ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТЕРМИНАХ СКОРОСТЬ — ЗАВИХРЕННОСТЬ*

А.А.Родионов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия
e-mail: aarod@icm.krasn.ru

The optimal system of one-dimensional subalgebras of the Lie algebra of generators is obtained for the equations of plane viscous incompressible fluid flow in velosity — vorticity formulation, the factor-systems are constructed. The group analysis is done for the equations with respect to viscosity function, which depends on time. The examples of the exact solutions are provided.

1. Групповые свойства уравнений

В пространстве переменных (x, y, t) рассматриваются уравнения вязкой несжимаемой жидкости в терминах “вектор скорости — завихренность"

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \nu(\omega_{xx} + \omega_{yy}), \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega, \tag{1.1}$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ — компоненты вектора скорости по направлениям x, y; $\omega(x, y, t)$ — завихренность; $\nu = \text{const}$ — коэффициент вязкости жидкости.

На первом этапе группового анализа системы уравнений (1.1) исследуются ее свойства на инвариантность относительно преобразований пространства всех независимых и зависимых переменных $R^6(x, y, t, u, v, \omega)$. Поиск наиболее широкой допустимой группы преобразований системы сводится к построению операторов вида

$$X = \xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \xi^3\frac{\partial}{\partial t} + \eta^1\frac{\partial}{\partial u} + \eta^2\frac{\partial}{\partial v} + \eta^3\frac{\partial}{\partial \omega}\ , \tag{1.2}$$

где компоненты векторного поля $\zeta = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ — функции переменных x, y, t, u, v, ω.

Используя классическую методику [1], находим, что алгебра Ли операторов, допустимых системой (1.1), определяется следующим набором базисных операторов:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}\ , \quad X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}\ ,$$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-15-96162.

$$X_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2\omega\frac{\partial}{\partial \omega}\,, \tag{1.3}$$

$$X_4 = -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} - (tv + y)\frac{\partial}{\partial u} + (tu + x)\frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial \omega}\,,$$

$$X_5(f(t)) = f(t)\frac{\partial}{\partial x} + f'(t)\frac{\partial}{\partial u}\,, \quad X_6(g(t)) = g(t)\frac{\partial}{\partial y} + g'(t)\frac{\partial}{\partial v}\,,$$

где $f(t), g(t)$ — произвольные функции; $f'(t), g'(t)$ — производные по времени t. Обозначим эту алгебру операторов через L. Видим, что группа Ли преобразований, допускаемых системой (1.1), бесконечномерная, так как преобразования $x \to x + f(t)$, $u \to u + f'(t)$, $y \to y + g(t)$, $v \to v + g'(t)$, соответствующие операторам $X_5(f(t))$, $X_6(g(t))$, сохраняют систему уравнений. Оператору X_1 отвечает сдвиг по t, оператору X_2 — вращение в плоскости, X_3 — растяжение. Оператор X_4 связан с инвариантностью системы уравнений (1.1) относительно преобразований [2]

$$\begin{aligned}
&\bar{t} = t, \quad \bar{x} = x\cos at - y\sin at, \quad \bar{y} = x\sin at + y\cos at,\\
&\bar{u} = u\cos at - v\sin at - ax\sin at - ay\cos at,\\
&\bar{v} = u\sin at + v\cos at + ax\cos at - ay\sin at, \quad \bar{\omega} = \omega + 2a.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Отметим, что система уравнений плоского движения идеальной несжимаемой жидкости в терминах “скорость — завихренность"

$$\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega \tag{1.5}$$

допускает операторы (1.3). Полный набор допустимых базисных операторов для системы (1.5) кроме операторов (1.3) включает еще оператор растяжения [2]

$$X_7 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - \omega\frac{\partial}{\partial \omega}\,.$$

Уравнения (1.1) можно получить из уравнений Навье — Стокса в плоском случае

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}),\\
&v_t + uv_x + vv_y + p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad u_x + v_y = 0,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

если исключить давление p и ввести функцию завихренности $\omega = v_x - u_y$.

Если уравнения (1.6) подвергнуть преобразованиям (1.4), положив параметр $a = \Omega$, то получим уравнения двумерного движения вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с постоянной угловой скоростью Ω:

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + 2\Omega v + \Omega^2 x + p_x = \nu(u_{xx} + u_{yy}),\\
&v_t + uv_x + vv_y - 2\Omega u + \Omega^2 y + p_y = \nu(v_{xx} + v_{yy}), \quad u_x + v_y = 0.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Тем самым проявляется физический смысл оператора X_4 из (1.3). Оператор X_4 связан с инвариантностью уравнений двумерных течений жидкости относительно перехода во вращающуюся с постоянной угловой скоростью систему координат.

2. Оптимальная система подалгебр первого порядка

На основе найденных операторов (1.3) допустимой алгебры L возможно построение точных инвариантных решений уравнений (1.1). Но с точки зрения допустимых групп преобразований необходимо выделить такие линейные комбинации операторов из L, которые приводят к построению существенно различных точных инвариантных решений. Выделение таких линейных комбинаций базисных операторов является задачей построения оптимальных систем подалгебр. Метод поиска операторов оптимальных систем подалгебр изложен в работах [1, 3].

