Вычислительные технологии **Том 7, № 1, 2002**

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

Б. С. Добронец, Е. Л. Рощина
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: dobronec@fivt.kgtu.runnet.ru

The main idea of new approach is to analyse partial derivatives of the solution with respect to the parameters. This approach mostly coincides with the standard sensitivity analysis, but its implementation requires interval analysis techniques. Therefore, we call the method as the Method Of Interval Sensitivity Analysis (MISA).

Введение

В работе [1] рассматривается анализ чувствительности для решения интервальных систем линейных алгебраических уравнений. В работе [2] метод интервального анализа чувствительности (МИАЧ) представлен для вычисления интервальных расширений некоторых классов функций, а в [3] этот метод рассмотрен для интервальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и с его помощью построены оптимальные решения для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В этой статье мы будем рассматривать МИАЧ для построения оптимальных интервальных расширений, решения систем нелинейных уравнений и ОДУ.

Обозначим интервальным числом вещественный отрезок $\boldsymbol{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$, такие числа будем записывать жирным шрифтом: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{f}$. $\mathbb{IR}^n$ — пространство интервальных векторов размерности n, шириной интервального числа назовем величину $\operatorname{wid}\boldsymbol{a} = \overline{a} - \underline{a}$. Интервальную функцию $\boldsymbol{f}$ будем называть *монотонной по включению*, если из включения $\boldsymbol{x} \subseteq \boldsymbol{y}$ вытекает $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \subseteq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$. Интервальным расширением функции $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем монотонную по включению интервальную функцию $\boldsymbol{f}$ такую, что $f(x) = \boldsymbol{f}(x)$ [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим некоторое операторное уравнение:

$$L(u, k) = 0, \tag{1}$$

где $u \in H$ — неизвестное решение; $k \in \mathbb{R}^m$ — вектор параметров, $k \in \boldsymbol{k} = [\underline{k}, \overline{k}]$; H — некоторое функциональное пространство.

В частности, задача (1) может быть системой нелинейных уравнений или системой дифференциальных уравнений.

Предположим, что мы знаем оператор решения $T : \mathbb{R}^m \to H$ задачи (1). Под оператором решения T будем понимать отображение, которое сопоставляет значению параметра k решение

$$u = T(k). \tag{2}$$

Оператор решения может быть представлен в различном виде, например, для систем линейных алгебраических уравнений есть обратная матрица. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество решений задачи (1):

$$\mathcal{U} = \{u \mid u = T(k), k \in \boldsymbol{k}\},$$

а через $\boldsymbol{u}$ — интервальное решение задачи (1), определяемое как

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{T} = [\underline{T}, \overline{T}]$ — интервальное расширение оператора решения T:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{k}) \supseteq \{T(k) \mid k \in \boldsymbol{k}\}.$$

Для простоты предположим, что $H \equiv \mathbb{R}$. В случае, если интервальное расширение оператора $\boldsymbol{T}$ оптимально, то

$$\inf \mathcal{U} = \underline{T}(\boldsymbol{k}), \quad \sup \mathcal{U} = \overline{T}(\boldsymbol{k}).$$

В общем случае интервальное расширение $\boldsymbol{T}$ не оптимально и

$$\inf \mathcal{U} \geq \underline{T}(\boldsymbol{k}) = \underline{\boldsymbol{u}}, \quad \sup \mathcal{U} \leq \overline{T}(\boldsymbol{k}) = \overline{\boldsymbol{u}}.$$

Рассмотрим уточнение границ интервального решения, в частности $\overline{\boldsymbol{u}}$. Отметим, что существует набор параметров $k^* \in \boldsymbol{k}$ такой, что

$$\overline{u} = T(k^*). \tag{3}$$

Главной целью алгоритма уточнения является нахождение вектора $\boldsymbol{k}^* \subset \boldsymbol{k}$ такого, что $k^* \in \boldsymbol{k}^*$, ширина вектора $\boldsymbol{k}^*$ должна быть минимальна: $\sum_{i=1}^{m} \operatorname{wid} \ \boldsymbol{k}^* \to \min$.

