

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ В МАНТИИ ЗЕМЛИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЗАВИХРЕННОСТИ И ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА*

В. В. ЧЕРВОВ

Объединенный институт геологии, геофизики и минералогии СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: `elixir@online.nsk.su`

The numerical model of convection processes in Earth mantle is constructed on the basis of vorticity and vector potential. The results of numerical experiments are presented. The comparison with well-known benchmark problem shows good results.

Введение

Численному моделированию трехмерных конвективных течений в мантии Земли посвящено большое количество работ (см., например, [1–7] и приведенную в них библиографию). Особо можно отметить статью Busse F. H. et al. [4], в которой содержатся результаты трехмерного моделирования конвективных течений в мантии, полученные разными авторами в применении к одной и той же задаче. При решении трехмерных задач гидродинамики достаточно хорошо зарекомендовали себя переменные “завихренность” — “векторный потенциал” [8–13]. Анализ известных работ показывает, что при численном моделировании конвективных процессов в мантии Земли указанным переменным уделено недостаточное внимание. Так, например, в статье [13] имеется решение только для постоянной вязкости. В настоящей работе предпринята попытка построения численной модели конвективных процессов в мантии Земли, основанной на вышеупомянутых переменных и методе дробных шагов. В качестве первого этапа анализа работоспособности построенной численной модели осуществлено сопоставление с результатами работы [4].

1. Постановка задачи

1.1. Основные уравнения

Для решения задач тепломассопереноса в мантии Земли привлекается хорошо известная система дифференциальных уравнений в декартовых координатах [14, 15]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

*Работа выполнена при поддержке Интеграционных проектов СО РАН №27, 30.

© В. В. Червов, 2002.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \alpha \rho g_z T, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \nabla^2 T, \quad (1.5)$$

где $\rho(x, y, z, t)$ — плотность; $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$ — компоненты вектора скорости \mathbf{U} ; $p(x, y, z, t)$ — давление; $\eta(x, y, z, t) > 0$ — коэффициент динамической вязкости; α — коэффициент теплового расширения мантийной жидкости; T — температура жидкости; g_z — z -компонента вектора силы тяжести $\mathbf{g} = (0, 0, -g_z)$, т.е. ускорение свободного падения; χ — коэффициент теплопроводности. Компоненты тензора напряжений задаются следующим стандартным образом [16]:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

1.2. Обезразмеривание

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением масштабных множителей (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Название и обозначение	Масштабный множитель
Длина, ширина и глубина (x, y, z)	$(x', y', z')d$
Время t	$t'd^2/\chi$
Динамическая вязкость η	$\eta'\eta_0$
Давление p	$p'\eta_0\chi/d^2$
Температура T	$T'Hd^2/\rho c_p\chi$
Компоненты скорости (u, v, w)	$(u', v', w')\chi/d$
Число Рэлея Ra	$Ra = \alpha g_z \rho d^3 \Delta T / \eta_0 \chi$

Здесь H — тепловыделение радиоактивных изотопов в мантии; c_p — удельная теплоемкость при постоянной температуре; d — расстояние от поверхности Земли до ядромантийной границы; $\Delta T = T_0$ — разность между температурой на подошве нижней мантии и температурой на поверхности; η_0 — масштабный множитель для динамической вязкости.

В результате в уравнении (1.4) вместо $\alpha \rho g_z$ появится число Рэлея, а в (1.5) “исчезнет” сомножитель χ :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - RaT, \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T. \quad (1.5a)$$

Из соображений простоты у обезразмеренных переменных оставлены те же обозначения, что и у размерных.

1.2.1. Краевые условия

В рассматриваемой ниже задаче тестирования [4] предполагаются симметричные условия на всех боковых границах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0, & \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad 0 \leq z \leq 1; \\ & \quad x = X, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad 0 \leq z \leq 1; \\ \frac{\partial T}{\partial y} = v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq z \leq 1; \\ & \quad y = Y, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq z \leq 1, \end{aligned}$$

где X, Y — длина и соответственно ширина вычислительной области (параллелепипеда).