В данном разделе решается задача построения оптимальной системы подалгебр первого порядка Θ_1 для алгебры L операторов (1.3).

При формировании оптимальной системы подалгебр предварительно вычисляются коммутаторы операторов по формулам

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k = X_i(X_j) - X_j(X_i), \tag{2.1}$$

где C_{ij}^k — структурные постоянные, $i, j, k = 1, \ldots, 6$; по k производится суммирование. Результат приведен в табл. 1.

Вычислим присоединенную группу A внутренних автоморфизмов алгебры L. Для этого рассмотрим оператор общего вида

$$X = \sum_{i=1}^{4} x^i X_i + X_5(f) + X_6(g), \quad X \in L,$$

где $\mathbf{x} = (x^1 x^2 x^3 x^4 f g)$ — вектор координат оператора X в базисе (1.3). На каждом операторе $X_i \in L$ строятся автоморфизмы Aut_{X_i} алгебры L, действия которых на X находятся по формуле

$$\mathrm{Aut}_{X_i}(a_i)\langle X\rangle = X + \frac{a_i}{1!}[X, X_i] + \frac{a_i^2}{2!}[[X, X_i], X_i] + \ldots, \tag{2.2}$$

где a_i — параметры. Формулы (2.2) определяют координаты $\widetilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1 \tilde{x}^2 \tilde{x}^3 \tilde{x}^4 \tilde{f} \tilde{g})$ преобразованного оператора, которые зависят от параметров a_i и вектора $\mathbf{x}$, порождая группу A внутренних автоморфизмов. Задача нахождения оптимальной системы подалгебр сводится к построению таких наборов $\mathbf{x} = (x^1 x^2 x^3 x^4 f g)$, что ни один из векторов не может быть переведен в другой автоморфизмами алгебры L.

Используя формулы (2.2), определяем полную группу преобразований координат вектора $\mathbf{x} \to \widetilde{\mathbf{x}}$.

Т а б л и ц а 1

Коммутаторы операторов (1.3)

$[\downarrow, \rightarrow]$	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_5(f(t))$	$X_6(g(t))$
X_1	0	0	$2X_1$	$-X_2$	$X_5(f')$	$X_6(g')$
X_2	0	0	0	0	$X_6(f)$	$X_5(-g)$
X_3	$-2X_1$	0	0	$2X_4$	$X_5(2tf' - f)$	$X_6(2tg' - g)$
X_4	X_2	0	$-2X_4$	0	$X_6(-tf)$	$X_5(tg)$
$X_5(\psi(t))$	$X_5(-\psi')$	$X_6(-\psi)$	$X_5(-2t\psi' + \psi)$	$X_6(t\psi)$	0	0
$X_6(\varphi(t))$	$X_6(-\varphi')$	$X_5(+\varphi)$	$X_6(-2t\varphi' + \varphi)$	$X_5(-t\varphi)$	0	0

Здесь штрих означает дифференцирование по t.

Т а б л и ц а 2

Преобразования автоморфизмов операторов (1.3)

	$\widetilde{x}^1 =$	$\widetilde{x}^2 =$	$\widetilde{x}^3 =$	$\widetilde{x}^4 =$	$\widetilde{f}(t) =$	$\widetilde{g}(t) =$
A_1	$x^1 - 2a_1x^3$	$x^2 + a_1x^4$	x^3	x^4	$f(t-a_1)$	$g(t-a_1)$
A_2	x^1	x^2	x^3	x^4	$f\cos a_2 + g\sin a_2$	$-f\sin a_2 + g\cos a_2$
A_3	$x^1e^{2a_3}$	x^2	x^3	$x^4e^{-2a_3}$	$e^{a_3}f(te^{-2a_3})$	$e^{a_3}g(te^{-2a_3})$
A_4	x^1	$x^2 - a_4x^1$	x^3	$x^4 + 2a_4x^3$	$f\cos(a_4t) - g\sin(a_4t)$	$f\sin(a_4t) + g\cos(a_4t)$
A_5	x^1	x^2	x^3	x^4	$f + x^1\psi' + x^3(2t\psi' - \psi)$	$g + (x^2 - x^4t)\psi$
A_6	x^1	x^2	x^3	x^4	$f + (-x^2 + x^4t)\varphi$	$g + x^1\varphi' + x^3(2t\varphi' - \varphi)$

Здесь A_i — преобразования, соответствующие Aut_{X_i} с параметром a_i ($i = 1,4$). Преобразованию A_5 с функцией $\psi(t)$ соответствует $\mathrm{Aut}_{X_5(\psi(t))}$, а преобразованию A_6 с функцией $\varphi(t)$ — $\mathrm{Aut}_{X_6(\varphi(t))}$.

Так как операторы определены с точностью до произвольного множителя, не равного нулю, определено преобразование общего растяжения B: $\tilde{\mathbf{x}} \to \beta\mathbf{x}$, $\beta = \mathrm{const}$.