Алгоритм нахождения $\boldsymbol{k}^*$. Начальный шаг. Задаем $\boldsymbol{k}^* := \tilde{\boldsymbol{k}}$. Здесь

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_j = \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \geq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \leq 0, \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}'_j \ni 0, \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{u}'_j = \frac{\partial u}{\partial k_j} = \frac{\partial T}{\partial k_j}(\boldsymbol{k}), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Далее исполняем следующий псевдокод:

`do while` $(\exists j : \operatorname{wid} \tilde{\boldsymbol{k}}_j \neq 0 \text{ and } \boldsymbol{u}_j \not\ni 0)$;

1. $\boldsymbol{u}'_j := \dfrac{\partial T}{\partial k_j}(\boldsymbol{k}^*), \quad j = 1, \ldots, m;$

2. $\tilde{\boldsymbol{k}}_j := \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}_j \geq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}_j \leq 0, \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{u}_j \ni 0; \end{cases}$

3. $\boldsymbol{k}^* := \tilde{\boldsymbol{k}}$;

`end do`.

Если найден вектор $\boldsymbol{k}^*$ нулевой ширины, т. е. $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{wid}\ \boldsymbol{k}^* = 0$, то тем самым из (3) мы можем получить оптимальные границы интервального решения.

Рассмотрим некоторые приложения метода интервального анализа чувствительности.

2. Интервальные расширения

Пусть дана непрерывная вещественная функция $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Интервальную функцию

$$\boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x}) = [\underline{f}_u(\boldsymbol{x}), \overline{f}_u(\boldsymbol{x})] = [\min_{x \in \boldsymbol{x}} f(x), \max_{x \in \boldsymbol{x}} f(x)]$$

назовем *объединенным интервальным расширением* f. Из всех интервальных расширений функции f объединенное интервальное расширение имеет минимальную ширину.

Проблема. *Построить интервальное расширение* $\boldsymbol{f}$*, ближайшее к* $\boldsymbol{f}_u$.

Пусть $\boldsymbol{f}$ — некоторое интервальное расширение f. Если $\boldsymbol{f}$ не оптимально, то выполнено включение

$$\underline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \underline{f}_u(\boldsymbol{x}),\ \overline{f}(\boldsymbol{x}) \geq \overline{f}_u(\boldsymbol{x}).$$

Рассмотрим алгоритм уточнения $\overline{f}(\boldsymbol{x})$. Положим

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_j := \begin{cases} \overline{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \geq 0, \\ \underline{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \leq 0, \\ \boldsymbol{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \ni 0, \end{cases}$$

где

$$\boldsymbol{f}'_j := \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Алгоритм уточнения. Начальный шаг $\boldsymbol{x}^* := \tilde{\boldsymbol{x}}$;

`do while` $(\exists j : \mathrm{wid}\ \tilde{\boldsymbol{x}}_j \neq 0 \text{ and } \boldsymbol{f}'_j \not\ni 0)$;

1. $\boldsymbol{f}'_j := \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*), \quad j = 1, \ldots, m;$
2. $\tilde{\boldsymbol{x}}_j := \begin{cases} \overline{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \geq 0, \\ \underline{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \leq 0, \\ \boldsymbol{x}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{f}'_j \ni 0; \end{cases}$
3. $\boldsymbol{x}^* := \tilde{\boldsymbol{x}}$;

`end do`.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f = 2x^2 - 2xy + y + 2x$. Требуется найти интервальное расширение $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ на интервале $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [0, 1] \times [0, 1]$.

Следует отметить, что естественное интервальное расширение $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{x}$ не оптимально.

Находим интервальное расширение производных $\boldsymbol{f}'_x(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [0, 6] \geq 0$ и $\boldsymbol{f}'_y(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = [-1, 1] \ni 0$. Полагаем $\tilde{\boldsymbol{x}} := 1$, $\tilde{\boldsymbol{y}} := [0, 1]$.

Далее находим $\boldsymbol{f}'_y(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = -1 < 0$ и полагаем $\tilde{\boldsymbol{y}} := 0$.

Следовательно, верхняя граница интервального расширения $\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(1, 0)$. Нижнюю границу $\underline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ находим аналогично.

