

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БЕЗЫМПУЛЬСНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЛЕДОВ ЗА СФЕРОЙ НА ОСНОВЕ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

О. Ф. ВОРОПАЕВА

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: vorop@lchd.ict.nsc.ru

The numerical simulation of the momentumless turbulent wakes behind a sphere including the wake under the nonzero turbulent background conditions was carried out with application of modern second order semi-empirical turbulence models. These models based on the differential equations for the set of Reynolds stress transformation. The results are compared with experimental data of Alekseenko and Kostomakha (1987, 1988).

Задачи, связанные с изучением динамики турбулентных следов за телами, движущимися в несжимаемой однородной жидкости, относятся к числу классических задач гидродинамики. Достаточно подробный обзор работ, посвященных этой теме, представлен в [1–6]. В [1, 2] выполнено детальное экспериментальное исследование безымпulsive турбулентного следа за сферой как в нетурбулизованном, так и турбулизованном, близком к изотропному, внешних потоках. Численные модели течения, основанные на неравновесной модификации $(\epsilon - \epsilon)$ -модели турбулентности [7], представлены в [3–6]. В этих работах проведено сопоставление с [1, 2] по ряду основных характеристик течения. Получено хорошее согласование численных и экспериментальных данных, продемонстрировано преимущество рассмотренных модификаций $(\epsilon - \epsilon)$ -модели турбулентности в сравнении с ее классическим вариантом. Вместе с тем, численные расчеты турбулентных следов в более сложных случаях (например, в неоднородной по плотности среде) показывают, что такие модели плохо описывают анизотропное вырождение турбулентности [8, 9]. Поэтому представляет интерес изучение динамики турбулентных следов с помощью более сложных математических моделей второго порядка. Эти модели, одной из которых является модель Лаундера и др. [10], основаны на привлечении дифференциальных уравнений переноса рейнольдсовых напряжений вместо упрощенных алгебраических соотношений.

В данной работе на примере задачи о развитии осесимметричного турбулентного следа в однородной жидкости анализируются три модели турбулентности второго порядка.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №01-01-00783.

© О. Ф. Воропаева, 2002.

В связи с тем, что в дальнейшем предполагается проведение численного моделирования динамики турбулентных следов в стратифицированной по плотности среде, задача рассматривается в трехмерной параболизированной постановке.

1. Постановка задачи

Турбулентное течение в следе за сферой может быть описано следующим осредненным уравнением движения в приближении дальнего следа [11]:

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle. \quad (1)$$

Здесь и ниже приняты следующие обозначения: $u = u_1$, $v = u_2$, $w = u_3$ — пульсационные составляющие компонент скорости в направлении осей $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$; $U = U_1$, $V = U_2$, $W = U_3$ — соответствующие компоненты скорости осредненного движения. Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна $-U_\infty$, ось z направлена вертикально вверх; $U_d = U_\infty - U$ — дефект продольной компоненты скорости. Скобки $\langle \rangle$ обозначают осреднение. В правой части (1) слагаемые с множителями в виде коэффициентов ламинарной вязкости опущены как малые.

Модели турбулентного движения. В уравнении (1) вследствие осреднения появляются неизвестные величины $\langle uv \rangle$ и $\langle uw \rangle$ — касательные компоненты тензора рейнольдсовых напряжений. Для их определения могут быть привлечены различные аппроксимации. Одна из наиболее полных современных моделей турбулентности второго порядка (Модель 1), представленная в работе [10], базируется на использовании дифференциального уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений:

$$U_\infty \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x} = P_{ij} + d_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \quad (2)$$

Слагаемые P_{ij} , d_{ij} , ϕ_{ij} , ε_{ij} отвечают за порождение энергии турбулентности осредненным движением, диффузию, обменные и диссипативные процессы соответственно ($i, j = 1, 2, 3$).

Диффузионные и диссипативные слагаемые аппроксимируются следующим образом (здесь и ниже по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_l} \right\}, \quad \varepsilon_{ij} = 2/3 \delta_{ij} \varepsilon,$$

где $e = \langle u_i u_i \rangle / 2$ — энергия турбулентности; ε — скорость диссипации энергии турбулентности в тепло; $c_s = 0.22$ — эмпирическая постоянная; δ_{ij} — символ Кронекера. Выражение для P_{ij} имеет стандартный вид:

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}.$$

Поскольку для данного течения производными величин по переменной x в правой части уравнений можно пренебречь ($k, l = 2, 3$) и $U_2 = U_3 \approx 0$, выражения для d_{ij} и P_{ij} упрощаются:

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle v^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial z} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle vw \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle w^2 \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial z} \right\},$$

$$P_{11} = 2 \left\{ \langle uv \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle uw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z} \right\}, \quad P_{22} = 0, \quad P_{33} = 0,$$

$$P_{12} = \langle v^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle vw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad P_{13} = \langle vw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle w^2 \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad P_{23} = 0,$$

$$P = P_{ii}/2 = \langle uv \rangle \frac{\partial U_d}{\partial y} + \langle uw \rangle \frac{\partial U_d}{\partial z}.$$

Обменные слагаемые аппроксимируются, согласно [10], следующим образом:

$$\phi_{ij} = \phi_{ij1} + \phi_{ij2},$$

$$\phi_{ij1} = -c_1 \varepsilon (a_{ij} + c'_1 (a_{ik} a_{jk} - 1/3 A_2 \delta_{ij})),$$

$$\phi_{ij2} = -0.6 (P_{ij} - 2/3 \delta_{ij} P) + 0.6 a_{ij} P - 0.2 B_{ij1} - c_2 [A_2 (P_{ij} - D_{ij}) + 3 a_{mi} a_{nj} (P_{mn} - D_{mn})] +$$

$$+ c'_2 \left\{ \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) (P_{ij} - 2/3 \delta_{ij} P) + 0.2 [a_{ij} - 0.5 (a_{ik} a_{kj} - 1/3 \delta_{ij} A_2)] P - 0.05 a_{ij} a_{lk} P_{kl} + \right.$$

$$\left. + \frac{0.1}{e} [(\langle u_i u_m \rangle P_{mj} + \langle u_j u_m \rangle P_{mi}) - 2/3 \delta_{ij} \langle u_l u_m \rangle P_{ml}] + 0.1 B_{ij2} + 0.2 \frac{\langle u_l u_i \rangle \langle u_k u_j \rangle}{e^2} (D_{lk} - P_{lk}) \right\},$$

$$B_{ij1} = \frac{\langle u_k u_j \rangle \langle u_l u_i \rangle}{e} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - \frac{\langle u_l u_k \rangle}{e} \left(\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right),$$

$$B_{ij2} = \left[\frac{\langle u_l u_i \rangle \langle u_k u_j \rangle}{e^2} - 1/3 \delta_{ij} \frac{\langle u_l u_m \rangle \langle u_k u_m \rangle}{e^2} \right] \left[6 D_{lk} + 13 e \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right) \right],$$

$$D_{ij} = - \left(\langle u_i u_k \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \langle u_j u_k \rangle \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right).$$