Из анализа табл. 1 следует, что алгебра операторов L представима в виде прямой суммы: $L = L_{1-4} \oplus L_{5,6}$, где $L_{1-4} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ — конечномерная разрешимая подалгебра, $L_{5,6} = \{X_5(f), X_6(g)\}$ — бесконечномерная подалгебра.

Построение оптимальной системы подалгебр Θ_1 начинается с рассмотрения конечномерной подалгебры L_{1-4}. Для оператора общего вида ей соответствует вектор координат $(x^1x^2x^3x^4)$. Из табл. 2 видно, что $\tilde{x}^3 = x^3$ сохраняется под действием всех автоморфизмов.

Случай $x^3 = 0$ после использования преобразований A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, приводит к следующим вариантам вектора $(x^1x^2x^3x^4)$: (0000), (x^1000), $(0x^200)$, $(000x^4)$, (x^100x^4). Здесь встречающиеся компоненты отличны от нуля.

Случай $x^3 \neq 0$ приводит к таким вариантам вектора $(x^1x^2x^3x^4)$: $(00x^30)$, $(0x^2x^30)$. Здесь встречающиеся компоненты также отличны от нуля.

Расширяя L_{1-4} до полной алгебры L с соответствующим вектором координат $(x^1x^2x^3x^4f(t)g(t))$, используем семь полученных выше вариантов вектора $(x^1x^2x^3x^4)$. На этом этапе существенно проявляются автоморфизмы A_5, A_6 и общее растяжение B. Окончательно получаем набор векторов, которые не могут быть переведены один в другой внутренними автоморфизмами. Этим наборам соответствует оптимальная система подалгебр первого порядка Θ_1, состоящая из операторов

$$X_1 + aX_4, \quad X_2 + bX_3, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5(f(t)) + X_6(g(t)), \tag{2.3}$$

где a, b — произвольные постоянные; $f(t), g(t)$ — произвольные дифференцируемые функции.

3. Построение фактор-систем

Перейдем к построению фактор-систем на каждом из операторов оптимальной системы подалгебр (2.3). В тех случаях, когда используются операторы X_2 или X_4, удобно рассматривать операторы и систему уравнений (1.1) не в декартовых (x, y), а в полярных координатах (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad u = \bar{u}\cos\varphi - \bar{v}\sin\varphi, \quad v = \bar{u}\sin\varphi + \bar{v}\cos\varphi,$$

где $\bar{u}, \bar{v}$ — компоненты радиальной и тангенциальной составляющих вектора скорости. В новых координатах система уравнений (1.1) примет вид

$$\begin{aligned} &\omega_t + \bar{u}\omega_r + \frac{1}{r}\,\bar{v}\omega_\varphi = \nu\left(\omega_{rr} + \frac{1}{r^2}\,\omega_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\,\omega_r\right), \\ &\bar{u}_r + \frac{1}{r}\,\bar{u} + \frac{1}{r}\,\bar{v}_\varphi = 0, \quad \bar{v}_r + \frac{1}{r}\,\bar{v} - \frac{1}{r}\,\bar{u}_\varphi = \omega. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Операторы перепишутся так:

$$\bar{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\varphi}\,, \quad \bar{X}_3 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + r\frac{\partial}{\partial r} - \bar{u}\frac{\partial}{\partial\bar{u}} - \bar{v}\frac{\partial}{\partial\bar{v}} - 2\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\,, \quad \bar{X}_4 = t\frac{\partial}{\partial\varphi} + r\frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial\omega}\,. \tag{3.2}$$

Приведем этапы построения фактор-систем на операторах оптимальной состемы подалгебр (2.3).

1. Построим фактор-систему на операторе X_3, инвариантами которого являются $t^{-1/2}x$, $t^{-1/2}y$, $t^{1/2}x$, $t^{1/2}y$, $t\omega$. Решение уравнений (1.1) ищем в виде $(u,v,\omega) = (t^{-1/2}U(\lambda,\mu)$, $t^{-1/2}V(\lambda,\mu), t^{-1}W(\lambda,\mu))$, где $\lambda = t^{-1/2}x$; $\mu = t^{-1/2}y$. После преобразований в (1.1) получаем фактор-систему

$$-W + \left(U - \frac{\lambda}{2}\right)W_\lambda + \left(V - \frac{\mu}{2}\right)W_\mu = \nu(W_{\lambda\lambda} + W_{\mu\mu}),$$

$$U_\lambda + V_\mu = 0, \quad V_\lambda - U_\mu = W. \tag{3.3}$$

2. На операторе вращения $\bar{X}_2$ инвариантное решение уравнений (3.1) ищется в виде $(\bar{u},\bar{v},\omega) = (U(r,t), V(r,t), W(r,t))$. Система будет такой:

$$W_t + UW_r = \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r}\,W_r\right), \quad U_r + \frac{1}{r}\,U = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V = W. \tag{3.4}$$