На верхней границе температура и компоненты скорости нулевые, на нижней границе температура $T_0 = 1$ и компоненты скорости нулевые:

$$\begin{aligned} T = 1, \quad u = v = w = 0, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y; \\ T = 0, \quad u = v = w = 0, \quad z = 1, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y. \end{aligned}$$

1.2.2. Начальные данные

Система уравнений (1.1)–(1.5) устроена таким образом, что при $t = 0$ задаются начальные условия лишь для температуры [17]:

$$T(x, y, z, 0) = \widehat{T}(x, y, z).$$

В качестве \widehat{T} в настоящей работе выбиралась функция

$$\widehat{T}(x, y, z) = (1 - z) + 0.2(\cos(\pi x/X) + \cos(\pi y/Y)) \sin(\pi z). \quad (1.6)$$

2. Описание трехмерных геодинамических течений с применением завихренности и векторного потенциала

Система дифференциальных уравнений, применяемых для расчетов течения мантийного вещества, может быть записана в переменных $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\psi}$ [8, 16, 18].

Завихренность $\boldsymbol{\omega}$ определяется из соотношения

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}, \quad (2.1)$$

которое расписывается покомпонентно следующим образом:

$$\omega^x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega^y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega^z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Кроме того, вводится векторный потенциал

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{i}\psi^x + \mathbf{j}\psi^y + \mathbf{k}\psi^z,$$

удовлетворяющий уравнению несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$$

причем

$$\mathbf{U} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad (2.2)$$

т. е.

$$u = \frac{\partial \psi^z}{\partial y} - \frac{\partial \psi^y}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \psi^x}{\partial z} - \frac{\partial \psi^z}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial \psi^y}{\partial x} - \frac{\partial \psi^x}{\partial y}. \quad (2.3)$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получим

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\omega}. \quad (2.4)$$

Если в (2.4) учесть, что векторный потенциал может быть выбран произвольно, например, так, чтобы [8]

$$\nabla \boldsymbol{\psi} = 0,$$

то из уравнения (2.4) получим векторное уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}$$

или три скалярных:

$$\nabla^2 \psi^x = -\omega^x, \quad \nabla^2 \psi^y = -\omega^y, \quad \nabla^2 \psi^z = -\omega^z. \quad (2.5)$$

Применяя операцию “ротор” к уравнениям (1.2)–(1.4) и учитывая, что

$$\omega^x = w_y - v_z, \quad \omega^y = u_z - w_x, \quad \omega^z = v_x - u_y, \quad \mathbf{G} = \eta \boldsymbol{\omega},$$

получим соотношения

$$\begin{aligned} \nabla^2 G^x &= \eta_{xx} \omega^x + (\eta_x \omega_x^x + \eta_y \omega_x^y + \eta_z \omega_x^z) + F_1 + \text{Ra} T_y, \\ \nabla^2 G^y &= \eta_{yy} \omega^y + (\eta_x \omega_y^x + \eta_y \omega_y^y + \eta_z \omega_y^z) + F_2 - \text{Ra} T_x, \\ \nabla^2 G^z &= \eta_{zz} \omega^z + (\eta_x \omega_z^x + \eta_y \omega_z^y + \eta_z \omega_z^z) + F_3, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= 2(\eta_{zz} w_y - \eta_{yy} v_z) + 2\eta_{yz}(v_y - w_z) - \eta_{xy}(u_z + w_x) + \eta_{xz}(v_x - u_y); \\ F_2 &= 2(\eta_{xx} u_z - \eta_{zz} w_x) + 2\eta_{xz}(w_z - u_x) - \eta_{yz}(v_x + u_y) + \eta_{xy}(w_y - v_z); \\ F_3 &= 2(\eta_{yy} v_x - \eta_{xx} u_y) + 2\eta_{xy}(u_x - v_y) - \eta_{xz}(w_y + v_z) + \eta_{yz}(u_z - w_x). \end{aligned}$$

В случае постоянной вязкости запишем

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} \left(\text{Ra} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mathbf{j} \left(-\text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \mathbf{k} 0,$$

т. е. имеем еще три скалярных уравнения Пуассона (к имеющимся в (2.5)):

$$\nabla^2 \omega^x = \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad \nabla^2 \omega^y = -\text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \nabla^2 \omega^z = 0 \quad (2.7)$$

или три уравнения (2.6) в случае переменной вязкости. Причем компоненты вектора завихренности вычисляются простым делением компонент вектора \mathbf{G} на η в каждой точке вычислительной области.