Пример 2. Рассмотрим функцию f трех переменных на $[0,1]^3$ с интервальными параметрами $k_1,\ k_2,\ k_3 \in [0.4, 0.6]$:

$$f(x_1,x_2,x_3) = k_1x_1x_2x_3 + 2x_1x_2 + 2k_2x_2x_3 + k_3x_1 - (1-k_2)x_2 - k_2x_3.$$

Вычислим $\overline{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$. Найдем частные производные

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}'_1(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= [\boldsymbol{k}_3, 2+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_3] > 0,\\
\boldsymbol{f}'_2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= [-1-\boldsymbol{k}_2, 1+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2] \ni 0,\\
\boldsymbol{f}'_3(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= [-\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2] \ni 0.
\end{aligned}$$

Так как $\boldsymbol{f}'_1 > 0$, то функция монотонно возрастает по x_1 и $\tilde{x}_1 = \overline{x}_1 = 1$. Вычисляем частные производные

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}'_2(\overline{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= [1-\boldsymbol{k}_2, 1+\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2] > 0,\\
\boldsymbol{f}'_3(\overline{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= [-\boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2] \ni 0.
\end{aligned}$$

Полагаем $\tilde{\boldsymbol{x}}_2 = \overline{x}_2 = 1$.

При $\tilde{x}_1 = 1,\ \tilde{x}_2 = 1,\ \tilde{\boldsymbol{x}}_3 = \boldsymbol{x}_3$

$$\boldsymbol{f}'_3(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\boldsymbol{x}_3) = \boldsymbol{k}_1 + \boldsymbol{k}_2 > 0.$$

Таким образом мы построили верхнюю границу интервального расширения в виде

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) = f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3).$$

Аналогично можно построить нижнюю границу

$$\underline{f}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) = f(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3).$$

3. Системы нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$x = f(x,k), \tag{4}$$

где $f = \{f_i\}_{i=1}^n$, $f_i = f_i(x,k)$ — вещественные функции, имеющие непрерывные производные; $k \in \mathbb{R}^m$ — вектор параметров, $k \in \boldsymbol{k}$; $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных.

Обозначим через $\mathcal{X}$ множество решений задачи (4), т. е.

$$\mathcal{X} = \{\, x \mid x = f(x,k), k \in \boldsymbol{k}\}, \tag{5}$$

и через $\boldsymbol{x}$ — интервальное решение, $\boldsymbol{x} \supseteq \mathcal{X}$. Интервальное решение минимальной ширины назовем *оптимальным.* Если интервальное решение $\boldsymbol{x} = ([\underline{x}_i, \overline{x}_i])_{i=1}^n$ не оптимально, то рассмотрим алгоритм уточнения $\underline{x}_i,\ \overline{x}_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Проблема. *Для фиксированного индекса i найти вектор $k^* \in \boldsymbol{k}$, такой что*

$$x_i^* = \sup_{x\in\mathcal{X}}\{x_i\} \quad x^* = f(x^*,k^*).$$

Обозначим через $\boldsymbol{x}'_{ij}$ интервальное расширение $\partial x_i/\partial k_j$ и через $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — интервальное решение задачи, определяемое как

$$\tilde{x} = f(\tilde{x},\tilde{k}), \quad \tilde{k} \in \tilde{\boldsymbol{k}},$$

где

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_j = \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \geq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \leq 0, \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \ni 0. \end{cases}$$

Значения $\boldsymbol{x}'_{ij}$ будем искать как интервальное решение системы

$$\boldsymbol{x}'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial k_j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k})\boldsymbol{x}_{lj}.$$

Заметим, что $x_i^* \leq \tilde{x}_i \leq \overline{x}_i$.

Алгоритм уточнения $\tilde{\boldsymbol{k}}$.

`do while` $(\exists j \exists i : \text{wid}\, \tilde{\boldsymbol{k}}_j \neq 0 \text{ and } \boldsymbol{x}'_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial k_j} \not\ni 0)$;

1. Вычислим $\tilde{\boldsymbol{x}}$ — интервальные решения системы: $\tilde{\boldsymbol{x}} = f(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{k}})$;
2. Вычислим $\boldsymbol{x}'_{ij}$ — интервальные решения системы: $$\boldsymbol{x}'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial k_j}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{k}}) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(\tilde{\boldsymbol{x}}, \tilde{\boldsymbol{k}})\boldsymbol{x}_{lj};$$
3. $\tilde{\boldsymbol{k}}_j := \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \geq 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \leq 0, \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если} \quad \boldsymbol{x'}_{ij} \ni 0; \end{cases}$

`end do`;

$\boldsymbol{k}^* := \tilde{\boldsymbol{k}}$.

