ_1 , σ_2 , σ_3 , $s_0(x)$.

Так как на нагнетательной скважине задан расход, а жидкости принимались несжимаемыми, то можно вести контроль решения по водному балансу.

Сравнение численного решения задачи (4)–(6) с решением по БЛ-модели во всей области показывает, что после прихода воды на линию Γ_l при малых $s_0(x)$ имеет место дисбаланс порядка 2.3–2.4%, дисбаланс уменьшается с увеличением $s_0(x)$ и l . Так, при $s_0(x) = 0.05$ дисбаланс составил 0.6–0.7%. При $s_0(x) = 0$ фронт водонасыщенности по модели сопряжения движется быстрее. Для схемы (10) с $\sigma_3 = 1$ и $l = 0.8$ это приводит к уменьшению безводной нефтеотдачи на 6%. Еще одной особенностью решений задачи сопряжения является то, что при уменьшении σ_1 , σ_2 , σ_3 в схемах (9), (10) возникают осцилляции перед фронтом водонасыщенности. Они имеют место уже при $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0.72$. С уменьшением $s_0(x)$ осцилляции появляются даже при больших весах. Наилучшие результаты получились при решении задачи по схеме (10) при $\sigma_3 = 0.74$ и $s_0(x) = 0.05$ (рис. 1).

Опыт использования разностных схем для задачи (4)–(6) на основной сетке показал, что оптимальной является более простая схема (9), так как, варьируя σ_1 и σ_2 , можно

получить решение, близкое к тестовому. В то же время эта схема несколько хуже сохраняет баланс, нежели схема (10). Однако этот дисбаланс ложится в рамки допустимых пределов. График функции обводненности

$$\eta(t) = 100\% \int_0^1 s(x, t) dx$$

для худшего варианта, когда дисбаланс достигает 2.45%, приведен на рис. 2. Интеграл в правой части уравнения вычислялся по формуле трапеций.

Теперь рассмотрим случай использования в области Ω_{l_1} вспомогательной сетки $\omega_{h_v \tau_v}$. В численных расчетах использовались шаги сетки $h = \tau_v = 0.01$, $\tau = h_v = 0.001$ ($N = 100$), $M_l = 80$, $M_1 = 280$.

Сравнение численного решения задачи (4)–(6) с решением по БЛ-модели во всей области показывает, что дисбаланс несколько меньше, чем при расчете задачи (4)–(6) на основной сетке, при $s_0(x) = 0$ он составляет 1.8–2.6%, а при $s_0(x) = 0.05$ — порядка 0.29–1.0%.

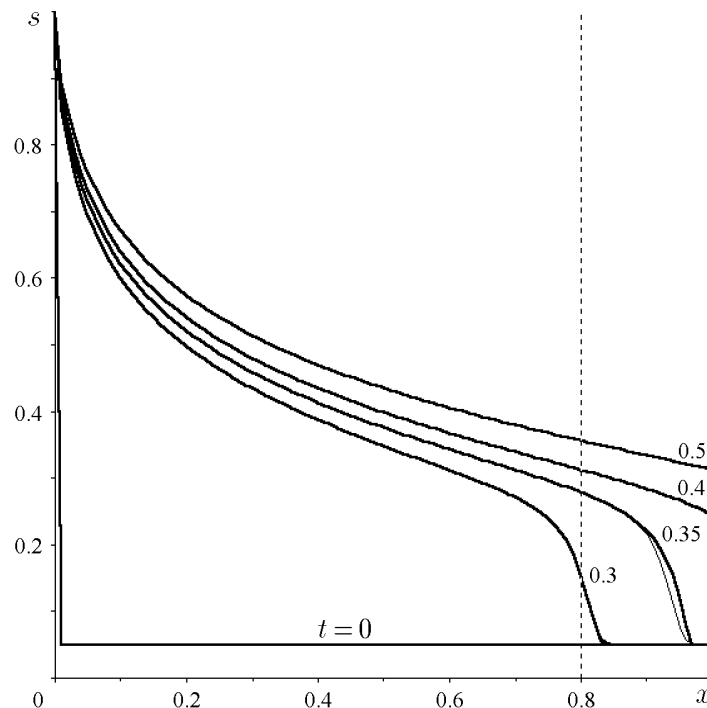


Рис. 1.

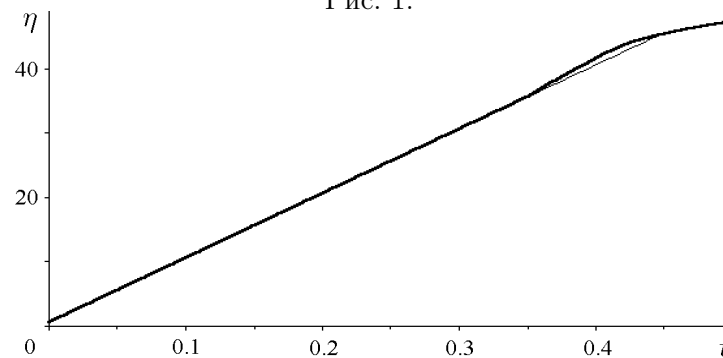


Рис. 2.