Последнее уравнение, замыкающее систему, — уравнение теплопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T. \quad (2.8)$$

Таким образом, для решения поставленной трехмерной задачи потребуется интегрирование шести однотиповых уравнений Пуассона и вычисление уравнения (2.8) для температуры, которое является общим для любого способа записи основных уравнений.

2.1. Граничные условия для завихренности и векторного потенциала

С учетом краевых условий в п. 1.2.1 граничные условия для функций ω, ψ выглядят следующим образом:

на поверхностях S_{left} , где $x = 0$, и S_{right} , где $x = X$ (рис. 1), $0 \leq y \leq Y$, $0 \leq z \leq 1$:

$$\frac{\partial \psi^x}{\partial x} = \psi^y = \psi^z = 0, \quad \frac{\partial \omega^x}{\partial x} = \omega^y = 0, \quad \omega^z = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (2.9)$$

на поверхностях S_{front} , S_{back} , где $y = 0$ и $y = Y$ (рис. 2), $0 \leq x \leq X$, $0 \leq z \leq 1$:

$$\frac{\partial \psi^y}{\partial y} = \psi^x = \psi^z = 0, \quad \frac{\partial \omega^y}{\partial y} = \omega^x = 0; \quad \omega^z = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2.10)$$

на поверхностях S_{bottom} , S_{top} , где $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 3), $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$:

$$\frac{\partial \psi^x}{\partial z} = \psi^x = \frac{\partial \psi^y}{\partial z} = \psi^y = \psi^z = 0, \quad \omega^x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega^y = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \omega^z = 0. \quad (2.11)$$

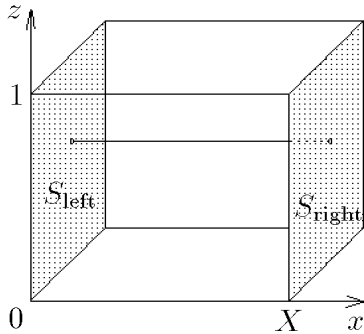


Рис. 1. (S_{left} , S_{right})-плоскости (yz).

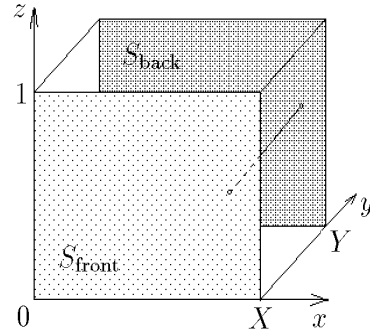


Рис. 2. (S_{front} , S_{back})-плоскости (xz).

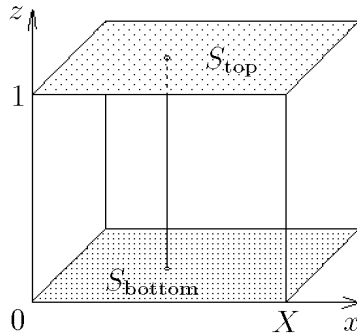


Рис. 3. (S_{bottom} , S_{top})-плоскости (xy).

3. Конечно-разностный алгоритм решения задачи

Для решения поставленной задачи вводилась простейшая равномерная сетка. В прямоугольном параллелепипеде $\Pi = [0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$, который с помощью одномерных сеток

$$\begin{aligned}\zeta_m^{(1)} : 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_M = X, \\ \zeta_n^{(2)} : 0 = y_1 < y_2 < \dots < y_N = Y, \\ \zeta_k^{(3)} : 0 = z_1 < z_2 < \dots < z_K = Z\end{aligned}$$

разбит на частичные параллелепипеды:

$$\Pi_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

($i = 1, 2, \dots, M-1; j = 1, 2, \dots, N-1; k = 1, 2, \dots, K-1$), вводились постоянные $h_x = x_{i+1} - x_i$, $h_y = y_{j+1} - y_j$, $h_z = z_{k+1} - z_k$. Кроме того, $\Delta t = t_{s+1} - t_s = \tau_t = \text{const}$, где индексом s обозначен текущий слой по времени: $t_s = s\Delta t$ ($s = 0, 1, 2, \dots$).

