

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ

И. Г. ТЕЛЕГИН

Горно-Алтайский государственный университет, Россия

e-mail: dckt@bcenter.gornu.ru

О. Б. БОЧАРОВ

Институт водных и экологических проблем СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: bob@ad-sbras.nsc.ru

Analytical solutions for Muskat — Leverett (ML) and Buckley — Leverett (BL) models of immiscible fluid filtration in porous media are obtained. These solutions are used for testing the difference schemes. The testing example for the problem on conjugation of ML and BL models is also constructed.

В работе решается проблема создания тестов для двух наиболее употребляемых в компьютерных технологиях нефтедобычи моделей фильтрации двухфазной жидкости: МЛ-модели (Маскета — Леверетта) и БЛ-модели (Баклея — Леверетта). Особенность решений моделей фильтрации заключается в большом количестве параметров, необходимых при описании процессов, что сильно затрудняет создание эффективных тестирующих алгоритмов и точных решений. Предложен также пример теста для задачи сопряжения МЛ- и БЛ-моделей.

1. Уравнения моделей

Одномерная модель фильтрации двухфазной жидкости в однородной изотропной пористой среде в отсутствие массовых сил при заданном суммарном расходе фаз имеет вид [1]

$$ms_{\bar{x}} = (k_0 a_0(s) a_1(s) s_{\bar{x}} - Q(\bar{t}) b(s))_{\bar{x}}. \quad (1)$$

Здесь $\bar{x} \in [0, L]$ — пространственная координата; L — расстояние от нагнетательной скважины до эксплуатационной; \bar{t} — время; $s = (s_1 - S_1^0)/(1 - S_1^0 - S_2^0)$ — динамическая насыщенность смачивающей фазы, s_1 — истинная насыщенность смачивающей фазы; $(S_1^0, S_2^0) = \text{const}$ — остаточные водо- и нефтенасыщенности; $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$, m_0 — пористость коллектора; $k_0 = \text{const}$ — абсолютная проницаемость коллектора; $a_0(s) = k_1 k_2$,

$a_1(s) = -p_{cs}/(\mu_2(k_1 + \mu k_2))$; $p_c(s) = (m_0/k_0)^{1/2}\gamma j(s)$ — капиллярное давление; γ — коэффициент поверхностного натяжения; $j(s)$ — функция Леверетта; $b(s) = k_1/(k_1 + \mu k_2)$ — коэффициент подвижности вытесняющей фазы; $k_i = k_i(s)$ — относительные фазовые проницаемости; $\mu = \mu_1/\mu_2$, μ_i — вязкости фаз (индекс $i = 1$ соответствует воде, $i = 2$ — нефти); $Q(\bar{t})$ — расход воды на нагнетательной скважине.

Следует отметить разнообразие форм функциональных параметров модели двухфазной фильтрации [1, 2].

Полагая $Q(\bar{t}) = Q_0 = \text{const}$, введем безразмерные переменные: $x = \bar{x}/L$, $t = \bar{t}Q_0/(mL)$, при этом уравнение (1) запишется в виде

$$Ls \equiv s_t - (\varepsilon a(s)s_x - b(s))_x = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \gamma(m_0k_0)^{1/2}/(Q_0L\mu_2)$ — капиллярный параметр; $a(s) = -a_0j_s k$, $k = 1/(k_1 + \mu k_2)$.

При значении параметра $\varepsilon \equiv 0$ будем иметь модель Баклея — Леверетта. Для уравнения (2) рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$s|_{t=0} = s_0(x), x \in (0, 1]; s|_{x=0} = 1, \varepsilon a s_x|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

2. Тестовые функции

Прежде всего выбираются базисные функции $d = \text{const}$, $c(z) = \psi_1(z)/(\psi_1(z) + \mu\psi_2(z))$, $e(z) = \psi_2(z)/(\psi_2(z) + \psi_1(z)/\mu)$, где $\psi_1(z) = z^{\alpha_1}$, $\psi_2(z) = (1 - z)^{\alpha_2}$, $z = (x - x_{j-1})/(x_j - x_{j-1})$.

Тестовая функция $u(x, t)$ строится следующим образом: отрезок $[0, 1]$ разбивается на ряд промежутков $[x_{j-1}, x_j]$, где $x_j = x_j^{(0)} + \Delta t_j t$, $\Delta t_j = \text{const}$ (предполагается, что $\Delta t_0 \equiv 0$). На каждом таком отрезке выбирается какая-нибудь из базисных функций. Эти функции масштабируются так, чтобы тестовая функция была непрерывной.