3. Оператор $\bar{X}_4$ имеет следующие инварианты: r, t, $\bar{u}$, $t\bar{v} - r\varphi$, $t\omega - 2\varphi$, поэтому решение ищем в виде $(\bar{u},\bar{v},\omega)$=$(U(r,t), t^{-1}(r\varphi - V(r,t))$, $t^{-1}(W(r,t) + 2\varphi))$. Уравнения (3.1) перепишутся так:

$$W_t + UW_r - \frac{1}{t}\,W + \frac{2}{rt}\,V = \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r}\,W_r\right),$$

$$U_r + \frac{1}{r}\,U + \frac{1}{t}\, = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V = W. \tag{3.5}$$

4. Рассмотрим оператор $X_1 + a\bar{X}_4, a = \text{const} \neq 0$, с его инвариантами r, $\varphi - a^2t^2/2$, $\bar{u}$, $\bar{v} - art$, $\omega - 2at$. Введем $\lambda = \varphi - a^2t^2/2$, тогда решение уравнений (3.1) ищем в виде $(\bar{u},\bar{v},\omega)$ $= (U(r,\lambda), V(r,\lambda) + art, W(r,\lambda) + 2art)$. В результате получаем фактор-систему

$$UW_r + \frac{1}{r}\,VW_\lambda + 2a = \nu\left(W_{rr} + \frac{1}{r^2}\,W_{\lambda\lambda} + \frac{1}{r}\,W_r\right),$$

$$V_r + \frac{1}{r}\,U + \frac{1}{r}\,V_\lambda = 0, \quad V_r + \frac{1}{r}\,V - \frac{1}{r}\,U_\lambda = W. \tag{3.6}$$

При $a = 0$ оператор $X_1 = \partial/\partial t$ определяет стационарные решения уравнений (1.1).

5. Для оператора $\bar{X}_2 + b\bar{X}_3$, $b = \text{const} \neq 0$, инварианты можно выбрать в виде $t^{-1/2}r$, $t^{-1/2}e^{b\varphi}$, $t^{1/2}\bar{u}$, $t^{1/2}\bar{v}$, $t\omega$. Тогда решение системы (3.1) представимо: $(\bar{u},\bar{v},\omega)$=$(t^{-1/2}U(\lambda,\mu)$,

$t^{-1/2}V(\lambda,\mu), t^{-1}W(\lambda,\mu))$, где $\lambda = t^{-1/2}r$, $\mu = t^{-1/2}e^{b\varphi}$. После подстановки получаем фактор-систему

$$-W + \left(U - \frac{\lambda}{2}\right) + \left(V - \frac{\mu}{2}\right) W_\mu = \nu \left[W_{\lambda\lambda} + \frac{b^2}{\lambda^2}(\mu^2 W_{\mu\mu} + \mu W_\mu) + \frac{1}{\lambda} W_\mu\right],$$

$$U_\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{b\mu}{\lambda}\, V_\mu = 0, \quad V_\lambda + \frac{1}{\lambda}\, V - \frac{b\mu}{\lambda}\, U_\mu = W. \tag{3.7}$$

6. На бесконечномерном операторе $X_5(f(t))+X_6(g(t))$ инвариантами являются t, $g(t)x - f(t)y$, $g(t)u - f'(t)y$, $f(t)v - g'(t)x$, ω. Обозначим через $\lambda = g(t)x - f(t)y$, тогда решение уравнений (1.1) представимо в виде $(u, v, \omega) = (g^{-1}(f'y + U(t,\lambda)), f^{-1}(g'x + V(t,\lambda)), W(t,\lambda))$. Система (1.1) преобразуется в фактор-систему

$$W_t + (U - V)W_\lambda = \nu(g^2 + f^2)W_{\lambda\lambda}, \quad U_\lambda - V_\lambda = 0, \quad gg' - ff' + g^2 V_\lambda + f^2 U_\lambda = fgW. \tag{3.8}$$

4. Групповая классификация уравнений плоского движения жидкости по функции вязкости

Рассматривая уравнения (1.1) плоского движения жидкости в терминах “скорость — завихренность", будем считать, что коэффициент вязкости — функция времени $\nu = \nu(t)$:

$$\begin{aligned} &\omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \nu(t)(\omega_{xx} + \omega_{yy}),\\ &u_x + v_y = 0, \quad v_x - u_y = \omega. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Чаще всего рассматривается зависимость вязкости среды от температуры. Но в свою очередь можно считать, что температура среды есть функция времени. Модель (4.1) может описывать, например, движение в тонких пленках, когда вязкость жидкости меняется одновременно во всех точках плоскости за счет подогрева подложки ($T = T_1(t), T_1(t)$ — заданная функция). Возможно описание движения жидкости в плоском слое за счет внутренних источников тепла. Тогда из уравнения теплопроводности $T_t = h(t)/c_p$ следует, что $T(t) = \int c_p^{-1} h(t)dt + T_0$, где $h(t)$ – функция распределения внутренних источников тепла; c_p – теплоемкость среды.