Здесь

$$c_1 = (3.75 A_2^{1/2} + 1) A, \quad c'_1 = 0.7, \quad c_2 = 0.55, \quad c'_2 = 0.6;$$

$$a_{ij} = (\langle u_i u_j \rangle - 2/3 \delta_{ij} e) / e \quad (a_{ij} = a_{ji});$$

$$A_2 = a_{ij} a_{ji}, \quad A_3 = a_{ij} a_{jk} a_{ki}, \quad A = 1 - 9/8 (A_2 - A_3).$$

Для вычисления скорости диссипации ε привлекается дифференциальное уравнение переноса в виде

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[c_\varepsilon \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_l \rangle + \nu \delta_{kl} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \quad (3)$$

где $c_\varepsilon = 0.18$, $c_{\varepsilon 1} = 1.0$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92 / (1 + 0.7 A_2^{1/2} A_{25})$; $A_{25} = \max(A, 0.25)$.

Таким образом, Модель 1 включает в себя кроме уравнения (1) для определения дефекта продольной компоненты скорости U_d дифференциальные уравнения (2) для величин $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$, $\langle uv \rangle$, $\langle uw \rangle$, $\langle vw \rangle$ и уравнение (3) — для ε . Особенность Модели 1 составляют новые аппроксимации обменных слагаемых, а также замена универсальных эмпирических постоянных функциями компонент тензора анизотропии a_{ij} и его второго A_2 и третьего A_3 инвариантов.

Система уравнений Модели 1 довольно сложна в реализации. Поэтому были рассмотрены две более простые модели течения. Модель 2 [12] также основана на использовании уравнения (2) для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_i u_j \rangle$. Ее

отличие от Модели 1 заключается, во-первых, в упрощенном представлении диффузионных и обменных слагаемых:

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_k \rangle \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} \right\}, \quad (4)$$

$$\phi_{ij} = -c_1 \varepsilon a_{ij} - c_1'' (P_{ij} - 2/3 \delta_{ij} P), \quad (5)$$

где $c_s = 0.25$, $c_1 = 2.2$, $c_1'' = 0.55$. Во-вторых, изменяется также уравнение (3):

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[c_\varepsilon \frac{e}{\varepsilon} \langle u_k u_k \rangle \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (6)$$

В уравнении (6) значения эмпирических констант полагаются равными [12]: $c_\varepsilon = c_s/\sigma$, $\sigma = 1.3$, $c_{\varepsilon 1} = 1.44$, $c_{\varepsilon 2} = 1.92$.

Модель 3 является упрощением Модели 2 в части аппроксимации касательных рейнольдсовых напряжений $\langle vw \rangle$, $\langle uv \rangle$, $\langle uw \rangle$, для которых используются алгебраические соотношения Роды [7]:

$$\frac{\langle u_i u_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right). \quad (7)$$

При этом уравнение (1) преобразуется к виду

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U_d}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U_d}{\partial z}, \quad (8)$$

где коэффициенты турбулентной вязкости определяются соотношениями

$$K_y = \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle v^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad K_z = \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{e \langle w^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad c_1 = 2.2, \quad c_2 = 0.5. \quad (9)$$

В результате Модель 3 состоит из уравнений (8) для U_d , (6) для ε , уравнений вида (2) для определения $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$ с учетом алгебраических соотношений (4), (5), (7), (9). Значения эмпирических констант такие же, как в Модели 2.

Выбор Модели 3 для данных расчетов связан со следующим обстоятельством. Модель 3 является одной из четырех моделей, использованных в работе [13] для решения задачи о безымпурсном турбулентном следе в линейно стратифицированной среде. При сопоставлении результатов расчетов с лабораторными измерениями Линя и Пао [8] было показано, что Модель 3 лучше описывает анизотропное вырождение турбулентности в таком течении, чем, в частности, упрощенные модели с алгебраическими аппроксимациями всех напряжений Рейнольдса.

Для сравнения результатов расчетов по Моделям 1–3 с данными [3–6] привлекалась также Модель 4, идентичная использованной в этих работах. Это модифицированная $(e - \varepsilon)$ -модель турбулентности, в которую наряду с уравнениями для дефекта скорости (1), скорости диссипации (6) входят алгебраические аппроксимации рейнольдсовых напряжений следующего вида [14]:

$$\frac{\langle u_i u_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1 - 1 + P/\varepsilon} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right).$$

Для определения энергии турбулентности $e = \langle u_i u_i \rangle / 2$ используется дифференциальное уравнение — прямое следствие (2). Значения эмпирических постоянных аналогичны принятым в Моделях 2 и 3.

Начальные и граничные условия. В качестве начальных распределений искомых величин U_d , e , ε , $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$ на расстоянии $x = x_0$ от тела используются данные, полученные в лабораторных экспериментах В. А. Костомахой и Н. В. Лесновой [1, 2]; переменные $\langle vw \rangle$, $\langle uv \rangle$, $\langle uw \rangle$ определяются следующим образом:

$$\langle vw \rangle = 0, \quad \langle uv \rangle = \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial U_d}{\partial y}, \quad \langle uw \rangle = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial U_d}{\partial z}.$$

На бесконечности в случае покоящейся среды задаются нулевые граничные условия, которые при численной реализации из бесконечности переносятся на границы достаточно большой прямоугольной области $-Y \leq y \leq Y$, $-Z \leq z \leq Z$. В задаче о динамике следа за сферой в турбулизованном внешнем потоке на границах ставятся условия Неймана.