На примере задачи с переменной вязкостью алгоритм решения задачи сводится к последовательному интегрированию системы уравнений $\{(2.3), (2.4), (2.6)\}$ на каждом слое по времени. При этом для решения каждого уравнения Пуассона $\nabla^2 \Omega = \Phi$ используется итерационная схема стабилизирующей поправки [19]:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega^{n+1/3} - \Omega^n}{\tau_f} &= L_{xx}\Omega^{n+1/3} + L_{yy}\Omega^n + L_{zz}\Omega^n - \Phi, \\ \frac{\Omega^{n+2/3} - \Omega^{n+1/3}}{\tau_f} &= L_{yy}(\Omega^{n+2/3} - \Omega^n), \\ \frac{\Omega^{n+1} - \Omega^{n+2/3}}{\tau_f} &= L_{zz}(\Omega^{n+1} - \Omega^n),\end{aligned}\tag{3.1}$$

где Φ — правая часть уравнения Пуассона; τ_f — итерационный параметр, играющий роль фиктивного времени. Итерационный процесс останавливается при условии

$$\max \left| \frac{\Omega^{n+1} - \Omega^n}{\Omega^{n+1}} \right| < \varepsilon,\tag{3.2}$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторая малая положительная константа, определяемая в процессе вычислений; верхний индекс в формулах (3.1), (3.2) обозначает номер итерационного шага.

Уравнение переноса тепла (2.6) интегрируется также с применением схемы стабилизирующей поправки:

$$\begin{aligned}\frac{T^{s+1/3} - T^s}{\tau_t} + uL_x T^{s+1/3} - L_{xx} T^{s+1/3} &= -vL_y T^s + L_{yy} T^s - wL_z T^s + L_{zz} T^s, \\ \frac{T^{s+2/3} - T^{s+1/3}}{\tau_t} + vL_y T^{s+2/3} - L_{yy} T^{s+2/3} &= vL_y T^s - L_{yy} T^s, \\ \frac{T^{s+1} - T^{s+2/3}}{\tau_t} + wL_z T^{s+1} - L_{zz} T^{s+1} &= wL_z T^s - L_{zz} T^s,\end{aligned}\tag{3.3}$$

где τ_t — величина шага по времени.

В схемах (3.1) и (3.3) трехточечные разностные операторы L_{xx} , L_{yy} , L_{zz} и L_x , L_y , L_z аппроксимируют дифференциальные следующим образом:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cong L_{xx}f = \frac{f_{i+1} - 2f + f_{i-1}}{h_x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cong L_x f = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h_x}.$$

Для остальных операторов аппроксимации подобны (3.4).

На каждом дробном шаге (итерации) схем (3.1), (3.3) применялись скалярные трехточечные прогонки. Схема вычислений выглядит следующим образом:

- 1) По закону (1.6) вычисляется начальное распределение температуры.
- 2) Вычисляется в случае переменной вязкости (в соответствии с работой [4]) $\eta(T) = \exp[\theta/(T + \Theta) - \theta/(0.5 + \Theta)]$, причем $\theta = [225/\ln(r)] - 0.25 \ln(r)$ и, кроме того, $r = \eta|_{T=0}/\eta|_{T=1} = 20$.
- 3) Вычисляются правые части уравнений (2.6) или (2.7).
- 4) Из уравнений (2.6) или (2.7) методом установления определяются компоненты вектора завихренности.
- 5) Из уравнений (2.5) методом установления определяются компоненты векторного потенциала.
- 6) Вычисляются компоненты вектора скорости по формулам (2.3).
- 7) Вычисляются там, где это необходимо, граничные условия для завихренности по известной схеме усреднения (Полежаев и др. [20]), которая позволяет повысить устойчивость вычислительного алгоритма:

$$\omega_\Gamma^{n+1} = \gamma F(\psi^{n+1}) + (1 - \gamma)\omega_\Gamma^n.$$

Здесь γ — параметр релаксации, причем $\gamma \in (0, 1)$, а $F(\psi^{n+1})$ — правая часть соотношений, которые аналогичны условиям Тома [21] для двумерного случая:

на поверхности (yz) , $x = \text{const}$:

$$\omega_{1,j,k}^z = -\frac{2}{h_x^2}(\psi_{2,j,k}^z), \quad i = 1,$$

$$\omega_{M,j,k}^z = -\frac{2}{h_x^2}(\psi_{M-1,j,k}^z), \quad i = M;$$

на поверхности (xz) , $y = \text{const}$:

$$\omega_{i,1,k}^z = -\frac{2}{h_y^2}(\psi_{i,2,k}^z), \quad j = 1,$$

$$\omega_{i,N,k}^z = -\frac{2}{h_y^2}(\psi_{i,N-1,k}^z), \quad j = N;$$

на поверхности (xy) , $z = \text{const}$:

$$\omega_{i,j,1}^x = -\frac{2}{h_z^2}(\psi_{i,j,2}^x), \quad \omega_{i,j,1}^y = -\frac{2}{h_z^2}(\psi_{i,j,2}^y), \quad k = 1,$$

$$\omega_{i,j,K}^x = -\frac{2}{h_z^2}(\psi_{i,j,K-1}^x), \quad \omega_{i,j,K}^y = -\frac{2}{h_z^2}(\psi_{i,j,K-1}^y), \quad k = K.$$

Остальные условия от векторного потенциала не зависят.

8) Проверяется по формуле (3.2) сходимость для векторного потенциала; если условие (3.2) при некотором $\varepsilon > 0$ не выполняется, то процедура вычислений повторяется (внутренние итерации).

9) На основе решения уравнения (2.8), определяется распределение температуры внутри расчетной области.

10) Вычисляются вспомогательные параметры задачи, а также величины, необходимые для тестирования (см. п. (i)–(vi) следующего параграфа), после чего начиная с п. 2 вычисления повторяются.

4. Результаты численных расчетов

Поскольку основной целью работы является сопоставление с результатами Busse et al. [4], в задаче вычислялись следующие параметры:

(i) число Нуссельта (Nu) по формуле Blankenbach [22]

$$\text{Nu} = -(XY) \iint_{S_{\text{top}}} T_z dx dy$$

и среднеквадратичная скорость

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{XYZ} \iiint_A (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \right\}},$$

где A — объем параллелепипеда со сторонами X , Y и Z ;

(ii) значение вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя;

(iii) значение теплового потока $\vartheta = -\partial T / \partial z$ в некоторых точках области;

(iv) интегральный параметр, вычисляемый по формуле

$$\tau(x, z) = \int_0^Y \frac{\partial T}{\partial z} dy$$

в точках $(0, 0.25)$, $(L/2, 0.25)$, $(L, 0.25)$ интегрированием вдоль оси Y ;

(v) средняя температура T_m , вычисляемая на горизонтальном сечении области на глубине $z = 0.75$;

(vi) в случае переменной вязкости значение вертикальной компоненты вектора завихренности ω^z в точке $(0.75, 0.25, 0.75)$.

Размерные значения (в системе СИ), которые были использованы в [4] и в настоящей работе, принимались следующими:

$$d = 2\,700\,000, \quad \Delta T = 3700, \quad \chi = 10^{-6}, \quad \alpha = 10^{-5}, \quad \rho = 3300, \quad g_z = 10.$$

4.1. Постоянная вязкость

Расчеты проводились для следующих значений параметров: длина области $X = 1.0079$, ширина $Y = 0.6283$, высота $Z = 1.000$. Масштабный множитель при вязкости $\eta_0 = 8.0198 \cdot 10^{23}$. Число Рэлея $\text{Ra} = 30\,000$.

Система, которая решается при постоянной вязкости, состоит из уравнений (2.5), (2.7) и уравнения переноса тепла (2.8). Граничные условия в точности соответствуют условиям (2.9)–(2.11).