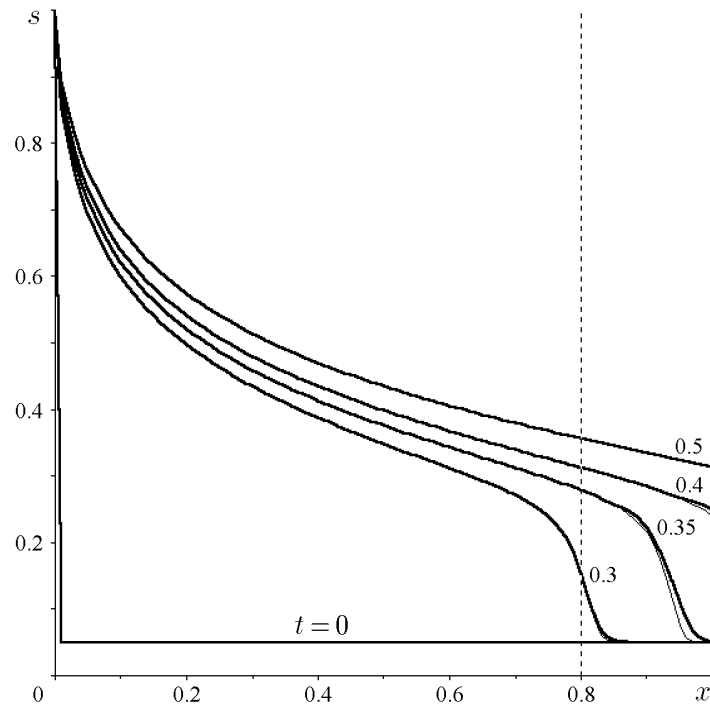


Рис. 3.

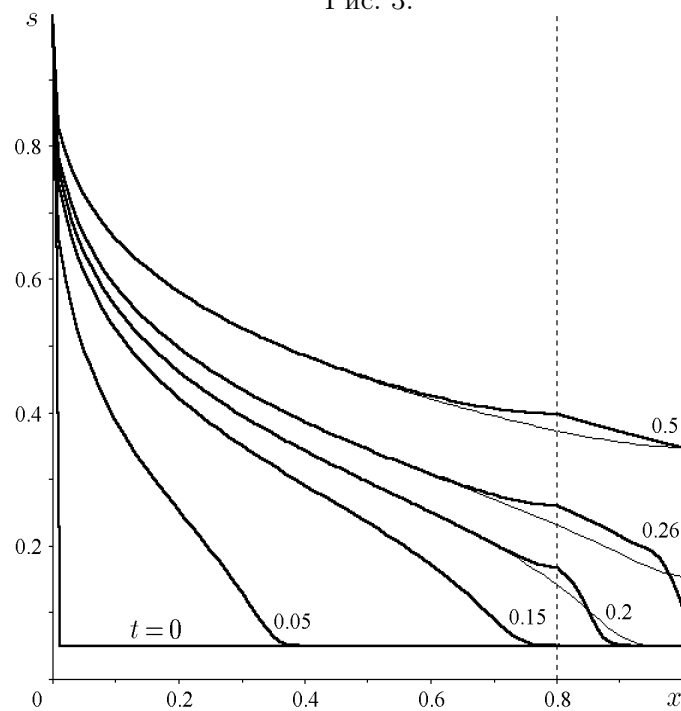


Рис. 4.

При использовании схемы (9) с $\sigma_1 < 0.57$, $\sigma_2 = 0.5$ и $s_0(x) = 0.05$ имели место осцилляции после фронта водонасыщенности, при этом ухудшался баланс. С уменьшением $s_0(x)$ осцилляции появляются даже при больших весах. Опять имело место опережающее движение фронта при $s_0(x) = 0$, как и на основной сетке. Расчет по схеме (10) при $\sigma_3 = 1$ и $s_0(x) = 0.05$ приводил к решению без осцилляций, но с нефизичной полочкой в окрестности фронтальной насыщенности. Наилучший результат получился при расчете по схеме (9)

при $\sigma_1 = 0.58$ и $\sigma_2 = 0.5$, $s_0(x) = 0.05$ (рис. 3).

Опыт использования вышеописанных разностных схем для задачи (4)–(6) на вспомогательной сетке показал, что оптимальной является схема (9).

На рис. 4 приведены результаты расчетов задачи (4)–(6) с $\varepsilon = 0.5$, сравнение проводилось с решением по МЛ-модели во всей области Ω_{01} . Расчет в области Ω_{l1} проводился по схеме (9) при $\sigma_1 = 0.58$ и $\sigma_2 = 0.5$ на вспомогательной сетке. Вследствие условия $\varepsilon a s_x|_{x=l} = 0$ слева от Γ_l образуется полочка. Капиллярные силы в МЛ-модели растягивают фронт водонасыщенности, поэтому время безводной нефтеотдачи по модели сопряжения больше, чем по МЛ-модели. Дисбаланс до прорыва воды составлял 0.6%, а наибольший дисбаланс возникает после прорыва воды по модели сопряжения 1.75% при $t \approx 0.27$. Такое расхождение вполне приемлемо, тем более, что с уменьшением ε отличия в решениях уменьшаются, а в пластовых условиях обычно $\varepsilon < 0.1$.

Список литературы

- [1] КОНОВАЛОВ А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. 166 с.
- [2] БОЧАРОВ О. Б. О задаче со сосредоточенной емкостью для одномерных уравнений двухфазной фильтрации // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 73. С. 149–155.
- [3] МОНАХОВ В. Н. Сопряжение основных математических моделей фильтрации двухфазной жидкости // Мат. моделирование. 2001 (в печати).
- [4] ТЕЛЕГИН И. Г. Численная реализация сопряжения основных моделей фильтрации двухфазной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. ИГиЛ. 2000. Вып. 116. С. 107–111.
- [5] АНТОНЦЕВ С. Н., КАЖИХОВ А. В., МОНАХОВ В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983. 316 с.
- [6] САМАРСКИЙ А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 24 октября 2001 г.