Принимая во внимание свойства симметрии переменных задачи относительно начала координат, численные расчеты выполнялись лишь в первом квадранте плоскости (y, z) с постановкой на осях соответствующих условий симметрии (антисимметрии). Исключение составляет величина U_d , для которой решение уравнения проводилось также и при $y = 0$, $z = 0$ с учетом симметрии [15]. Это связано с тем, что в данной задаче особое значение имеет выполнение закона сохранения импульса.

Обезразмеривание. Переменные задачи обезразмериваются с применением масштаба длины D — диаметра тела и масштаба скорости U_∞ — скорости набегающего потока. При этом обезразмеренные переменные представляются в следующем виде: $x'_i = x_i/D$, $U'_i = U_i/U_\infty$, $\langle u_i u_j \rangle' = \langle u_i u_j \rangle / U_\infty^2$, $e' = e/U_\infty^2$, $\varepsilon' = \varepsilon D / U_\infty^3$.

Алгоритм решения задачи и его тестирование. Конечно-разностный алгоритм основан на применении методов расщепления по пространственным переменным [16]. Его специфика, а также результаты тестирования подробно описаны в [15] на примере одной из модифицированных $(e - \varepsilon)$ -моделей турбулентности. В связи с этим рассмотрим лишь некоторые особенности алгоритма, связанные со сложностью используемых в данной работе математических моделей, в частности Модели 1.

Решение уравнения (1) во всех описанных моделях проводится по схеме расщепления с использованием центрально-разностных аппроксимаций. Для численного интегрирования других уравнений, входящих в Модель 1, привлекается схема стабилизирующей поправки. Уравнения Моделей 2 и 3, в которых из-за упрощения диффузионных слагаемых отсутствуют смешанные производные, решаются по схеме расщепления.

Вводится простое преобразование координат, при котором осуществляется переход от неравномерной ортогональной расчетной сетки со сгущающимися в окрестности турбулентного следа узлами к равномерной.

Для проверки работоспособности математических моделей выполнено сопоставление численных и экспериментальных [1, 2] данных. Результаты этих сравнений будут представлены ниже. Достоверность численных расчетов подтверждается также сходимостью решений, полученных на последовательности вложенных конечно-разностных сеток.

Основные расчеты проводились в области размером $6D \times 6D$ на сетке с числом узлов 100×100 . Шаг сетки в направлении осей y и z выбирался равным $0.04D$ в прямоугольнике размером $2D \times 2D$, а далее увеличивался в геометрической прогрессии; шаг по переменной x изменялся от значения $0.0075D$ до $0.375D$ с шагом $0.0075D$. Для оценки точности выполнялись расчеты на сетке с количеством узлов 200×200 и вдвое меньшим размером шагов. Полученные отклонения не превышали 5% в равномерной сеточной норме.

Особое внимание уделялось контролю за выполнением закона сохранения импульса, который для случая безимпульсного турбулентного движения записывается в следующем

виде:

$$I = \iiint_{-\infty}^{\infty} U_d dydz = \iiint_{-\infty}^{\infty} U_d(x_0, y, z) dydz = 0.$$

Ниже представлены безразмерные величины суммарного импульса I'_k ($k = 1, 2, 3$ — номер модели), вычисленные по Моделям 1–3. Анализ этих данных показывает, что на рассмотренном интервале значений x/D суммарный избыточный импульс близок к нулю (табл. 1). Это свидетельствует о консервативности численного алгоритма по отношению к закону сохранения импульса. Аналогичное поведение суммарного импульса I отмечалось и в задаче об эволюции турбулентного следа за сферой в турбулизованном внешнем потоке.

Т а б л и ц а 1

	x/D			
	10	50	100	150
I'_1	1.22×10^{-11}	1.14×10^{-10}	7.73×10^{-11}	2.63×10^{-11}
I'_2	1.22×10^{-11}	1.11×10^{-10}	4.19×10^{-11}	4.06×10^{-11}
I'_3	1.22×10^{-11}	1.59×10^{-10}	3.46×10^{-10}	7.03×10^{-11}

2. Результаты расчетов

1. Выполнена серия численных расчетов, в которых описанные математические модели используются для изучения динамики безимпульсного турбулентного следа за сферой, движущейся в покоящейся однородной жидкости. Начальные распределения e , ε , U_d , $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$, $\langle w^2 \rangle$ задавались на расстоянии $x = 10D$ от тела из экспериментальных данных [1] (частично они приводятся также в [5, 6]). Основные результаты этих расчетов, касающиеся вырождения характеристик следа на его оси и распределения этих характеристик в плоскости, ортогональной направлению движения сферы, иллюстрируют рис. 1–9 (здесь и всюду ниже на рисунках приведены значения безразмерных переменных; экспериментальные данные помечены маркерами, расчеты — линиями).

На рис. 1 представлено изменение в зависимости от расстояния от тела осевых значений энергии турбулентности $e_0 = e(x, 0, 0)$ (рис. 1, а), дефекта скорости $U_{d0} = U_d(x, 0, 0)$ (рис. 1, б) и скорости диссипации $\varepsilon_0 = \varepsilon(x, 0, 0)$ (рис. 1, в). Значения нормальных напряжений Рейнольдса $\langle u^2 \rangle_0 = \langle u^2(x, 0, 0) \rangle$ показаны на рис. 2, а, $\langle v^2 \rangle_0 = \langle v^2(x, 0, 0) \rangle$ — на рис. 2, б и $\langle w^2 \rangle_0 = \langle w^2(x, 0, 0) \rangle$ — на рис. 2, в. Линии 1–3 соответствуют Моделям 1–3. На рис. 3 приведены горизонтальный H_1 (в плоскости, ортогональной направлению движения тела) и вертикальный H_2 размеры турбулентного следа. Значения H_1 , H_2 определяются из соотношений $\langle u^2(x, H_1, 0) \rangle^{1/2} = 1/2 \langle u^2 \rangle_0^{1/2}$, $\langle u^2(x, 0, H_2) \rangle^{1/2} = 1/2 \langle u^2 \rangle_0^{1/2}$. Поскольку рассматривается след в однородной жидкости в отсутствие сдвиговых фоновых течений, то величины H_1 и H_2 практически совпадают, а линиями с цифрами 1–3 помечены значения H_1 и H_2 , соответствующие Моделям 1–3. Для сравнения с данными [3–6] на рис. 1 и 3 представлены также результаты расчетов по Модели 4, аналогичной использованной в этих работах (кривые 4).