Следует заметить, что для задачи в представленном виде разноименные компоненты векторов ω и ψ не связаны между собой ни через соотношения (2.5), (2.7), (2.3), ни через граничные условия. Благодаря этому обстоятельству можно разбить процедуру вычислений на три независимых потока, что значительно сократит время расчетов на многопроцессорной ЭВМ.

Результаты. В работе Busse [4] наиболее полно представлены результаты Кристенсена (Chr), которые можно принять за эталонные. Сопоставление результатов расчетов Кристенсена и автора (Che) представлено в табл. 2. Соответствие достаточно хорошее.

Т а б л и ц а 2

Векторный потенциал — вектор завихренности.

Постоянная вязкость

№	Наименование параметра	Результаты Кристенсена на сетке $32 \times 32 \times 64$	Результаты автора на сетке $32 \times 32 \times 32$	Относительная ошибка, %
1	Nu	3.544	3.577	0.9312
2	V_{rms}	41.00	41.41	1.0000
3	$w(0,0,0.5)$	116.6	121.2	3.9451
4	$w(0,S,0.5)$	40.50	40.00	1.2346
5	$T(0,0,0.5)$	0.8013	0.8099	1.0733
6	$T(0,S,0.5)$	0.6188	0.6174	0.2262
7	$\tau(0,0)$	-0.3647	-0.3648	0.0274
8	$\tau(L/2,0)$	-0.1292	-0.1196	7.4303
9	$\tau(L,0)$	-0.1104	-0.1052	4.7101
10	$T_m(0.75)$	0.5215	0.5197	0.3452

Относительная ошибка вычислялась по формуле

$$\text{Err} = \left| \frac{\text{Che} - \text{Chr}}{\text{Chr}} \right| 100\%. \quad (4.1)$$

Близкие результаты были получены и на сетке $(24 \times 24 \times 24)$.

4.2. Переменная вязкость

Расчеты проводились для следующих значений параметров: длина области $X = 1.00$, ширина $Y = 1.00$, высота $Z = 1.00$. Масштабный множитель при вязкости: $\eta_0 = 1.20165 \cdot 10^{24}$. Число Рэлея $Ra = 20\,000$, $r = \eta|_{T=0}/\eta|_{T=1} = 20$.

Система, которая решается при переменной вязкости, состоит из уравнений (2.5), (2.6) и уравнения переноса тепла (2.7). Граничные условия в точности соответствуют условиям (2.9)–(2.11).

Кроме этих шести уравнений Пуассона в расчетах используются соотношения (2.3) для вычисления вектора скорости.

Результаты. Как и в предыдущем случае с постоянной вязкостью, полученные автором результаты расчетов с вязкостью, зависящей от температуры, сопоставлялись с результатами расчетов Кристенсена (табл. 3). Установлено их хорошее соответствие.

Т а б л и ц а 3

Векторный потенциал — вектор завихренности.
Переменная вязкость

№	Наименование параметра	Результаты Кристенсена на сетке $32 \times 32 \times 64$	Результаты автора на сетке $32 \times 32 \times 32$	Относительная ошибка, %
1	Nu	3.03927	3.040	0.0240
2	V_{rms}	35.132	35.18	0.1366
3	$w(0,0,0.5)$	165.91	167.2	0.7775
4	$w(0,S,0.5)$	-26.72	-26.43	1.0853
5	$w(L,S,0.5)$	-58.23	-58.23	0.0000
6	$T(0,0,0.5)$	0.90529	0.9067	0.1558
7	$T(0,S,0.5)$	0.49565	0.4965	0.1715
8	$T(L,S,0.5)$	0.23925	0.2379	0.5643
9	$\vartheta(0,0)$	5.83390	5.8121	0.3737
10	$\vartheta(0,S)$	1.71360	1.7322	1.0854
11	$\vartheta(L,S)$	0.7684	0.7731	0.6117
12	$\tau(0,0)$	-0.5059	-0.5141	1.6209
13	$\tau(0,S)$	-0.1921	-0.1891	1.5617
14	$\tau(L,S)$	-0.1388	-0.1356	2.3055
15	$T_m(0.75)$	0.56593	0.5636	0.4117
16	$T_m(0.50)$	0.58158	0.5799	0.2889
17	$\Omega(0.75,0.25,0.75)$	-11.125	-11.25	1.1236

Результаты расчетов сравнивались с данными Кристенсена как наиболее полными из имеющихся в статье [4]. Ошибка вычислялась по (4.1). Аналогичные результаты получены на сетке $(48 \times 48 \times 48)$.