Замечание 1. Предложенная функция $u(x, t)$ при $\Delta t_j = 0$ не зависит от t , что позволяет использовать ее в стационарном и автомодельном случаях.

Замечание 2. Минимальное количество параметров у рассмотренного выше теста равно пяти: μ , α_1 , α_2 , x_1 и x_2 . Варьируя эти параметры и добавляя промежутки $[x_{j-1}, x_j]$, можно строить разрывные, гладкие и составные решения (в том числе и немонотонные!).

3. Методика тестирования разностных схем

Вычислим значение оператора Ls после подстановки тестовой функции u :

$$Lu = u_t - \varepsilon(a_u u_x^2 + a u_{xx}) + b_u u_x \equiv f_\varepsilon(x, t), x \in (0, 1]. \quad (4)$$

Для БЛ-модели функция $f_\varepsilon(x, t)$ определяется аналогично, но при $\varepsilon = 0$.

Оператор Ls приравняем функции $f_\varepsilon(x, t)$, определенной в (4), и рассмотрим следующую задачу:

$$Ls \equiv s_t - (\varepsilon a(s)s_x - b(s))_x = f_\varepsilon(x, t); \quad (5)$$

$$s|_{t=0} = u(x, 0), x \in (0, 1]; s|_{x=0} = u(0, t), \varepsilon a s_x|_{x=1} = 0.$$

Построенная ранее функция $u(x, t)$ является точным решением задачи (5). Для аппроксимации оператора введем сетку с распределенными узлами $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, t_n = n\tau; i =$

$\overline{0, N}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, где $h = 1/N$ — шаг по пространственной координате; $\tau = Kh^2$ — шаг по временной переменной.

Аппроксимируя оператор Ls , получим оператор $L_{h\tau}s$:

$$L_{h\tau}s = \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} - \frac{\varepsilon}{h}(a_{i+\frac{1}{2}}^n s_{x,i}^{n+1} - a_{i-\frac{1}{2}}^n s_{x,i}^{n+1}) + b_{\bar{x},i}^{n+1} = f_\varepsilon(x_i, t^{n+1}), i = \overline{1, N-1}; \quad (6)$$

$$\frac{s_N^{n+1} - s_N^n}{\tau} + \frac{2\varepsilon}{h}a_{N-\frac{1}{2}}^n s_{\bar{x},N}^{n+1} + b_{\bar{x},N}^{n+1} = 0, \quad s_i^0 = u_i^0, i = \overline{1, N}, \quad s_0^{n+1} = s_0^n = u_0^0,$$

где $b_i^{n+1} = b_i^n + b_{si}^n(s_i^{n+1} - s_i^n)$.

Для численного решения уравнения БЛ-модели использовалась разностная схема с весами

$$L_{h\tau}^*s = \frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + \sigma b_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma)b_{\bar{x},i}^n = f_0(x_i, t^{n+1}), s_i^0 = u_i^0, i = \overline{1, N}, \quad s_0^{n+1} = s_0^n = u_0^0, \quad (7)$$

где $\sigma \in [0, 1]$.

Линеаризуя полученную систему уравнений, приходим к системе линейных уравнений. Решая эту систему, найдем сеточную функцию $s(x, t)$. Сравнивая $u(x, t)$ и $s(x, t)$, вычислим сеточную функцию погрешности выполнения данного теста для соответствующей разностной схемы.

Для численного решения систем (6) и (7) применялся метод правой прогонки.