На рис. 4–9 показаны распределения автомодельных переменных $e^* = e(x_*, y^*, 0)/e_0$, $\langle u^2 \rangle^* = \langle u^2(x_*, y^*, 0) \rangle / \langle u^2 \rangle_0$, $\langle v^2 \rangle^* = \langle v^2(x_*, y^*, 0) \rangle / \langle v^2 \rangle_0$, $\langle w^2 \rangle^* = \langle w^2(x_*, y^*, 0) \rangle / \langle w^2 \rangle_0$, $\varepsilon^* = \varepsilon(x_*, y^*, 0)/\varepsilon_0$, $U_d^* = U_d(x_*, y^*, 0)/U_{d0}$ соответственно; $y^* = y/H_1(x_*)$. На каждом из этих рисунков приведены данные для нескольких сечений плоскостью $x = x_*$, для которых

имеются данные лабораторных измерений (цифры 1, 2, 3 обозначают номер сечения). На

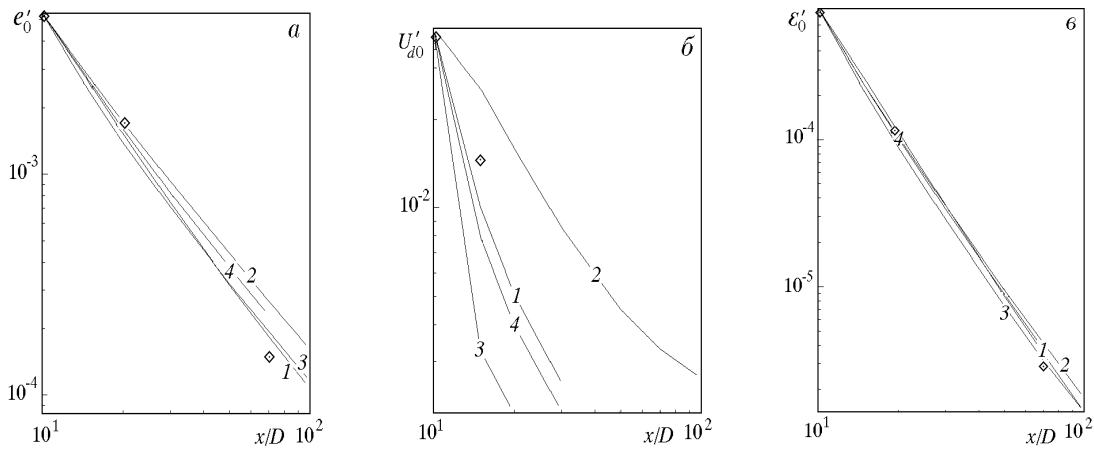


Рис. 1. Вырождение энергии турбулентности (а), дефекта скорости (б) и скорости диссипации (в) на оси следа в нетурбулизованной жидкости.

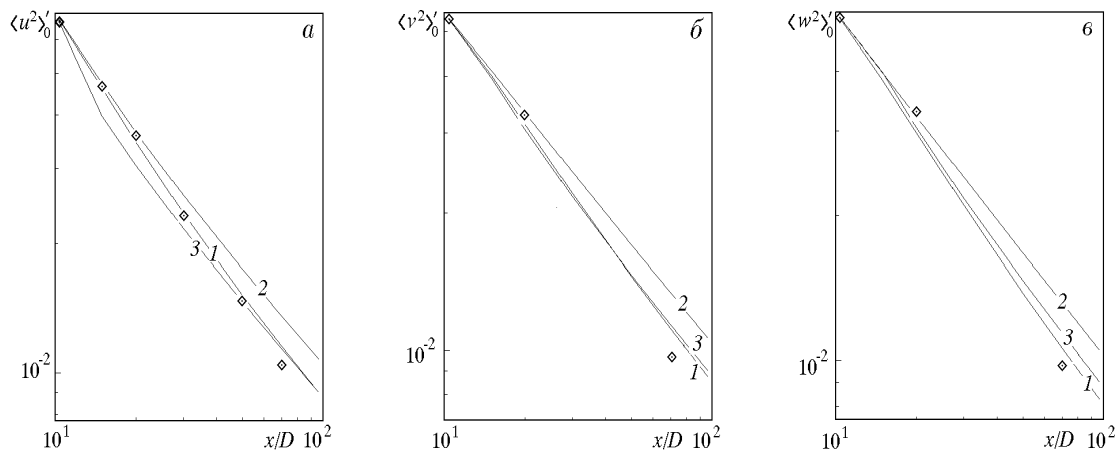


Рис. 2. Вырождение нормальных рейнولدсовых напряжений на оси следа в нетурбулизованной жидкости.

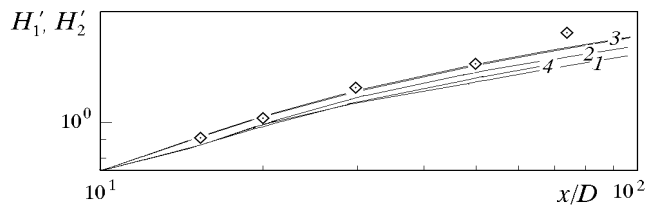


Рис. 3. Изменение горизонтального H_1 и вертикального H_2 размеров следа в нетурбулизованной жидкости.

рис. 4, 5 и 8 рассматриваются следующие сечения: 1 — $x_* = 20D$, 2 — $x_* = 70D$; на рис. 6 и 7: 1 — $x_* = 20D$, 2 — $x_* = 70D$, 3 — $x_* = 100D$; на рис. 9 — $x_* = 15D$. Рисунки под буквами а, б, в отвечают расчетам по Моделям 1, 2 и 3.