Проведем групповую классификацию [1] системы уравнений (4.1) относительно функции $\nu(t)$. Построим точные решения данных уравнений при различной специализации функции вязкости.

Инфинитезимальный оператор, допускаемый системой (4.1), ищем в виде

$$X = \zeta \cdot \partial = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial v} + \eta^3 \frac{\partial}{\partial \omega}, \tag{4.2}$$

где $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3$ — функции переменных x, y, t, u, v, ω.

Из критерия инвариантности [1] уравнений (4.1) относительно оператора X найдем

$$\begin{gathered} \xi^1 = C_2 y + C_4 ty + C_5 x + g(t), \quad \xi^2 = -C_2 x - C_4 tx + C_5 y + g(t),\\ \xi^3 = 2C_3 t + C_1, \quad \eta^1 = C_2 v + C_4(y + tv) - 2C_3 u + C_5 u + f'(t),\\ \eta^2 = -C_2 u - C_4(x + tu) - 2C_3 v + C_5 v + g'(t), \quad \eta^3 = -2C_3\omega - 2C_4, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где C_i, $i = \overline{1,5}$, — произвольные постоянные; $f(t), g(t)$ — произвольные гладкие функции. Также получим классифицирующее уравнение, содержащее элемент $\nu(t)$:

$$2(C_5 - C_3)\nu(t) - (2C_3 t + C_1)\frac{d\nu(t)}{dt} = 0. \tag{4.4}$$

При произвольном выборе функции $\nu(t)$ уравнение (4.4) может быть удовлетворено, если только $C_1 = C_3 = C_5 = 0$. Тогда базис ядра основной алгебры Ли L_0, допускаемый уравнениями (4.1) при произвольном выборе $\nu(t)$, образуется операторами

$$X_2 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}\ , \quad X_4 = -ty\frac{\partial}{\partial x} + tx\frac{\partial}{\partial y} - (y + tv)\frac{\partial}{\partial u} + (x + tu)\frac{\partial}{\partial v} + 2\frac{\partial}{\partial \omega}\ ,$$

$$X_f = f(t)\frac{\partial}{\partial x} + f'(t)\frac{\partial}{\partial u}\ , \quad X_g = g(t)\frac{\partial}{\partial y} + g'(t)\frac{\partial}{\partial v}\ , \tag{4.5}$$

которые получаются из (4.3) при выборе C_2, C_4, $f(t)$, $g(t)$ поочередно не равными нулю. Пространство L_0 — бесконечномерно, так как базис (4.5) содержит операторы X_f, X_g. Очевидно, что операторы (4.5) содержатся в базисе (1.3) для уравнений с $\nu = \text{const}$.

Для классификации функции $\nu(t)$ в уравнении (4.4) необходимо знать преобразования эквивалентности, т.е. преобразования функции $\nu(t)$, сохраняющие структуру уравнений (4.1). Поскольку $\nu(t)$ — функция времени t, преобразования должны допускаться также и уравнениями

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial y} = 0. \tag{4.6}$$

Считая ν независимой функцией, инфинитезимальный оператор для системы (4.1), (4.6) ищем в виде

$$\bar{X} = \bar{\zeta}\partial = X + \pi\frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Здесь $\bar{\zeta} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \pi)$ — касательный вектор; π — функция переменных x, y, t, u, v, ω, ν.

Из критерия инвариантности системы (4.1), (4.6) относительно оператора $\bar{X}$ находим

$$\pi = 2(C_5 - C_3)\nu. \tag{4.7}$$

Тогда из (4.3), (4.7), полагая C_1, C_3, C_5 поочередно не равными нулю, а остальные постоянные равными нулю, получим

$$\bar{\zeta}_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \quad \bar{\zeta}_3 = (0, 0, -t, u, v, 0, \nu), \quad \bar{\zeta}_5 = (x, y, 0, u, v, 0, 2\nu).$$

Касательные векторы $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_3, \bar{\zeta}_5$ порождают преобразования эквивалентности $G(\bar{\zeta}_1)$, $G(\bar{\zeta}_3)$, $G(\bar{\zeta}_5)$:

$$\bar{t} = \frac{1}{a_2}t + a_1, \quad \bar{x} = a_3 x, \quad \bar{y} = a_3 y, \quad \bar{u} = a_2 a_3 u, \quad \bar{v} = a_2 a_3 v, \quad \bar{\omega} = \omega, \quad \bar{\nu} = \frac{a_2}{a_3^2}\ \nu, \tag{4.8}$$

где a_1, a_2, a_3 — групповые параметры переноса и растяжений.

Решая классифицирующее уравнение (4.4) и учитывая преобразования эквивалентности (4.8), можно выделить четыре случая специализации функции $\nu(t)$. В каждом случае происходит расширение базиса ядра основной алгебры L_0 операторов (4.5).