4. Свойства функций, используемых при тестировании

Используемые при тестировании функции имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned} d_z = d_{zz} = 0, c_z(z) &= \frac{\mu(\psi_{1z}\psi_2 - \psi_{2z}\psi_1)}{(\psi_1 + \mu\psi_2)^2}, e_z(z) = \frac{\psi_{2z}\psi_1 - \psi_{1z}\psi_2}{\mu(\psi_2 + \psi_1/\mu)^2}, \\ c_{zz}(z) &= \frac{\mu[(\psi_{1zz}\psi_2 - \psi_{2zz}\psi_1)(\psi_1 + \mu\psi_2) - 2(\psi_{1z} + \mu\psi_{2z})(\psi_{1z}\psi_2 - \psi_{2z}\psi_1)]}{(\psi_1 + \mu\psi_2)^3}, \\ e_{zz}(z) &= \frac{(\psi_{2zz}\psi_1 - \psi_{1zz}\psi_2)(\psi_2 + \psi_1/\mu) - 2(\psi_{2z}\psi_1 - \psi_{1z}\psi_2)(\psi_{2z} + \psi_1/\mu)}{\mu(\psi_2 + \psi_1/\mu)^3}, \\ a_u(u) &= -(a_0j_u k)_u = -(a_{0u}j_u k + a_{0j_uu}k + a_{0j_u}k_u), k_u(u) = -\frac{k_{1u} + \mu k_{2u}}{(k_1 + \mu k_2)^2}. \end{aligned}$$

5. Примеры тестирования схем (6), (7)

В расчетах использовались следующие параметры:

$$k_1 = s^2, k_2 = (1 - s)^2, j = (1 - s)/(\delta + s), \delta = 0.9,$$

$$\mu = 0.1, \varepsilon = 0.5, \alpha_1 = \alpha_2 = 2, \sigma = 1.$$

Расчеты проведены для принципиально различных по свойствам тестовых функций с вариацией шагов сетки h, τ (рис. 1). Погрешности расчетов в норме $C[0, 1]$ приведены в таблице. Для нестационарного теста 4 погрешность дана при $n = 5$ (n — номер временного слоя). Заметим, что номер кривой соответствует номеру теста. Для кривой 2 $u(x, 0) = 0$ при $x \in [0.45, 0.55]$, а для тестовой кривой 3 $u(x, 0) = 0$ при $x \in [0, 0.1]$, $x \in [0.9, 1]$ и $u(x, 0) = 1$ при $x \in [0.45, 0.55]$ и для кривой 4 $u(x, 0) = 0$ при $x \in [0.7, 1]$.

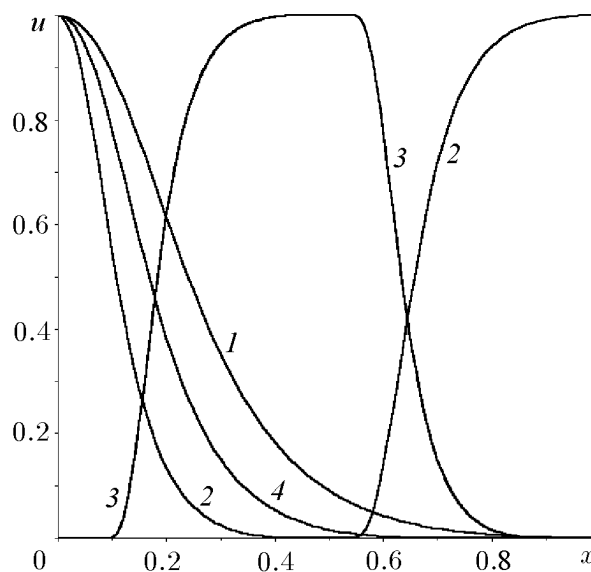


Рис. 1.

Погрешности расчетов

№кривой	h	τ	МЛ-модель, %	БЛ-модель, %	Δt_j
1	0.05	0.0025	0.172	0.178	0
2	0.05	0.0025	1.92	2.26	0
3	0.05	0.0025	2.81	3.11	0
1	0.005	0.00025	0.00191	0.00194	0
2	0.005	0.00025	0.0305	0.0364	0
3	0.005	0.00025	0.0469	0.0592	0
4	0.005	0.00025	0.0182	0.0192	0.01

6. Тестирование задачи сопряжения МЛ- и БЛ-моделей

Как показано в [1–3], за счет обращения в нуль функций относительных фазовых проницаемостей естественные граничные условия для МЛ-модели являются плохо обусловленными (градиенты решения в окрестности границы становятся бесконечно большими). В работе [3] БЛ-модель предложено применять в окрестности эксплуатационной скважины, тогда на скважине не требуется граничного условия. Таким образом возникает задача сопряжения двух моделей [3].