Для сравнения Моделей 1–3 и модифицированной $(e - \varepsilon)$ -модели работ [3–6] на рис. 10 представлены автомодельные распределения e^* (рис. 10, а) и ε^* (рис. 10, б), полученные по

Модели 4. Обозначения идентичны принятым на рис. 4, 8. Как и в перечисленных работах, результаты расчетов по Модели 4 удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Вместе с тем, рассмотренные модели второго порядка, в особенности Модель 1,

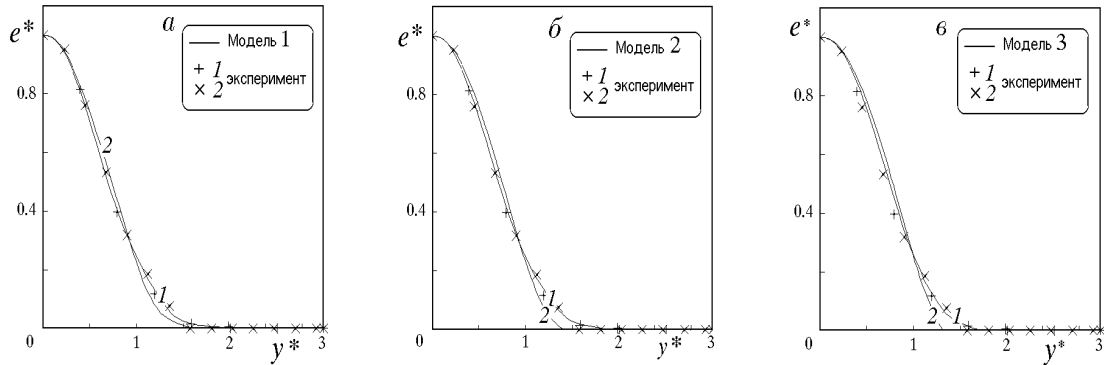


Рис. 4. Распределение энергии турбулентности $e(x_*, y/H_1, 0)$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости ($1 - x_* = 20D$, $2 - x_* = 70D$).

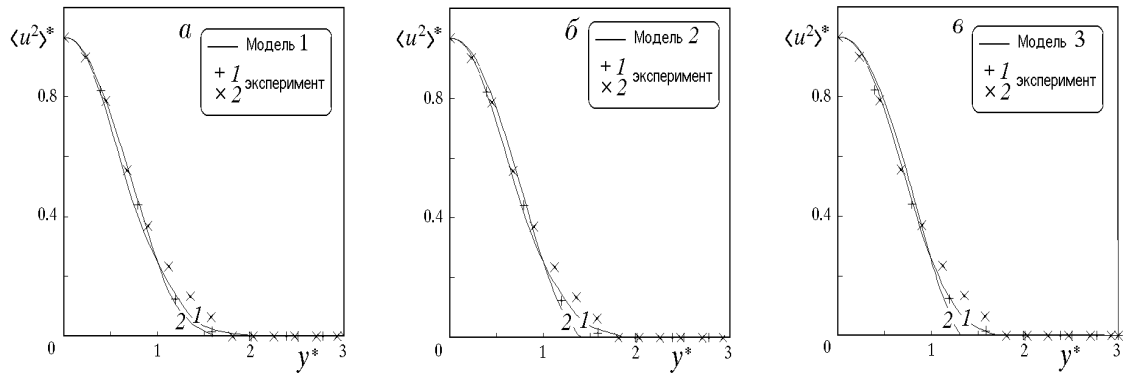


Рис. 5. Распределение величины $\langle u^2(x_*, y/H_1, 0) \rangle$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости ($1 - x_* = 20D$, $2 - x_* = 70D$).

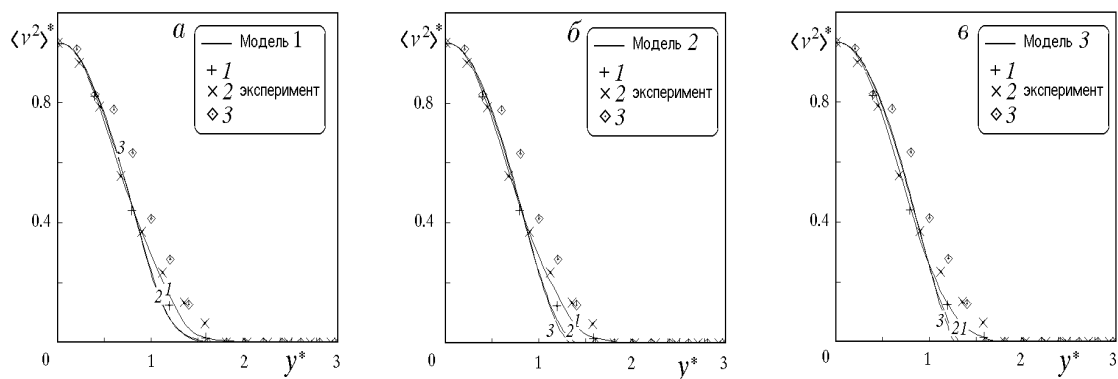


Рис. 6. Распределение величины $\langle v^2(x_*, y/H_1, 0) \rangle$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости ($1 - x_* = 20D$, $2 - x_* = 70D$, $3 - x_* = 100D$).

позволяют уменьшить погрешности в определении основных характеристик течения.

Таким образом, результаты расчетов по всем трем моделям удовлетворительно согла-

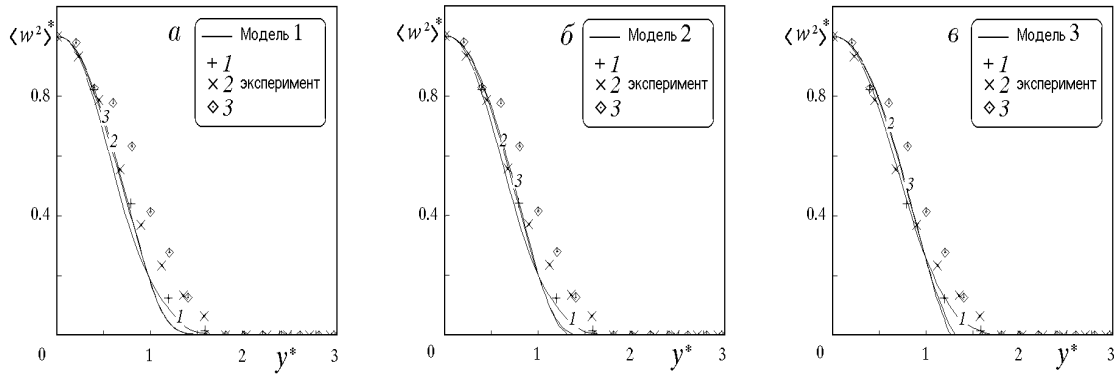


Рис. 7. Распределение величины $\langle w^2(x_*, y/H_1, 0) \rangle$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости ($1 - x_* = 20D$, $2 - x_* = 70D$, $3 - x_* = 100D$).