Выводы

Полученные результаты позволяют сделать оптимистический вывод о жизнеспособности подхода с использованием переменных “завихренность” — “векторный потенциал” для задач тепломассопереноса в мантии Земли.

Автор благодарит Г. Г. Черных и С. А. Тычкова за постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] РЫКОВ В. В., ТРУБИЦИН В. П. Трехмерная модель мантийной конвекции с движущимися континентами // Вычисл. сейсмология. 1994. Вып. 27. С. 21–41.
- [2] РЫКОВ В. В., ТРУБИЦИН В. П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоника литосферных плит // Там же. Вып. 26. С. 94–102.

- [3] GABLE W., O'CONNELL J. Convection in three dimensions with surface plates: generation of toroidal flow // *J. Geophys. Research.* 1991. Vol. 96, No. B5. P. 8391–8405.
- [4] BUSSE F. H., CHRISTENSEN U., CLEVER R. ET AL. 3D Convection at infinite Prandtl number in cartesian geometry — a benchmark comparison. *Geophys. Astrophys // Fluid Dynamics.* 1993. Vol. 75. P. 39–59.
- [5] GLATZMAIER G. A., SCHUBERT G. Three-dimensional spherical model of layered and whole mantle convection // *J. Geophys. Research.* 1993. Vol. 98, No. B12. P. 21969–21976.
- [6] MACHETEL P., THORAVAN C., BRUNET D. Spectral and geophysical of 3-D spherical mantle convection with an endothermic phase change at the 670 km discontinuity // *Phys. Earth and Planetary Interiors.* 1995. Vol. 88. P. 43–51.
- [7] ZHONG S., ZUBER M. Role of temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection // *J. Geophys. Research.* 2000. Vol. 105, No. B5. P. 11063–11082.
- [8] РОУЧ Х. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
- [9] АНДЕРСОН Д., ТАННЕХИЛЛ ДЖ., ПЛЕТЧЕР Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990.
- [10] ФЛЕТЧЕР К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1, 2. М.: Мир, 1991.
- [11] БЕССОНОВ О. А., БРАЙЛОВСКАЯ В. А., ПОЛЕЖАЕВ В. И. Пространственные эффекты конвекции в расплавах: концентрационные неоднородности, возникновение несимметрии и колебания // *Механика жидкости и газа.* 1997. №3.
- [12] AZIZ K., HELLUMS J. D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection // *Phys. Fluids.* 1967. Vol. 10. P. 314–324.
- [13] SPARKS D. W., PARMENTIER E. M., MORGAN J. P. Three-dimensional mantle convection beneath spreading centers spreading centers Implications for along-axis variations in crustal thickness and gravity // *J. Geophys. Research.* 1993. Vol. 98, No. B12. P. 21977–21995.
- [14] ТЫЧКОВ С. А. Конвекция в мантии и динамика платформенных областей. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1984.
- [15] ДОБРЕЦОВ Н. Л., КИРДЯШКИН А. Г. Глубинная геодинамика. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1994.
- [16] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
- [17] ФЕДОРЮК М. В. Характеристики течений несжимаемой жидкости в гравитационном поле // *Мат. сб.* 1988. №137(179), 4(12).
- [18] АРФКЕН Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970.
- [19] ЯНЕНКО Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967.

- [20] ПОЛЕЖАЕВ В. И., ГРЯЗНОВ В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь, функция тока // Докл. АН СССР. 1974. Т. 219, №2.
- [21] ТОМ А., ЭЙПЛТ К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.: Энергия, 1964.
- [22] BLANKENBACH В., BUSSE F. ET AL. A benchmark comparison for mantle convection codes // Geophys. J. Int. 1989. Vol. 98. P. 23–38.

*Поступила в редакцию 2 октября 2001 г.,
в переработанном виде — 24 октября 2001 г.*