Задача сопряжения формулируется следующим образом [3]:

$$Ls \equiv s_t - (\varepsilon a s_x - b)_x = 0, \tag{8}$$

$$s|_{t=0} = s_0(x), x \in (0, l], \varepsilon a s_x|_{x=l} = 0, s|_{x=0} = 1,$$

$$Av \equiv v_x + \varphi_t(v) = 0, \tag{9}$$

$$v|_{x=l} = V_l(t), v|_{t=0} = v_0(x), x \in (l, 1],$$

где l — линия сопряжения двух моделей; $s = \varphi(v)$ — функция, обратная зависимости $v = b(s)$; $v_0 = b[s_0(x)]$, $V_l(t) = b[S_l(t)]$; функция $S_l(t) = s(x, t)|_{x=l}$ определяется по решению $s(x, t)$ задачи (8).

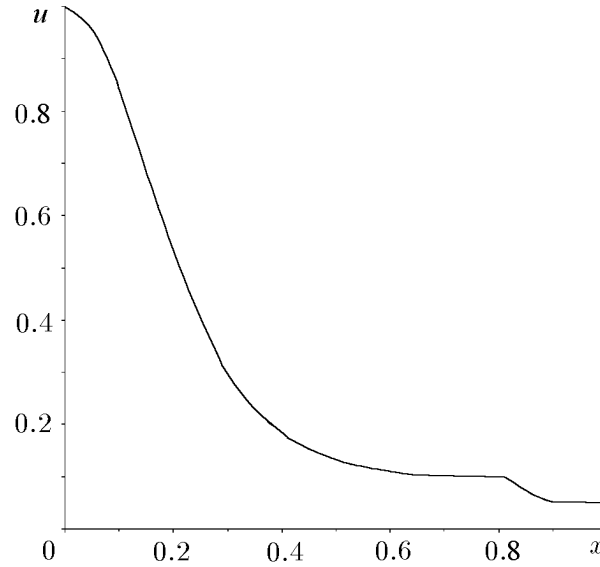


Рис. 2.

Для тестирования задачи сопряжения функция $u(x, t)$ строилась отдельно на промежутках $[0, l]$ и $[l, 1]$, при этом $u(l, 0) = 0.1$, а $u(1, 0) = 0.05$, $u_x|_{x=l} = 0$ (рис. 2).

Далее определим функции $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$:

$$u_t - \varepsilon(a_u u_x^2 + a u_{xx}) + b_u u_x = f_1(x, t), x \in (0, l), \quad (10)$$

$$u_t + b_u u_x = f_2(x, t); x \in (l, 1].$$

Приравняв операторы Ls и Av функциям $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$, будем иметь следующую задачу:

$$Ls \equiv s_t - (\varepsilon a(s) s_x - b(s))_x = f_1(x, t), \quad (11)$$

$$s|_{t=0} = u(x, 0), x \in (0, l], s|_{x=0} = u(0, t), \varepsilon a s_x|_{x=l} = 0,$$

$$Av = v_x + \varphi_t(v) = f_2(x, t),$$

$$v|_{x=l} = V_l(t), v|_{t=0} = v(u(x, 0)), x \in (l, 1].$$

Так же по аналогии аппроксимируем операторы Ls и Av на сетке $\omega_{h\tau}$.

Для получения численного решения при $x > l$ применялась следующая двухпараметрическая разностная схема:

$$\begin{aligned} A_{h\tau} v = \sigma_1 \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_i^{n+1}}{h} + (1 - \sigma_1) \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h_v} + \sigma_2 \varphi_{v_i}^{n+1} \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_{i+1}^n}{\tau} + \\ + (1 - \sigma_2) \varphi_{v_i}^{n+1} \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\tau} = f_2(x_i, t^{n+1}), v_i^0 = b(u_i^0). \end{aligned} \quad (12)$$

Задача сопряжения решалась при $l = 0.8$, $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.7$, $\Delta t_j = 0$.

Погрешность задачи сопряжения составила при $h = 0.05$ ($\tau = 0.0025$) 0.174 %. При использовании сетки с шагом $h = 0.005$ ($\tau = 0.00025$) погрешность оказалась равной 0.00498 %.

Список литературы

- [1] АНТОНЦЕВ С.Н., КАЖИХОВ А.В., МОНАХОВ В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, СО Наука, 1983. 316 с.
- [2] КОНОВАЛОВ А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, СО Наука, 1988. 166 с.
- [3] ЖУМАГУЛОВ Б.Т., МОНАХОВ В.Н. Гидродинамика нефтедобычи. Алматы: КазгосИНТИ, 2001. 336 с.

Поступила в редакцию 30 октября 2002 г.