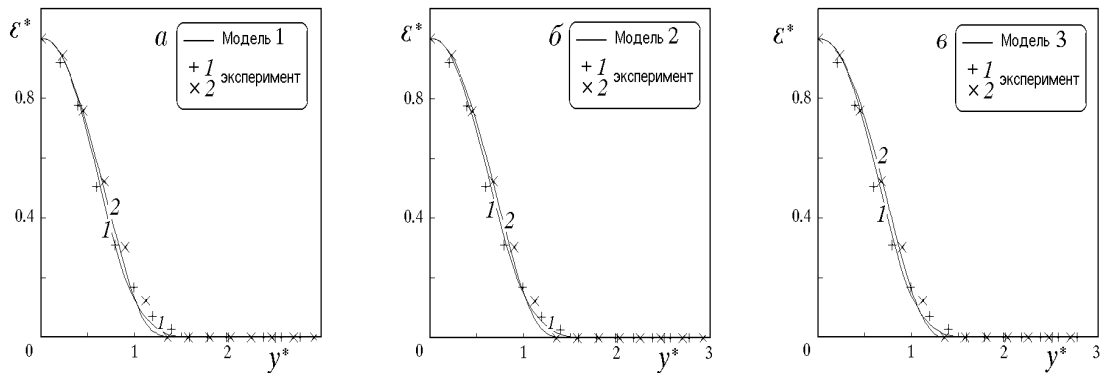


Рис. 8. Распределение скорости диссипации $\varepsilon(x_*, y/H_1, 0)$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости ($1 - x_* = 20D$, $2 - x_* = 70D$).

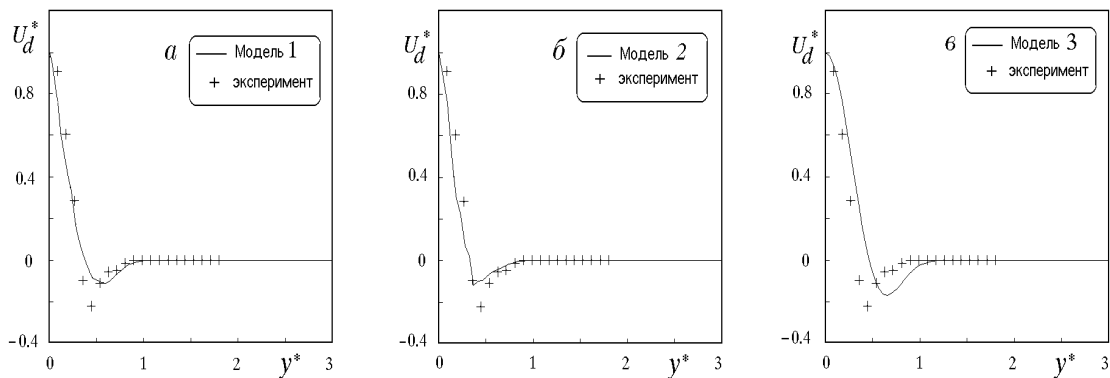


Рис. 9. Распределение дефекта скорости $U_d(x_*, y/H_1, 0)$ в сечении плоскостью $x_* = 15D$ при движении сферы в нетурбулизованной жидкости.

суются с данными экспериментов [1]. Существенные отклонения имеются лишь в распределении дефекта продольной компоненты скорости. При этом основные характеристики течения в следе, рассчитанные по Модели 1, наиболее близки к экспериментальным данным. Это связано, очевидно, с более детальным воспроизведением в этой модели обменных

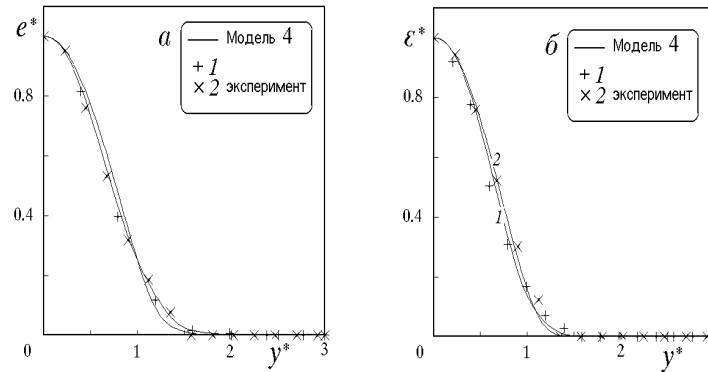


Рис. 10. Распределение энергии турбулентности $e(x_*, y/H_1, 0)$ (а) и скорости диссипации $\varepsilon(x_*, y/H_1, 0)$ (б) в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в нетурбулизированной жидкости.

процессов и использованием вместо констант эмпирических функций.

2. Результаты численного исследования динамики безымпulsive турбулентного следа за сферой, движущейся в условиях близкого к изотропному турбулентного фона, приведены на рис. 11 – 16. Начальные распределения e , ε , U_d задавались на расстоянии $x = x_0 = 20D$ от тела из экспериментальных данных [2]. Величины $\langle u_i^2(x_0, y, z) \rangle$ ($i = 1, 2, 3$) из-за отсутствия соответствующих экспериментальных значений определялись из соотношения $\langle u_i^2 \rangle = 2/3e$.

На рис. 11 представлено изменение в зависимости от расстояния от тела безразмерных осевых значений энергии турбулентности e_0 (рис. 11, а), дефекта скорости U_{d0} (рис. 11, б), скорости диссипации энергии турбулентности ε_0 (рис. 11, в); на рис. 12 изображены осевые значения нормальных напряжений Рейнольдса $\langle u^2 \rangle_0$, $\langle v^2 \rangle_0$, $\langle w^2 \rangle_0$. Линии 1–3 соответствуют Моделям 1–3.