Рассмотрим численный пример

$$\begin{aligned} x_1 &= -k_0 x_2 + k_1, \\ x_2 &= k_0 x_1 x_2 + k_2, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\boldsymbol{k}_0 = [0.1, 0.2]$, $\boldsymbol{k}_1 = [0.6, 1.0]$, $\boldsymbol{k}_2 = [0.0, 0.45]$. Заметим, что интервальное решение (6), найденное методом простой итерации,

$$\boldsymbol{x} = ([0.5, 1.0], [0.0, 0.5])$$

не является оптимальным. Уточним $\overline{x}_2$. Для этого найдем интервальные расширения $\partial x_i/\partial k_j$ — $\boldsymbol{x}'_{ij}$. Продифференцировав исходную систему по k_j, получим систему нелинейных уравнений для определения $\boldsymbol{x}'_{ij}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_{10} &= -\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_{20} - \boldsymbol{x}_2, \\ \boldsymbol{x}'_{20} &= \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_{10} + \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{20} + \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2, \\ \boldsymbol{x}'_{11} &= -\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_{21} + 1, \\ \boldsymbol{x}'_{21} &= \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_{11} + \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{21}, \\ \boldsymbol{x}'_{12} &= -\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_{22}, \\ \boldsymbol{x}'_{22} &= \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_{12} + \boldsymbol{k}_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{22} + 1. \end{aligned}$$

Решая системы вида (7) совместно с (6), получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'_{10} &= [-6.25e-01, 1.56e-02] \ni 0, \\ \boldsymbol{x}'_{20} &= [-7.81e-02, 6.26e-02] \ni 0, \\ \boldsymbol{x}'_{11} &= [1.00e-00, 1.02e+01] > 0, \\ \boldsymbol{x}'_{21} &= [0.00, 1.28e-01] \geq 0, \\ \boldsymbol{x}'_{12} &= [-2.50e-01, -1.02e-01] < 0, \\ \boldsymbol{x}'_{12} &= [1.02e+01, 1.25e+01] > 0. \end{aligned}$$

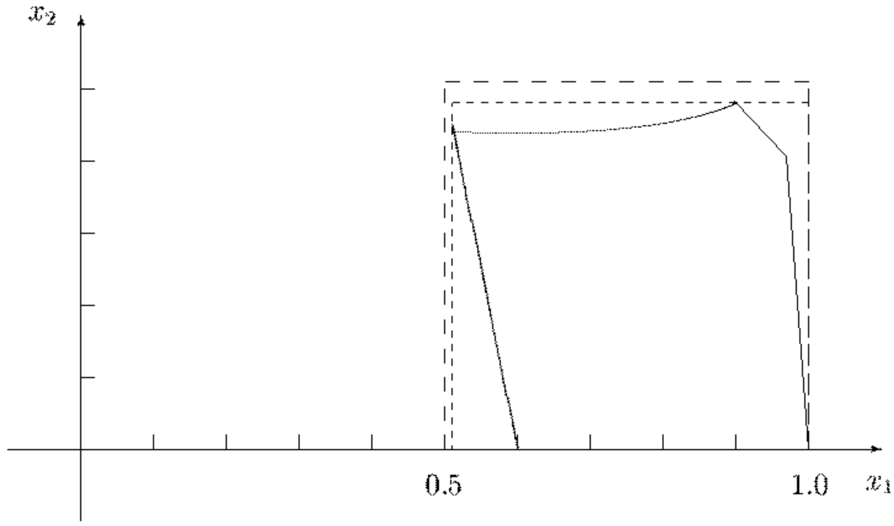

Рис. 1. Уточнение границ интервального решения: —— точное множество решений системы (6); – – – — решение с помощью интервального метода простой итерации; - - - — уточнение границы решения с помощью МИАЧ.

Таким образом, $\tilde{\boldsymbol{k}}_0 := \boldsymbol{k}_0$, $\tilde{\boldsymbol{k}}_1 := \overline{k}_1$, $\tilde{\boldsymbol{k}}_2 := \overline{k}_2$.