Т а б л и ц а 3

Классифицирующая таблица функции $\nu(t)$

$\nu(t) \sim$	Операторы
Произвольная	$L_0 = \{X_2, X_4, X_f, X_g\}$
$e^{2kt},\ k \neq 0$	$L(e^{2kt}) = \{L_0, X_1^*\}$
$t^s,\ s \neq 0$	$L(t^s) = \{L_0, X_3^*\}$
1	$L(1) = \{L_0, X_1, X_3\}$
0, идеальная жидкость	$L(0) = \{L_0, X_1, X_3, X_5\}$

1. При $\nu(t) = t^s$, $s \neq 0$, уравнения (4.1) допускают оператор

$$X_3^* = (s+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (s-1)\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) - 2\omega\frac{\partial}{\partial \omega}\ . \tag{4.9}$$

2. При $\nu(t) = e^{2kt}$, $k \neq 0$, базис (4.5) расширяется оператором

$$X_1^* = k\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\ . \tag{4.10}$$

3. При $\nu(t) \equiv 1$ к операторам (4.5) добавляются два оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v} - 2\omega\frac{\partial}{\partial \omega}\ ,$$

это оператор сдвигов по t и оператор растяжений соответственно.

4. При $\nu(t) \equiv 0$ уравнения (4.1) становятся уравнениями движения идеальной жидкости. К базису (4.5) добавляются три оператора

$$X_1,\ X_3,\ X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\ .$$

Здесь X_5 — оператор однородного растяжения.

Итак, получили классифицирующую таблицу функции $\nu(t)$ (табл. 3).

Замечание 1. Совершая предельный переход $k \to 0$, $s \to 0$, получим $X_3^* \to X_3$, $X_1^* \to X_1$, при этом $\nu(t) \to 1$. Алгебра допустимых операторов $L(1)$ совпадает с алгеброй операторов (1.3).

Замечание 2. Строго говоря, согласно (4.8), представителем класса функций $\nu(t) = e^{2kt}$ должна быть функция $\nu(t) = e^t$. В дальнейшем, чтобы не потерять наглядности, сохраним представителя данного класса функций.

5. Некоторые точные решения

Пример 1. Рассмотрим фактор-систему (3.8). Из второго уравнения следует, что $U_\lambda = V_\lambda$ или $U = V + a(t)$, где $a(t)$ — произвольная функция. Два других уравнения перепишутся в виде

$$W_t + a(t)W_\lambda = \nu(f^2+g^2)W_{\lambda\lambda}, \quad V_\lambda = \frac{fg}{f^2+g^2}\, W + \frac{ff' - gg'}{f^2+g^2}\ , \tag{5.1}$$

где $f(t), g(t)$ — гладкие функции, $f \neq 0,\ g \neq 0,\ \lambda = g(t)x - f(t)y$.

Рассматривая первое уравнение (5.1), введем новые переменные ξ, η:

$$\frac{d\lambda}{dt} = a(t), \quad \lambda|_{t=0} = \xi, \quad \lambda = \xi + \int\limits_0^t a(t)dt, \quad t = \tau.$$

Тогда уравнение перепишется так:

$$W_\tau = \nu(f^2(\tau) + g^2(\tau))W_{\xi\xi}.$$

Если сделать еще одну замену $\sigma = \nu\int\limits_0^\tau (f^2(\tau) + g^2(\tau))d\tau$, то получим уравнение теплопроводности $W_\sigma = W_{\xi\xi}$, которое можно решить известными методами.

Решение первого уравнения из (5.1) можно искать методом разделения переменных. Положим $W(t,\lambda) = h(t)\varphi(\lambda)$. Разделение переменных реализуется, если $a(t) = a_0(f^2(t) + g^2(t)),\ a_0 = \mathrm{const}$. Функцию $h(t)$ находим в явной форме, а на $\varphi(\lambda)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$$h(t) = \exp\left[C_0 \int (f^2(t) + g^2(t))dt\right], \quad \nu\varphi'' - a_0\varphi' - C_0\varphi = 0. \tag{5.2}$$

Находим корни характеристического уравнения для уравнения из (5.2):

$$\gamma_{1,2} = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 + 4\nu C_0}}{2\nu}\ .$$

Предположим, что $a_0^2 + 4\nu C_0 < 0$, тогда $\gamma_{1,2} = a_0/(2\nu) \pm ib_0/(2\nu)$, где $b_0 = \sqrt{-(a_0^2 + 4\nu C_0)}$. Следовательно,

$$\varphi(\lambda) = \left(C_1 \sin\frac{b_0\lambda}{2\nu} + C_2\cos\frac{b_0\lambda}{2\nu}\right)\exp\left[\frac{a_0\lambda}{2\nu}\right].$$

Первое уравнение из (5.1) проинтегрировано. Определена завихренность

$$\omega = W = \left(C_1 \sin\frac{b_0\lambda}{2\nu} + C_2\cos\frac{b_0\lambda}{2\nu}\right)\exp\left[C_0\int (f^2(t) + g^2(t))dt + \frac{a_0\lambda}{2\nu}\right]. \tag{5.3}$$

Из второго уравнения (5.1) находим функцию

$$V = \frac{fg}{f^2 + g^2}\ h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{ff' - gg'}{f^2 + g^2}\ \lambda + b(t),$$