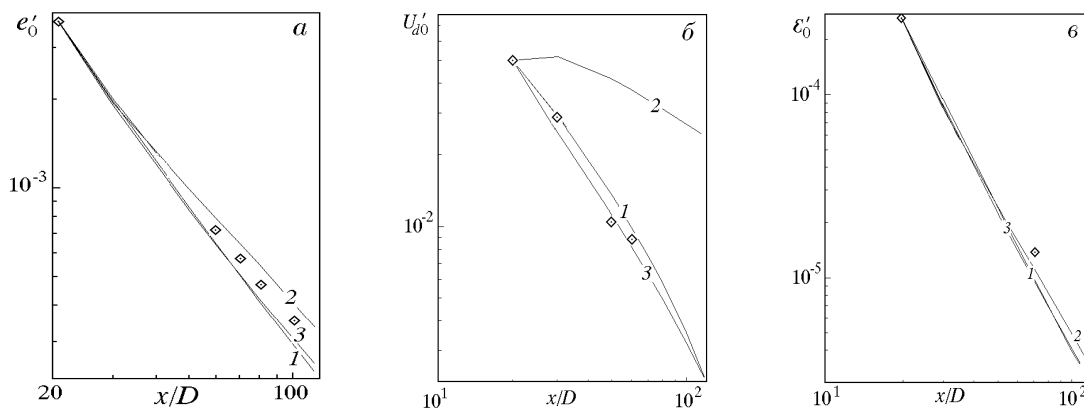


Рис. 11. Вырождение энергии турбулентности (а), дефекта скорости (б) и скорости диссипации (в) на оси следа при наличии турбулизированного фона.

На рис. 13 сравниваются с данными эксперимента горизонтальный H_1 и вертикальный H_2 размеры турбулентного следа. Значения H_1 , H_2 определяются, как и в лабораторных опытах, по половине от значения энергии турбулентности на оси следа; линии 1–3 отвечают расчетам по Моделям 1–3.

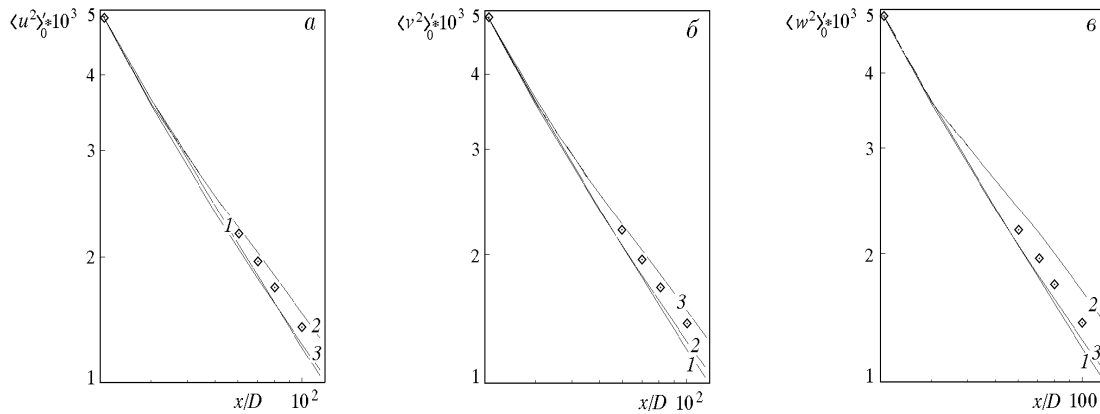


Рис. 12. Вырождение нормальных рейнольдсовых напряжений на оси следа при наличии фоновой турбулентности.

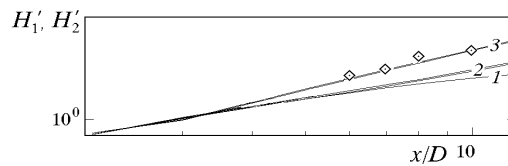


Рис. 13. Изменение горизонтального H_1 и вертикального H_2 размеров следа при наличии фоновой турбулентности.

На рис. 14–16 показаны соответственно распределения e^* , ε^* , U_d^* в плоскости $x = x_*$ (обозначения те же, что в п. 1). На каждом из этих рисунков приведены данные для нескольких сечений плоскостью $x = x_*$, для которых имеются экспериментальные данные. На рис. 14 рассматриваются следующие сечения: 1 — $x_* = 60D$, 2 — $x_* = 70D$, 3 — $x_* = 80D$, 4 — $x_* = 100D$, 5 — $x_* = 120D$; на рис. 15: $x_* = 70D$; на рис. 16: $x_* = 60D$. Рисунки под буквами *a*, *б*, *в* соответствуют расчетам по Моделям 1–3.

Расчеты показывают, что при наличии внешнего турбулизированного течения решение задачи не является автомодельным как в области собственно следа, так и на периферии. Аналогичные данные получены и в лабораторных опытах [2]. Как видно из рисунков, результаты расчетов с использованием Модели 1 довольно хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. Близкие к ним данные получены также по Модели 3. Модель 2 дает весьма существенные погрешности в распределении энергии турбулентности, диссипации и дефекта скорости. Вместе с тем, осевые значения энергии турбулентности, диссипации и нормальных рейнольдсовых напряжений могут определяться с использованием Модели 2 с достаточной степенью точности.

Таким образом, основные результаты работы состоят в следующем. С применением полуэмпирических моделей второго порядка выполнено численное моделирование динамики турбулентных следов за сферой в однородной покоящейся и турбулизированной средах. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Показано, что модель Лаундера и др. [10] обладает рядом преимуществ в сравнении с достаточно часто используемыми более простыми моделями турбулентного движения.

Автор выражает благодарность Г.Г. Черных за внимание к работе и полезные обсуждения.

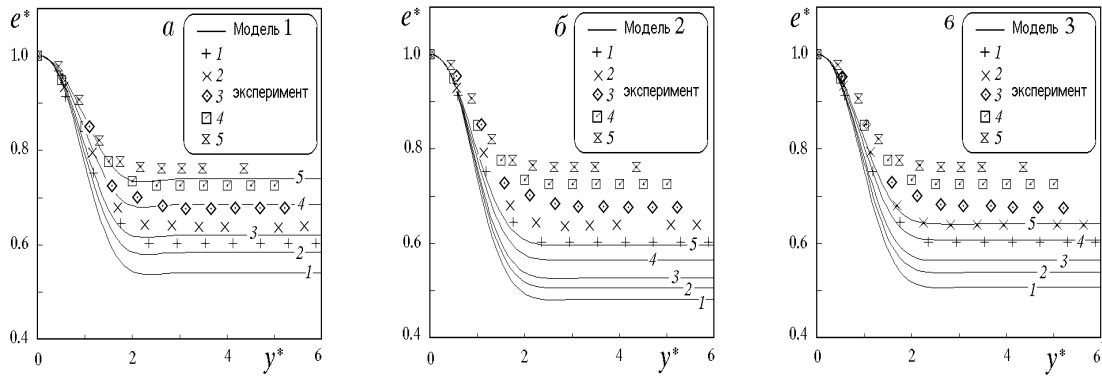


Рис. 14. Распределение энергии турбулентности $e(x_*, y/H_1, 0)$ в сечениях плоскостями $x = x_*$ при движении сферы в турбулизованной жидкости (1 — $x/D = 60$, 2 — $x/D = 70$, 3 — $x/D = 80$, 4 — $x/D = 100$, 5 — $x/D = 120$).