Далее решим систему (6) с параметрами $\tilde{\boldsymbol{k}}_0$, $\tilde{\boldsymbol{k}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{k}}_2$ (например, методом простой итерации). Получаем интервальное решение $\tilde{\boldsymbol{x}} = ([0.901\ldots, 0.956\ldots], [0.439\ldots, 0.495\ldots])$.

Используя найденное решение $\tilde{\boldsymbol{x}}$, получаем новую оценку $\boldsymbol{x}'_{10} > 0$, $\boldsymbol{x}'_{20} > 0$. Уточним параметр $\tilde{\boldsymbol{k}}_0 := \overline{k}_0$. Решение системы (6) с параметрами $\tilde{\boldsymbol{k}}_0$ — интервал $\tilde{x} = (0.90278\ldots, 0.48809\ldots)$. Таким образом уточненная верхняя граница интервального решения равна $\overline{x}_2 := \tilde{x}_2 = 0.48809\ldots$.

Используя МИАЧ, получаем оптимальные границы множества решений в виде $x = ([0.51090\ldots, 1.0], [0.0, 0.48809\ldots])$.

На рис. 1 представлены точное множество решений системы (6) и решение с помощью интервального метода простой итерации, а также уточнение границы решения с помощью МИАЧ.

4. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x'_i &= f_i(t, x, k), \quad t \in (0, l), \\ x_i(0) &= x_{0i}, \quad i = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных переменных; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — вектор начальных данных, $x_0 \in \boldsymbol{x}_0$; $k \in \mathbb{R}^m$ — вектор параметров, $k \in \boldsymbol{k}$.

Пусть решение x — функция от t, k и x_0:

$$x = x(t, k, x_0). \tag{8}$$

Обозначим через $\mathcal{X}(t)$ решение системы ОДУ:

$$\mathcal{X}(t) = \{\, x(t, k, x_0) \mid x_0 \in \boldsymbol{x}_0, k \in \boldsymbol{k} \}.$$

Как и ранее, интервальное решение x задачи (7) с минимальной шириной назовем *оптимальным.*

Для оценки $\overline{x}_i$ рассмотрим систему ОДУ

$$\tilde{x}' = f(t, \tilde{x}, \tilde{k}), \quad \tilde{k} \in \tilde{\boldsymbol{k}}, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \in \boldsymbol{x}_0. \tag{9}$$

Здесь

$$\tilde{\boldsymbol{k}}_j = \begin{cases} \overline{k}_j, & \text{если } \boldsymbol{x}^k_{ij}(t) \le 0, \\ \underline{k}_j, & \text{если } \boldsymbol{x}^k_{ij}(t) \ge 0, \\ \boldsymbol{k}_j, & \text{если } \boldsymbol{x}^k_{ij}(t) \ni 0 \end{cases}$$

и

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_0 = \begin{cases} \overline{x}_{0j}, & \text{если } \boldsymbol{x}^0_{ij}(t) \le 0, \\ \underline{x}_{0j}, & \text{если } \boldsymbol{x}^0_{ij}(t) \ge 0, \\ \boldsymbol{x}_0, & \text{если } \boldsymbol{x}^0_{ij}(t) \ni 0, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{x}^k_{ij}(t)$ — интервальное расширение $\partial x_i / \partial k_j$; $\boldsymbol{x}^0_{ij}(t)$ — интервальное расширение $\partial x_i / \partial x_{0j}$. Если интервалы $\boldsymbol{x}^k_{ij}(t)$ и $\boldsymbol{x}^0_{ij}(t)$ не содержат в себе 0, то система (9) не содержит интервальных параметров и решается интервальными или двусторонними методами с произвольной точностью [3].