где $b(t)$ — произвольная функция;

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \left(\tilde{C}_1 \sin\frac{b_0\lambda}{2\nu} + \tilde{C}_2\cos\frac{b_0\lambda}{2\nu}\right)\exp\left[\frac{a_0\lambda}{2\nu}\right];$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{2\nu(a_0C_1 + b_0C_2)}{a_0^2 + b_0^2}\ , \quad \tilde{C}_2 = \frac{2\nu(a_0C_2 - b_0C_1)}{a_0^2 + b_0^2}\ .$$

Возвращаясь от инвариантных функций U, V к физическим скоростям u, v, получаем их представление

$$u = \frac{(f'g + g'f)y + (ff' - gg')x}{f^2 + g^2}\ + \frac{f}{f^2 + g^2}\ h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{b(t) + a_0(f^2 + g^2)}{g}.$$

$$v = \frac{(g'f + f'g)x - (ff' - gg')y}{f^2 + g^2} + \frac{g}{f^2 + g^2}\ h(t)\tilde{\varphi}(\lambda) + \frac{b(t)}{f}. \tag{5.4}$$

В частном случае, когда $f = g = 1$, $b(t) = a_0 = 0$, имеем $\lambda = x - y$, $b_0 = \sqrt{-C_0}$. Формулы (5.3), (5.4) примут вид

$$\omega = \left(\tilde{C}_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}(x - y) + \tilde{C}_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}(x - y)\right) \exp[2C_0 t],$$

$$u = v = \frac{1}{2}\left(\tilde{C}_1 \sin\frac{b_0}{2\nu}(x - y) + \tilde{C}_2 \cos\frac{b_0}{2\nu}(x - y)\right) \exp[2C_0 t].$$

Вся плоскость разбивается прямыми $y = x + 2\nu b_0^{-1} \mathrm{arctg}(\tilde{C}_2/\tilde{C}_1)$ на полосы, на этих прямых $u = v = 0$.

Характерно то, что на соседних полосах течение жидкости противоположно направлено. Заметим, поскольку $C_0 < 0$, из последних формул следует, что $\omega \to 0$, $u \to 0$, $v \to 0$ при $t \to +\infty$, т.е. движение жидкости “затухает".

В случае, когда $a_0^2 + 4\nu C_0 = 0$, $a_0^2 + 4\nu C_0 > 0$, уравнения (5.1) также полностью интегрируются.

Пример 2. Фактор-система (3.3) получается из уравнений (1.1) на операторе X_3. Предположим, что функция U не зависит от μ, V не зависит от λ, т.е. $U = U(\lambda)$, $V = V(\mu)$. Тогда уравнения (3.3) легко интегрируются: $U = C_0\lambda + C_1$, $V = -C_0\mu + C_2$, где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решение системы уравнений (1.1)

$$u = C_0\frac{x}{t} + C_1\frac{1}{\sqrt{t}}\ , \quad v = -C_0\frac{x}{t} + C_2\frac{1}{\sqrt{t}}\ , \quad \omega = 0$$

является потенциальным решением с потенциалом

$$\varphi = C_0\frac{(x^2 - y^2)}{2t} + \frac{C_1 x + C_2 y}{\sqrt{t}} + C_3.$$

Пример 3. Будем искать инвариантные решения на операторе X_3^* (4.9) при $\nu(t) = t^s$. Для удобства записи обозначим $(s + 1) = 2A$, тогда

$$X_3^* = 2A\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right) + 2t\frac{\partial}{\partial t} + 2(A - 1)\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) - 2\omega\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Инвариантами оператора будут xt^{-A}, yt^{-A}, ut^{1-A}, vt^{1-A}, ωt. Решение ранга 2 ищем в виде

$$(u, v, \omega) = (t^{A-1}U(\lambda, \mu), t^{A-1}V(\lambda, \mu), t^{-1}W(\lambda, \mu)),$$

где $\lambda = xt^{-A}$, $\mu = yt^{-A}$. Уравнения (4.1) преобразуются в систему

$$W + (A_\lambda - U)W_\lambda + (A_\mu - V)W_\mu = -W_{\lambda\lambda} - W_{\mu\mu},$$

$$U_\lambda + V_\mu = 0, \quad V_\lambda - U_\mu = W. \tag{5.5}$$

Предположим, что $U = U(\mu)$, $V = V(\lambda)$, тогда второе уравнение в (5.5) будет тождественным. Подставив третье уравнение из (5.5) в первое, получим

$$(V_{\lambda\lambda\lambda} + A\lambda V_{\lambda\lambda} + V_\lambda) - (U_{\mu\mu\mu} + A\mu U_{\mu\mu} + U_\mu) = UV_{\lambda\lambda} - VU_{\mu\mu}. \tag{5.6}$$

Можно рассмотреть три случая.

1. Пусть $U = U_0 = \text{const},\ V = V(\lambda)$. Тогда из (5.5) следует, что $W(\lambda) = V_\lambda(\lambda)$. Уравнение (5.6) перепишется так:

$$V''' + V''(A\lambda - U_0) + V' = 0. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) может быть сведено к уравнению Риккати, если $A \neq 0$.