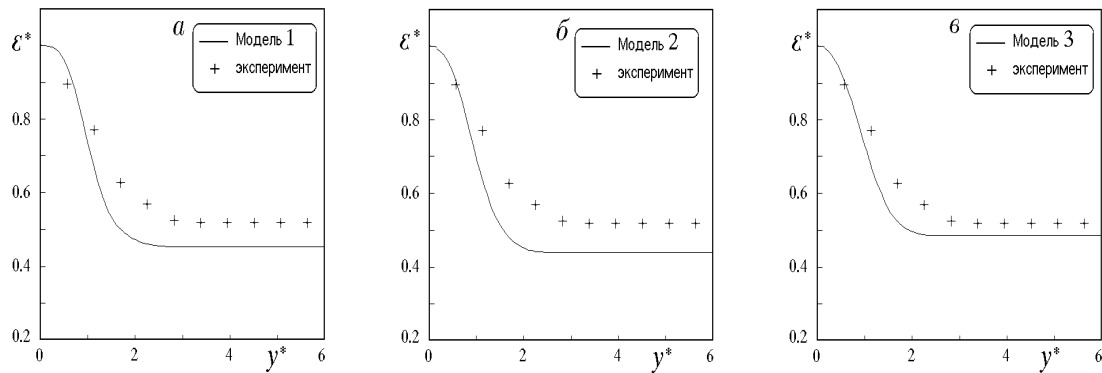


Рис. 15. Распределение скорости диссипации $\varepsilon(x_*, y/H_1, 0)$ в сечении плоскостью $x = x_* = 70D$ при движении сферы в турбулизованной жидкости.

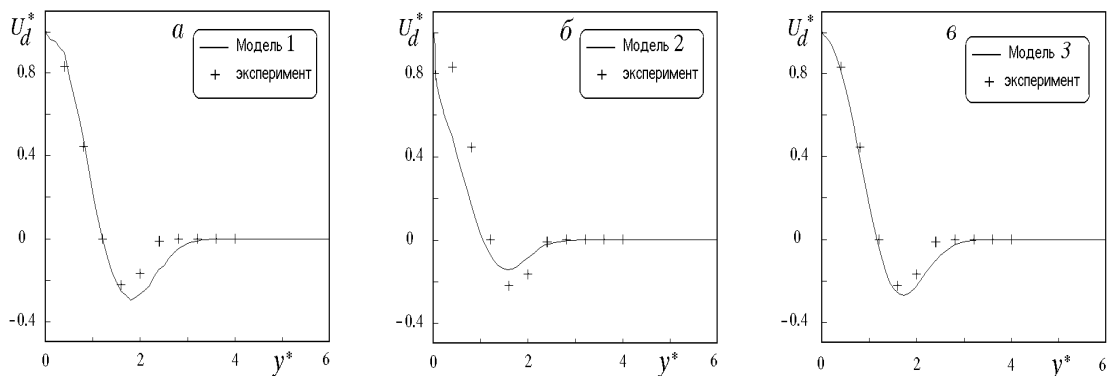


Рис. 16. Распределение дефекта скорости $U_d(x_*, y/H_1, 0)$ в сечении плоскостью $x_* = 60D$ при движении сферы в турбулизованной жидкости.

Список литературы

- [1] АЛЕКСЕНКО Н. В., КОСТОМАХА В. А. Экспериментальное исследование осесимметричного безимпульсного турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. №1. С. 65–69.

- [2] АЛЕКСЕНКО Н. В., КОСТОМАХА В. А. Экспериментальное исследование динамики безымппульсного турбулентного следа в турбулизованном внешнем потоке // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 81. С. 14–24.
- [3] ФЕДОРОВА Н. Н., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании безымппульсного турбулентного следа за сферой // Моделирование в механике. 1992. Т. 6 (23), №1. С. 129–140.
- [4] CHERNYKH G. G., FEDOROVA N. N., KOSTOMAKHA V. A., LESNOVA N. V. Experimental and numerical simulation of turbulent axisymmetric momentumless wake behind sphere // Proc. ICMAR. Aug. 31–Sept. 4. 1992. Novosibirsk. ITAM SD RAS. Pt 1. P. 30–33.
- [5] ДЕМЕНКОВ А. Г., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, №12. С. 119–131.
- [6] CHERNYKH G. G., DEMENKOV A. G. Numerical models of jet flows of a viscous incompressible fluid // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1997. Vol. 12, No. 2. P. 111–125.
- [7] RODI W. The Prediction of Free Turbulent Boundary Layers by use of Two-equation Model of Turbulence. Ph. D. Thesis: Univ. of London. 1972. 310 p.
- [8] LIN J. T., PAO Y. H. Wakes in stratified fluids // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–336.
- [9] CHERNYKH G. G., DEMENKOV A. G., MOSHKIN N. P., VOROPAYEVA O. F. Numerical models of turbulent wakes in homogeneous and stratified fluids // Proc. Third ECCOMAS CFD Conf., 9–13 Sept., 1996, Paris, J. Wiley and Sons. P. 161–166.
- [10] CRAFT J. J., INCE N. Z., LAUNDER B. E. Recent developments in second-moment closure for buoyancy-affected flows // Preprints of the Fourth Int. Symp. on Stratified Flows. Grenoble Inst. of Mech. General Session. Grenoble, 1994. Vol. 2. P. 16.
- [11] ХИНЦЕ И. О. Турбулентность. М.: Мир, 1977.
- [12] GIBSON M. M., LAUNDER B. E. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 86. P. 491–511.
- [13] CHERNYKH G. G., VOROPAYEVA O. F. Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28. P. 281–306.
- [14] RODI W. A new algebraic relation for calculation the Reynolds stresses // ZAMM. 1976. Vol. 56. P. 219–221.
- [15] ВОРОПАЕВА О. Ф., ЧЕРНЫХ Г. Г. Численная модель динамики безымппульсного турбулентного следа в пикноклине // ПМТФ. 1997. Т. 38, №3. С. 69–86.
- [16] ЯНЕНКО Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 195 с.