Интервальные функции $\boldsymbol{x}^k_{ij}(t)$ и $\boldsymbol{x}^0_{ij}(t)$ можно определить, одновременно решая систему (7) и системы ОДУ:

$$x^{k\prime}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(t, x, k) x^k_{lj} + \frac{\partial f_i}{\partial k_j}(t, x, k), \tag{10}$$

$$x^k_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$

$$x^{0\prime}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(t, x, k) x^0_{lj}, \tag{11}$$

$$x^0_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Теорема 1. *Пусть*

$$0 \notin \frac{\partial f_i}{\partial k_j}(0, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{k}), \quad 0 \notin \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(0, \boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{k}).$$

Тогда существует $t_0 > 0$ *такое, что*

$$0 \notin \boldsymbol{x}^k_{ij}(t), \quad 0 \notin \boldsymbol{x}^0_{ij}(t).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что при выполнении условий теоремы для $t = 0$ правые части систем обыкновенных дифференциальных уравнений (10) (11) не содержат нулей и выполнены соотношения $0 \notin \boldsymbol{x}^{k\prime}_{ij}(0)$, $0 \notin \boldsymbol{x}^{0\prime}_{ij}(0)$. Следовательно, существует окрестность начальной точки $t = 0$, в которой $0 \notin \boldsymbol{x}^k_{ij}(t)$, $0 \notin \boldsymbol{x}^0_{ij}(t)$. ■

Таким образом, до момента $t_0 > 0$ мы можем построить оптимальные границы множества решений системы ОДУ.

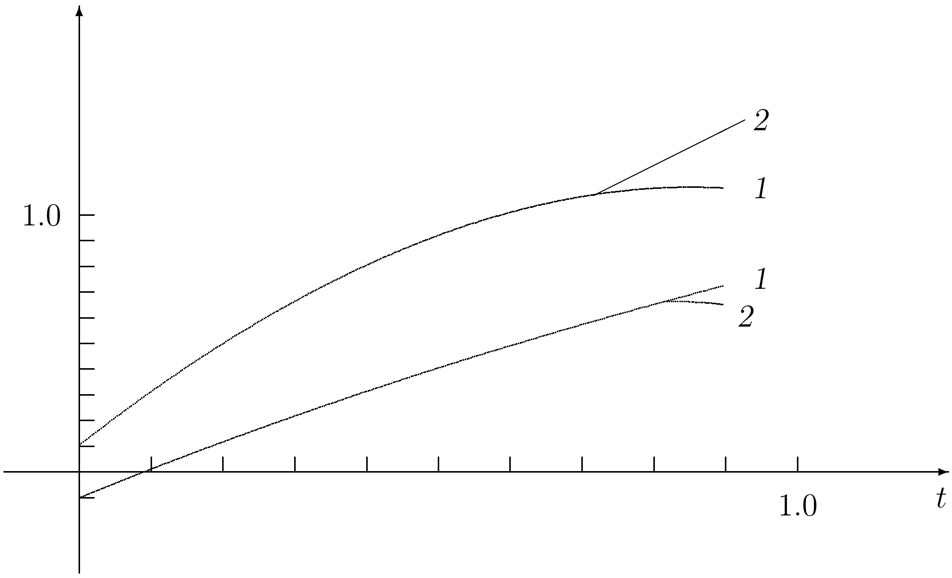

Рис. 2. Точное решение (линии *1*), решение, полученное методом интервального анализа чувствительности (линии *2*).

Рассмотрим численный пример:

$$x_1' = kx_2, \quad x_1(0) = x_{01} \in [-0.1, 0.1],$$

$$x_2' = -kx_1, \quad x_2(0) = x_{02} \in [0.9, 1.1], \quad k \in \boldsymbol{k} = [1.0, 2.0].$$

На рис. 2 показаны двустороннее решение, полученное методом интервального анализа чувствительности, и точное решение. Их сравнение показывает, что с помощью предложенного метода построены оптимальные границы интервального решения до времени $t \approx 0.71$.

Список литературы

[1] Hansen R. E. On linear algebraic equations with interval coefficients // Topics in Interval Analysis / Ed. E. Hansen. Oxford Univ. Press, 1969. P. 35–46.

[2] Dobronets B. S., Senashov V. I. On interval extensions of some classes of functions // Interval Comp. 1991. No. 1. P. 54–58.

[3] Dobronets B. S. On some two-sided methods for solving systems of ordinary diferential equations // Interval Comp. 1992. No. 1(3). P. 6–19.

[4] Moore R. E. Interval Analysis. Englewood Cliffs. N. J.: Prentiee-Hall, 1966.

Поступила в редакцию 20 ноября 2000 г.,
в переработанном виде — 25 июля 2001 г.