Если $A = 0$, то $s = -1$. Вязкость жидкости $\nu(t) = t^{-1}$ уменьшается при росте t. Тогда $\lambda = x, \mu = y, u = t^{-1}U_0, v = t^{-1}V(x), w = t^{-1}W(x)$. Теперь уравнение (5.7) — линейное, $W = V'$:

$$W'' - U_0 W' + W = 0 \tag{5.8}$$

с характеристическими корнями

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2}(U_0 \pm \sqrt{U_0^2 - 4}).$$

При $U_0^2 > 4$ корни ξ_1, ξ_2 — вещественные, $W(x) = D_1 e^{\xi_1 x} + D_2 e^{\xi_2 x}$. Общее решение уравнений (4.1) будет иметь вид

$$u = \frac{U_0}{t}, \quad v = \frac{D_1 e^{\xi_1 x}}{t\xi_1} + \frac{D_2 e^{\xi_2 x}}{t\xi_2} + \frac{D_3}{t}, \quad \omega = \frac{D_1 e^{\xi_1 x} + D_2 e^{\xi_2 x}}{t},$$

где D_1, D_2, D_3 — произвольные постоянные.

При $U_0^2 = 4$ $\xi_1 = \xi_2 = U_0/2$, $W(x) = (D_1 + D_2 x)e^{U_0 x/2}$. Общее решение уравнений (4.1) запишется как

$$u = \frac{U_0}{t}, \quad v = \frac{2}{tU_0^2} e^{\frac{U_0 x}{2}} (D_1 U_0 + D_2(U_0 x - 2)) + \frac{D_3}{t}, \quad \omega = \frac{D_1 + D_2 x}{t} e^{\frac{U_0 x}{2}},$$

где D_1, D_2, D_3 — произвольные постоянные; $U_0 = \pm 2$.

При $U_0^2 < 4$ корни ξ_1, ξ_2 — комплексные, тогда

$$W(x) = e^{\frac{U_0 x}{2}} \left(D_1 \sin \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} + D_2 \cos \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} \right).$$

Общее решение уравнений (4.1) будет иметь вид

$$u = \frac{U_0}{t}, \quad \omega = \frac{1}{t} e^{\frac{U_0 x}{2}} \left(D_1 \sin \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} + D_2 \cos \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} \right),$$

$$v = \frac{\sqrt{4 - U_0^2}}{2} e^{\frac{U_0 x}{2}} \left(\left(D_1 \frac{U_0}{\sqrt{4 - U_0^2}} + D_2 \right) \sin \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(D_2 \frac{U_0}{\sqrt{4 - U_0^2}} - D_1 \right) \cos \frac{\sqrt{4 - U_0^2} x}{2} \right) + \frac{D_3}{t},$$

где D_1, D_2, D_3 — произвольные постоянные;

2. Когда $V = V_0 = \text{const}, U = U(\mu)$, решения уравнений (4.1) могут быть найдены аналогично рассмотренному случаю с точностью до переобозначения переменных.

3. В случае $U_{\mu\mu} = b_0 = \text{const}$, $V_{\lambda\lambda} = a_0 = \text{const}$ решение ищем в виде $U = 2^{-1} b_0 \mu^2 + b_1 \mu + b_2$, $V = 2^{-1} a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$, $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ — постоянные. Тогда $W = a_0 \lambda + a_1 - b_0 \mu - b_1$. Переменные λ, μ в уравнении (5.6) разделяются. В результате получаем три типа решений:

$$u = \frac{b_0}{2} y^2 + \frac{a_2 b_0}{t} y + \frac{b_2}{t^2}, \quad v = \frac{a_2}{t^2}, \quad \omega = -b_0 y - \frac{a_2 b_0}{t};$$

$$u = \frac{b_2}{t^2}, \quad v = \frac{a_0}{2} x^2 + \frac{b_2 a_0}{t} x + \frac{a_2}{t^2}, \quad \omega = a_0 x + \frac{b_2 a_0}{t};$$

$$u = \frac{a_1}{t} y + \frac{b_2}{t^{1-A}}, \quad v = \frac{a_1}{t} x + \frac{a_2}{t^{1-A}}, \quad \omega = 0.$$

Список литературы

[1] Овсянников Л. В. Группововй анализ дифференциальных уравнений. М., 1978. 400 с.

[2] Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука, 1994. 320 с.

[3] Ovsiannikov L. V. On the optimal systems of subalgebras // J. Lie Grroups and Their Appl. V.1. No. 2. 1994. Celal Bayar Univ. P. 18–26.

[4] Родионов А. А. Групповой анализ плоского движения вязкой несжимаемой жидкости в терминах скорость — завихренность // Современные проблемы прикл. мат. и механики: Тр. Междунар. конф. 2001. Т. 6. Ч. 2. Спец. выпуск. С. 519–523.

Поступила в редакцию 15 октября 2002 г.